УДК 519.63

Моделирование процессов переноса на основе уравнении с частными производными дробного порядка

***А.С. Бердышев*[1]*, М.Н. Мадияров*[2]*, Н.Б. Алимбекова*[1]**
[1]КазНПУ им. Абая, г. Алматы; [2]ВКГУ им. С. Аманжолова, г. Усть-Каменогорск

Дробные интегро-дифференциальные уравнения находят множество применений во многих областях физики, механики, прикладной математики, математической биологий и т.д. Дробное математическое исчисление является мощным инструментом для получения динамических моделей, в которых интегро-дифференциальные операторы по времени и координатам описывают степенную долгосрочную память и пространственную нелокальность сложных сред и процессов.

Дифференциальные уравнения дробного порядка возникают также в задачах классической механики (обратные задачи), гидродинамики (движение тела в вязкой жидкости), теплопроводности (динамика тепловых потоков), диффузии (электрохимический анализ поверхностей электродов), при изучении физических процессов стохастического переноса, при использовании концепции фрактала в физике конденсированных сред и т.д. Многие проблемы фильтрации жидкости в сильно пористых (фрактальных) средах приводят к необходимости изучения краевых задач для уравнений в частных производных дробного порядка. Уравнения в дробных производных описывают эволюцию некоторой физической системы с потерями, причем показатель производной указывает на долю состояний системы, сохраняющихся за все время эволюции. Такие системы могут быть классифицированы как системы с «остаточной» памятью, занимающие промежуточное положение между системами, обладающими полной памятью, с одной стороны, и марковскими системами, с другой.

За последнее время можно считать установленным, что математический аппарат интегро-дифференцирования дробного порядка является адекватным выражением фундаментальных физических концепций, лежащих в основе физики фракталов. В рамках математического аппарата интегро-дифференцирования дробного порядка удаётся не только более глубоко понять известные, но и получить принципиально новые результаты. Несмотря на долгую историю развития математического аппарата дробного дифференцирования [1, 2], аналитические методы решения уравнений дробной диффузии оказываются малоэффективными, а теория численных методов их решения носит фрагментарный характер и далека от завершения [3]. Разработке численных методов решения краевых задач для уравнения переноса с производной дробного порядка посвящены работы [3–8].

Целью данной работы является использование математического аппарата интегро-дифференцирования дробного порядка для описания процесса переноса примесей вредных веществ в атмосфере на основе уравнений с частными производными дробного порядка.

Обычно в теоретических изысканиях в области случайных переносов используют два способа или уровня описания движения: микро- и макроскопический. Первый имеет дело с законом смешения отдельных частиц, а второй - их ансамбля. Оба, безусловно, связаны между собой, и детальное знание одного уровня дает возможность определить второй – процесс случайных блужданий пьяницы эквивалентен уравнению диффузии и наоборот [9], но для различных аспектов явления, интересующих исследователя в каждом конкретном случае, любой из них может быть гораздо удобнее другого. Кроме того, как в реальных, так и компьютерных экспериментах как правило не удается исследовать обе стороны явления сразу.

По этой причине большое сожаление вызывает тот факт, что указанная выше двойственность подхода к наиболее популярному и классическому примеру стохастического переноса совершенно теряется при изучении более сложных движений. В самом деле, очень летально исследуемые на микроскопическом уровне физические системы со степенным законом случайных смешений

$$\langle x \rangle^{\alpha}\ t^{a}$$

очень редко стараются описать каким-либо макроскопическим уравнением, причем такие попытки не регулярны и не носят характера систематического подхода.

Одна из проблем, возникающих при использовании дробных производных, заключается в том, что не существует их однозначного определения. Численные методы решения задач для уравнений с дробными производными привязаны к виду выбранной производной, поэтому возникает необходимость анализа и сравнения результатов, полученных при использовании разных определений и численных методов. Такое сравнение была проведена на примере задачи о распространении теплового импульса.

В качестве математической модели многих физических процессов в нижних слоях атмосферы при стационарных условиях и отсутствии горизонтальной диффузии выступает уравнение

$$u_1\left(\frac{z}{z_1}\right)^m\frac{\partial u}{\partial x}=k_1\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{z_1}\right)^{1-\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial z},\quad x>0, z>0 \qquad (1)$$

с соответствующими краевыми условиями [13]. Здесь u_1, k_1, m, z_1 – положительные величины, $0<\varepsilon=const<1, u=u(z,x)$ – функция независимых переменных x и z, которую можно интерпретировать как температуру или влажность.

Пусть $p=(m+1-\varepsilon)/\varepsilon$, $\varepsilon^2c^{2+p}=1$. Тогда уравнение (1) в новых независимых переменных

$$\xi=\frac{k_1x}{u_1z_1^2}, \eta=c\left(\frac{z}{z_1}\right)^{\varepsilon}$$

принимает вид

$$\eta^p\frac{\partial U}{\partial\xi}=\frac{\partial^2U}{\partial\eta^2}, \qquad (2)$$

где $U(\xi,\eta)=u\left(z_1(\eta/c)^{1/\varepsilon}, u_1z_1^2\xi/k_1\right)$.

Уравнение (2) на евклидовой плоскости точек (ξ,η) является уравнением параболического типа с нехарактеристической сингулярной линией $\eta=0$, и оно было объектом исследований ряда работ.

Пусть $u(z,x)$ – регулярное при $x>0, z>0$ решение уравнения (1), непрерывное во всех конечных точках (z,x) с неотрицательными координатами, которое удовлетворяет граничным условиям

$$u(z,0)=0\quad \forall z\ge 0,\quad \lim_{z\to+\infty}u(z,x)=0\quad \forall x\ge 0 \qquad (3)$$

и обладает тем свойством, что существуют пределы

$$\lim_{\eta\to+0}\frac{\partial U}{\partial\eta}=\nu(\xi),\quad \lim_{\eta\to+0}\frac{\partial U}{\partial\xi}=\tau'(\xi),$$

суммируемые на сегменте $0\le\xi\le\xi_0$ для любого $\xi_0>0$. Тогда

$$\nu(\xi)=-\alpha^{2\alpha-1}\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha)}D_{0\xi}^{\alpha}\tau(t). \qquad (4)$$

Весьма важная формула (4) выводится из следующего общего представления всех решений уравнения (1) или (2), удовлетворяющих условию (3):

$$u\left(z,x\right)=\frac{\left(\eta/2\right)^{2}q}{\Gamma\left(q\right)}\int\limits_{0}^{\xi}\left(\xi-t_{1}\right)^{-q-1}\exp\left(-\frac{\eta^{2}/4}{\xi-t_{1}}\right)T_{1}\left(t_{1}\right)dt_{1}$$

где

$$q=\frac{\varepsilon}{m+\varepsilon+1},\quad T_{1}\left(t_{1}\right)=T\left(\frac{4u_{1}q^{2}z_{1}^{2}}{k_{1}\varepsilon^{2}t_{1}}\right)=T\left(\frac{4u_{1}t_{1}}{k_{1}}q^{2}z_{1}^{2}\varepsilon^{-2}\right),\ T\left(x\right)=u\left(0,x\right).$$

Этот вывод реализован Л.И. Сербиной [10].

Библиографический список

1. Самко С. Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Мн.: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Нахушев А.М. Элементы дробного исчисления и их применение. – Нальчик: КБНЦ РАН, 2000. – 299 с.
3. Головизнин В.М., Киселев В.П., Короткин И.А., Юрко Ю.И. Прямые задачи неклассического переноса радионуклидов в геологических формациях // Извест. РАН. Энергетика, 2004. – №4. – С. 121–130.
4. Isaacson E., Keller H.B. Analysis of Numerical Methods. – New York – London – Sydney: Wiley & Sons, Inc., 1966. – 541 p.
5. Бейбалаев В.Д. Численный метод решения математической модели теплопереноса в средах с фрактальной структурой // Фундаментальные исследования, 2007. – №12. – С. 249–251.
6. Tadjeran Charles, Meerschaert MarkM., Scheffler Hana–Peter A second-order accurate numerical approximation for the fractional diffusion equation // J. Computat. Phys., 2006. – Vol. 213, No. 1. – P. 205–213.
7. Liu Q., Liu F., Turner I., Anh V. Approximation of the Levy–Feller advection-dispersion process by random walk and finite difference method // J. Computat. Phys., 2007. – Vol. 222, No. 1. – P. 57–70.
8. Головизнин В.М., Киселев В.П., Короткин И.А. Численные методы решения уравнения дробной диффузии в одномерном случае. – М.: ИБРАЭ РАН, 2002. – 35 с. – Препринт № IBRAE–2002–10.
9. J. P. Bouchaud and A. Georges, Phys. Rep. 195, 127 (1990).
10. Сербина Л.И. Об одной математической модели динамики взаимодействия деятельной поверхности почвы с приземным слоем атмосферы // Доклады Адыгейской (Черкесской) Международной академии наук. 2000. Т. 5. С. 50–55.