Работа С.А. Саженкова поддержана Министерством науки и высшего образования РФ (код проекта III.22.4.2) и РФФИ (грант № 18-01-00649).

Библиографический список

1. Sazhenkova T.V. and Sazhenkov S.A. Kaplan's penalty operator in approximation of a diffusion-absorption problem with a one-sided constraint // Siberian Electron. Math. Rep. – 2019. – Vol. 16. – P. 236–248.

2. Саженкова Т.В, Саженков С.А. Аппроксимация решения односторонней задачи анизотропной диффузии-абсорбции // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию: сб. ст. – Вып. 4. / гл.ред. Е.Д. Родионов. Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2018, 15–24.

3. Киндерлерер Д., Стампаккья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. – М.: Мир, 1983.– 256 с.

4. Гроссман К., Каплан А.А. Нелинейное программирование на основе безусловной оптимизации. – Новосибирск: Наука, 1981. – 183 с.

5. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 588 с.

6. Griffin J.D. and Kolda T.G. Nonlinearly constrained optimization using heuristic penalty methods and asynchronous parallel generating set search // Appl. Math. Research eXpress. – 2010. – Vol. 2010(1). – P. 36–62.

7. Kaplan A. and Tichatschke R. Some results about proximal-like methods // In: A. Seeger (Editor), Recent Advances in Optimization. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. – Vol. 563. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2006. – P. 61–86.

УДК 517.95

Задача фильтрации двукомпонентной смеси в тонком пороупругом слое

М.А. Токарева
АлтГУ, г. Барнаул

В качестве приложения теории многокомпонентных течений рассматривается задача фильтрации смеси через деформируемую пористую среду. Данная задача возникает при описании движения лекарств, крови и других физиологических жидкостей в мышечной ткани. Предлагаемая модель основана на уравнениях Маскета – Леверетта и дополняется уравнениями для сжимаемой пористой среды.

Рассматривается движение двух несмешивающихся жидкостей в пороупругой среде. Для описания процесса используется система уравнений [1]

$$\frac{\partial \phi \rho_i^0 s_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i^0 \phi s_i \vec{u}_i) = 0, \quad i = 1,2, \tag{1}$$

$$s_i \phi (\vec{u}_i - \vec{u}_3) = -K_0 \frac{\overline{k_{0i}}}{\mu_i} (\nabla p_i + \rho_i^0 \vec{g}), \quad i = 1,2, \tag{2}$$

$$p_2 - p_1 = p_c(x, s), \quad s = \frac{s_1 - s_1^0}{1 - s_1^0 - s_2^0}, \quad 0 \le s \le 1, \tag{3}$$

$$p_c(x, s) = \overline{p_c}(x) j(s), \tag{4}$$

$$\frac{\partial (1 - \phi) \rho_3^0}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_3^0 (1 - \phi) \vec{u}_3) = 0, \tag{5}$$

$$\nabla \cdot \vec{u}_3 = -\frac{1}{\xi(\phi)} p_e - \beta_t(\phi) \left(\frac{\partial p_e}{\partial t} + \vec{u}_3 \cdot \nabla p_e\right), \tag{6}$$

$$\rho_{tot} \vec{g} + div\left((1 - \phi) \nu \left(\frac{\partial \vec{u}_3}{\partial \vec{x}} + \left(\frac{\partial \vec{u}_3}{\partial \vec{x}} \right)^* \right) \right) - \nabla p_{tot} = 0, \tag{7}$$

$$p_{tot} = \phi (s_1 p_1 + s_2 p_2) + (1 - \phi) p_3, \quad p_e = (1 - \phi)(p_s - p_f), \quad \rho_{tot} = \phi (s_1 \rho_1^0 + s_2 \rho_2^0) + (1 - \phi) \rho_3^0. \tag{8}$$

Здесь ϕ – пористость, $\vec{u}_i$, s_i – скорости и насыщенности жидких фаз (доля пор, занятых i–й фазой; $\vec{u}_3$ – скорость твердого скелета, K_0 – тензор фильтрации (функция пористости), $\overline{k_{0i}}$ – относительные фазовые проницаемости, μ_i – коэффициенты динамической вязкости, p_i – давления фаз смеси, $\vec{g}$ – вектор ускорения силы тяжести; $\overline{p_c}(x)$ – заданная функция точки $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $j(s)$ – функция Леверетта ($\frac{dj(s)}{ds} \le 0$, $j(0) = \infty$, $j(1) = 0$); ρ_3^0 – истинная плотность твердой фазы, $p_e = p_{tot} - p_f$ – эффективное давление, $p_{tot} = \phi p_f + (1 - \phi) p_s$ – общее давление, $p_f = s_1 p_1 + s_2 p_2$, p_s – соответственно давления жидкой и твердой фаз, $\rho_{tot} = (1 - \phi) \rho_3^0 + \phi (s_1 \rho_1^0 + s_2 \rho_2^0)$ – общая плотность; $\xi(\phi)$ и $\beta_t(\phi)$ – коэффициенты объемной вязкости и объемной сжимаемости горной породы есть заданные функции (модельные зависимости:

$\frac{1}{\xi(\phi)} = \phi^m/\nu, \beta_t(\phi) = \phi^b\beta_\phi$, где $b = 1/2$, $m \in [0,2]$, $n = 3$, μ, ν, β_ϕ – положительные параметры пороупругой среды). Система (1)–(8) записана в эйлеровых координатах $\vec{x} \in R^3$, $t \in [0,T]$. Истинные плотности ρ_i^0 принимаются постоянными. Поскольку $s_2 = 1 - s_1$, то неизвестными являются 14 скалярных величин: s_1, ϕ, p_1, p_2, p_s, $3\overrightarrow{u_1}$, $3\overrightarrow{u_2}$, $3\overrightarrow{u_3}$. Для их определения служат также 14 скалярных уравнений: два уравнения неразрывности (1), шесть уравнений закона Дарси (2), уравнение для капиллярного скачка (3), уравнение неразрывности твердой фазы (5), реологическое соотношение (6), три уравнения равновесия (7).

Рассмотрим течение в плоском слое в системе координат (x,z). Проведем обезразмеривание уравнений (1)–(8). Пусть $\bar{x}, \bar{z}, \bar{t}$ – безразмерные переменные, определенные равенствами

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{z} = \frac{z}{H}, \quad \bar{t} = \varepsilon^k \tau_0 t, \quad \varepsilon = \frac{H}{L} \ll 1,$$

где $[L] = [H] = [\text{м}]$, $[\tau_0] = [1/\text{c}]$; k – произвольное вещественное число.

Положим:

$$p_i(t,x,z) = \alpha\bar{p}_i(\bar{t},\bar{x},\bar{z}) = \alpha\bar{p}_i\left(\varepsilon^k\tau_0 t, \frac{x}{L}, \frac{z}{H}\right), \qquad i = 1,2,3,$$

$$u_i^j(t,x,z) = \beta^j\bar{u}_i^j(\bar{t},\bar{x},\bar{z}) = \beta^i\bar{u}_i^j\left(\varepsilon^k\tau_0 t, \frac{x}{L}, \frac{z}{H}\right), \qquad i = 1,2,3, \quad j = 1,2,$$

$$p_{tot}(t,x,z) = \alpha\bar{p}_{tot}(\bar{t},\bar{x},\bar{z}), \qquad \rho_i^0 g = \frac{\alpha}{H}\bar{\rho}_i^0\bar{g}, \quad \rho_{tot} g = \frac{\alpha}{H}\bar{\rho}_{tot}\bar{g}.$$

$$\xi(\phi) = \xi^1\bar{\xi}(\phi), \quad \beta_t(\phi) = \beta\bar{\beta}_t(\phi).$$

Здесь $[\beta^i] = [\text{м/с}]$, $[\alpha] = [\text{Па}]$,$[\xi^1] = [\text{Па}\cdot c]$, $[\beta] = [1/\text{Па}]$. Для получения безразмерной формы уравнений следует положить

$$\beta^1 = \varepsilon^k\tau_0 L, \quad \beta^2 = \varepsilon^k\tau_0 H, \quad \beta = \frac{1}{\tau_0\xi^1}.$$

Рассмотрим $k = -2$.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(1-\phi)}{\partial\bar{t}} + \frac{\partial}{\partial x}((1-\phi)\bar{u}_3^1) + \frac{\partial}{\partial z}((1-\phi)\bar{u}_3^2) = 0, \\ &\frac{\partial\phi s_i}{\partial\bar{t}} + \frac{\partial}{\partial x}(\phi s_i\bar{u}_i^1) + \frac{\partial}{\partial z}(\phi s_i\bar{u}_i^2) = 0, \quad s_1 + s_2 = 1, \end{aligned} \tag{9}$$

$$u_3^1 = u_i^1, \tag{10}$$

$$\phi(\bar{u}_i^2 - \bar{u}_3^2) = -K_0(\phi)k_{0i}(\frac{\partial\bar{p}_i}{\partial\bar{z}} - \bar{\rho}_i^0\bar{g}), \tag{11}$$

$$\frac{\partial u_3^1}{\partial x}+\frac{\partial u_3^2}{\partial z}=-\gamma\bar{\beta}_t(\phi)\frac{d(\bar{p}_{tot}-\bar{p}_f)}{dt}, \qquad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left((1-\phi)\frac{\partial\bar{u}_3^1}{\partial\bar{z}}\right)=0, \qquad (13)$$

$$2\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left((1-\phi)\frac{\partial\bar{u}_3^2}{\partial\bar{z}}\right)+\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left((1-\phi)\frac{\partial\bar{u}_3^1}{\partial\bar{z}}\right)=0. \qquad (14)$$

где безразмерные коэффициенты k_{0i},γ имеют вид:

$$k_{0i}=\frac{\bar{k}_{0i}\alpha}{\mu_i\tau_0L^2},\quad \gamma=\alpha\beta.$$

Пусть $g=0, p_c=0$ и уравнения (9)-(14) удовлетворяют начально-краевым условиям

$$u_i^1|_{z=0}=B,\qquad \frac{\partial u_i^1}{\partial z}|_{z=H}=0, i=1,2,3,\ u_3^2|_{z=0}=C,\qquad \frac{\partial u_3^2}{\partial z}|_{z=H}=0,$$

$$p_1|_{z=0}=F(x,t),\frac{\partial p_1}{\partial z}|_{z=H}=0,$$

$$\phi|_{t=0}=\phi^0(x,z),\ s_1|_{t=0}=s_1^0(x,z),$$

$$p_1|_{t=0}=p_1^0(x,z), p_s|_{t=0}=p_s^0(x,z).$$

Тогда

$$\phi=\phi^0(x-Bt,z-Ct),\ s_1=s_1^0(x-Bt,z-Ct),$$
$$s_2=1-s_1^0(x-Bt,z-Ct),\qquad u_i^1=B,\ u_i^2=C, i=1,2,3,$$

$$p_1=p_2=F(x,t),$$

$$p_s=F(x,t)+p_s^0(x-Bt,z-Ct)-p_1^0(x-Bt,z-Ct).$$

В случае однофазной фильтрации математическая теория для случая вязкого скелета построена в работах [2–4].

Библиографический список

1. Папин А.А., Подладчиков Ю.Ю. Изотермическое движение двух несмешивающихся жидкостей в пороупругой среде // Алтайского государственного университета. – Барнаул, 2015. – №1/2 (85). – С. 131–135.

2. Tokareva M.A. Solvability of initial boundary value problem for the equations of filtration in poroelastic media // Journal of Physics: Conference Series. 2016. Vol. 722.

3. Papin A.A., Tokareva M.A. Correctness of the initial-boundary problem of the compressible fluid filtration in a viscous porous medium // Journal of Physics: Conference Series. 2017. Vol. 894. № 1. 012070 p.
4. Papin A.A., Tokareva M.A. On local solvability of the system of the equations of one dimensional motion of magma // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2017. Vol. 10. № 3. 385–395 pp.

УДК 517.947

Асимптотика решения второй начально-краевой задачи для системы Соболева при большом времени

С.И. Янов
АлтГПУ, г. Барнаул

Исследуется поведение решения второй начально-краевой задачи для системы С.Л. Соболева [1]:

$$\begin{aligned} &V_t - [V \times \omega] + gradP = 0 \\ &divV = 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

$$V\big|_{t=0} = 0\,,\ P_z\big|_{z=0} = g(t, y'),\quad y' \in R^2\,,\ \omega = (0,0,1).$$

Ранее асимптотика решений различных задач для системы (1) исследовалась в работах С.Л. Соболева [1], В.Н. Масленниковой [2], С.В. Успенского, Г.В. Демиденко [3], С.В. Успенского, Е.Н. Васильевой [4-5], С.И. Янова [5].

Асимптотика решения второй краевой задачи для уравнения Соболева в работах [6-7], там было доказано, что решение существует и единственно [6] § 3.2 теорема 3.3, и при условии $\int_0^t g(\tau, x')d\tau = O(t^{-2-\alpha})$, когда $t \to \infty$, $\alpha \ge 0$, что $P = O(t^{-2/5})$, [7] § 1.6 Теорема 3.1. В работе [8] была получена асимптотика решения задачи (1). Настоящая работа улучшает результаты работы [8]. Доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $g(t, x') \in C_0^\infty(R^2)$ *при каждом фиксированном t и имеет волновой характер, то есть* $g(t, x') = D_t h(t, x')$, *где* $h(t, x')$ *– некоторая финитная трижды непрерывно дифференцируемая функция по времени t с носителем в интервале (t ‘, t’’), 0< t ‘ < t’’ . Обозначим* $\ddot{x} = (x, y, z)$. *Тогда имеют место следующие асимптотические выражения при фиксированном* $z > 0$ *и* $t \to \infty$ *:*