УДК 517.972.5 + 51-72

Равномерная аппроксимация решения односторонней задачи диффузии-абсорбции методом штрафа А. Каплана

Т.В. Саженкова[1], С.А. Саженков[2,3]
[1]АлтГУ, Барнаул; [2]ИГиЛ СО РАН, НГУ, г. Новосибирск;
[3]Хэйлунцзянский ун-т, г. Харбин

1. Аннотация. Работа посвящена исследованию однородной задачи Дирихле для нелинейного уравнения диффузии-абсорбции с ограничением значений диффузионного потока. Изучается семейство приближённых решений, получаемых с помощью метода штрафа с применением интегрального оператора штрафа А. Каплана. Доказывается, что семейство приближённых решений слабо сходится к решению исходной задачи в пространстве Соболева первого порядка при стремлении малого параметра регуляризации к нулю. Затем в результате систематического изучения структуры оператора штрафа устанавливается свойство равномерной аппроксимации в классах функций, непрерывных по Гёльдеру. В расширенном виде результаты исследования изложены в [1,2].

2. Постановка и разрешимость задачи. Рассматривается однородная задача Дирихле для уравнения диффузии-абсорбции с односторонним ограничением на диффузионный поток.

Задача D-A. В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ с гладкой границей $\partial\Omega$ требуется найти функцию $u = u(\boldsymbol{x})$, удовлетворяющую уравнению

$$-\mathrm{div}_x \boldsymbol{J} + |u|^{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{2}} u = f, \tag{1a}$$

в котором

$$\boldsymbol{J} \in \partial\Phi(\nabla_x u), \Phi(\boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{p}\int_\Omega Q(\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x}, Q(\boldsymbol{\tau}) = \begin{cases} |\boldsymbol{\tau}|^p \text{при} |\boldsymbol{\tau}| \le 1, \\ +\infty \text{ при} |\boldsymbol{\tau}| > 1, \end{cases} \tag{1b}$$

и граничному условию

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1c}$$

В постановке задачи D-A $p \in (1, +\infty)$ – заданный постоянный показатель; $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$ – заданный функционал, $W^{-1,p'}(\Omega)(p^{-1} + (p')^{-1} = 1)$ – пространство, сопряжённое к пространству Соболева

$W_0^{1,p}(\Omega)$. Нормы в $W_0^{1,p}(\Omega)$ и $W^{-1,p'}(\Omega)$ вводятся стандартно. Соотношения (1b) означают, что диффузионный поток $\boldsymbol{J}$ является элементом субдифференциала $\partial\Phi$ функционала $\Phi\colon \boldsymbol{\tau} \mapsto \frac{1}{p}\int_\Omega Q(\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x}$ в точке $\boldsymbol{\tau} = \nabla_x u$. Заметим, что Φ является дифференцируемым в смысле Гато отображением на множестве

$$M \coloneqq \{\boldsymbol{\tau}\colon \Omega \mapsto \mathbb{R}^d - \text{измеримая функция,} \qquad |\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x})| \le 1\} \subset L^p(\Omega)^d$$

и его производная по Гато $\Phi'(\boldsymbol{\tau})$определяется формулой

$$\langle \Phi'(\boldsymbol{\tau}), \boldsymbol{v}\rangle = \int_\Omega |\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x})|^{p-2}\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \quad \forall \boldsymbol{v} \in L^p(\Omega)^d. \tag{2}$$

Здесь и далее через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначаются скобки двойственности, то есть через $\langle\Psi, \psi\rangle$ обозначается значение какого-либо функционала $\Psi \in \mathcal{V}^*$ на некотором элементе $\psi \in \mathcal{V}$, где $\mathcal{V}$ – рефлексивное банахово пространство, а $\mathcal{V}^*$ – сопряжённое к нему.

Решение задачи D-A понимается в обобщённом смысле. *Обобщённым решением (о.р.)* задачи D-A называется функция $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, удовлетворяющая оценке

$$|\nabla_x u| \le 1 \ \text{ почти всюду в } \Omega \tag{3a}$$

и вариационному неравенству

$$\int_\Omega [|\nabla_x u|^{p-2}\nabla_x u \cdot \nabla_x(\varphi - u) + |u|^{p-2}u(\varphi - u)]d\boldsymbol{x} \ge \langle f, \varphi - u\rangle \tag{3b}$$

для любой пробной функции $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ такой, что $|\nabla_x \varphi| \le 1$ почти всюду в Ω.

Из хорошо известных положений выпуклого анализа и теории вариационных неравенств для монотонных операторов [3, глава III, теорема 1.4] следует, что при любом заданном $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$ задача D-A имеет единственное обобщённое решение в указанном выше смысле.

3. Оператор штрафа А. Каплана. В приложениях часто бывает полезно определить решение односторонней задачи вида (1) приближённо с помощью решения задач безусловной оптимизации. Такую возможность даёт метод штрафа, имеющий большую историю и давно сложившийся в стройную теорию. Его основные положения можно найти, например, в [4,5]. Оператор штрафа при этом, вообще говоря, можно определять различными способами и вопрос выбора «наилучшего» оператора является весьма тонким, а ответ на него неочевиден. Настоящий доклад посвящён вопросу построения приближённых решений задачи D-A методом штрафа с помощью оператора штрафа с внутренней регуляризацией, предложенного А. Капланом и получившего широкое применение при изучении нелинейных задач вариационного исчисления с ограничениями [3,6,7].

Оператор штрафа А. Каплана $\beta_\varepsilon^{(t)}$ при фиксированных $\varepsilon > 0$ и $t \geq 0$ определяется формулой

$$\langle \beta_\varepsilon^{(t)}(\varphi), \psi \rangle =$$
$$= \int_\Omega \left(1 + \frac{|\nabla_x \varphi|^p - 1}{\sqrt{(|\nabla_x \varphi|^p - 1)^2 + \varepsilon^{2+t}}}\right) |\nabla_x \varphi|^{p-2}\, \nabla_x \varphi \cdot \nabla_x \psi d\boldsymbol{x}$$
$$\forall \varphi, \psi \in W_0^{1,p}(\Omega) \qquad (4)$$

Однородную задачу Дирихле для сильно нелинейного дифференциального уравнения

$$-\mathrm{div}_x(|\nabla_x u_\varepsilon|^{p-2} \nabla_x u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \beta_\varepsilon^{(t)}(u_\varepsilon) + |u_\varepsilon|^{p-2} u_\varepsilon = f, u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega),$$
$$\varepsilon > 0 \ (5)$$

назовём *задачей с приближённым штрафом (по А. Каплану), ассоциированной с задачей D-A*.

Первый основной результат работы состоит в том, что *при любом фиксированном* $\varepsilon > 0$ *и для любого заданного* $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$ *задача (5) имеет единственное обобщённое решение* $u_\varepsilon = u_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ и что *семейство решений* $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ *сходится к решению* u *задачи D-A сильно в* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *при* $\varepsilon \searrow 0$. Обоснование этого результата является, за исключением несущественных деталей, стандартным. Оно проводится методом монотонности для решения нелинейных краевых задач, в целом следуя изложению в [3, главы 2 и 3].

4. Свойство равномерной аппроксимации. Конструкция оператора штрафа $\beta_\varepsilon^{(t)}$ содержит в себе следующую особенность: заметно, что дробное выражение в скобках под знаком интеграла в (4) при достаточно малых $\varepsilon > 0$ – это приближенное значение $\mathrm{sign}(\theta)$ в точке $\theta = |\nabla_x \varphi|^p - 1$, не превосходящее по модулю единицы и имеющее знак величины θ. Благодаря этому, удаётся установить интересный результат о равномерной сходимости семейства решений $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ к u, который является вторым основным результатом работы. Сформулируем его ниже в виде теоремы.

Теорема U. (О равномерной сходимости.) *Для любого* $\delta > 0$ *найдутся число* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta) \in (0,1)$ *и замкнутое множество* $\Xi^\delta \subset \Omega$, $meas\ \Xi^\delta > (meas\ \Omega) - \delta$, *такие, что* $u_\varepsilon \in C^{0+\vartheta}(\Xi^\delta)$ $\forall \vartheta \in [0,1)$, $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *и* u_ε *сходится к* u *равномерно в* $C(\Xi^\delta)$ *при* $\varepsilon \searrow 0$.

Работа С.А. Саженкова поддержана Министерством науки и высшего образования РФ (код проекта III.22.4.2) и РФФИ (грант № 18-01-00649).

Библиографический список

1. Sazhenkova T.V. and Sazhenkov S.A. Kaplan's penalty operator in approximation of a diffusion-absorption problem with a one-sided constraint // Siberian Electron. Math. Rep. – 2019. – Vol. 16. – P. 236–248.

2. Саженкова Т.В, Саженков С.А. Аппроксимация решения односторонней задачи анизотропной диффузии-абсорбции // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию: сб. ст. – Вып. 4. / гл.ред. Е.Д. Родионов. Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2018, 15–24.

3. Киндерлерер Д., Стампаккья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. – М.: Мир, 1983.– 256 с.

4. Гроссман К., Каплан А.А. Нелинейное программирование на основе безусловной оптимизации. – Новосибирск: Наука, 1981. – 183 с.

5. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 588 с.

6. Griffin J.D. and Kolda T.G. Nonlinearly constrained optimization using heuristic penalty methods and asynchronous parallel generating set search // Appl. Math. Research eXpress. – 2010. – Vol. 2010(1). – P. 36–62.

7. Kaplan A. and Tichatschke R. Some results about proximal-like methods // In: A. Seeger (Editor), Recent Advances in Optimization. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. – Vol. 563. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2006. – P. 61–86.

УДК 517.95

Задача фильтрации двукомпонентной смеси в тонком пороупругом слое

М.А. Токарева

АлтГУ, г. Барнаул

В качестве приложения теории многокомпонентных течений рассматривается задача фильтрации смеси через деформируемую пористую среду. Данная задача возникает при описании движения лекарств, крови и других физиологических жидкостей в мышечной ткани. Предлагаемая модель основана на уравнениях Маскета – Леверетта и дополняется уравнениями для сжимаемой пористой среды.