Секция 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

УДК 531.3

Одномерное движение под действием потенциальной силы в однородной диссипативной среде с линейным по скорости сопротивлением

А.С. Гришков, А.М. Ерёмин
АГГПУ, г. Бийск

Рассмотрим материальную точку массы m, имеющую одну степень свободы и движущуюся в поле, заданном функцией потенциальной энергии U. Введём одномерною декартову систему координат, обозначим координату точки $\tilde{x}$, тогда $U = U(\tilde{x})$. По условию задачи диссипативная сила является линейной функцией скорости ($f_d = -\alpha\dot{\tilde{x}}$, α – коэффициент сопротивления), поэтому второй закон Ньютона даёт:

$$\ddot{\tilde{x}} + \beta\dot{\tilde{x}} - \frac{1}{m}f(\tilde{x}) = 0. \qquad (1)$$

Здесь $\beta = \frac{\alpha}{m}$, $f(\tilde{x}) = -\frac{dU}{d\tilde{x}}$ – потенциальная сила. Уравнение (1) не содержит в явном виде независимой переменной t, поэтому сделаем подстановку $\dot{\tilde{x}} = \tilde{v}(\tilde{x})$, тогда $\ddot{\tilde{x}} = \frac{d\dot{\tilde{x}}}{dt} = \frac{d\tilde{v}(\tilde{x})}{dt} = \frac{d\tilde{v}(\tilde{x})}{d\tilde{x}}\frac{d\tilde{x}}{dt} = \tilde{v}\frac{d\tilde{v}}{d\tilde{x}} = \tilde{v}\tilde{v}'_{\tilde{x}}$, и уравнение примет вид:

$$\tilde{v}\tilde{v}'_{\tilde{x}} + \beta\tilde{v} = \frac{1}{m}f(\tilde{x}). \qquad (2)$$

Это – дифференциальное уравнение Абеля второго рода, неинтегрируемое при произвольном виде функции $f(\tilde{x})$ [3, с. 37]. Использование уравнений Лагранжа [1, с. 12] с введением диссипативной функции Рэлея [2, с. 16] даёт аналогичные результаты.

В [4] представлен метод, основанный на преобразовании $L \to L_0 e^{\beta t}, p \to p_0 e^{\beta t}$, где L_0 и p_0 – лагранжиан и импульс соответствующей консервативной системы. Далее преобразованием Лежандра находится соответствующий гамильтониан, структура которого при подстановке в уравнение Гамильтона-Якоби позволяет разделить пространственную и временну́ю часть движения [4, с. 326]. Для рассматриваемого случая метод даёт уравнение

$$\frac{1}{2}(Q'_x(\tilde{x},\alpha))^2 + \frac{1}{m}U(\tilde{x}) = \beta Q(\tilde{x},\alpha), \qquad (3)$$

общее решение, которого также неизвестно [4, с. 328]. Но поскольку $Q' = \tilde{v}$, дифференцирование (3) по времени снова приводит к уравнению (1) [4, с. 328].

Поскольку традиционные методы решения приводят к неинтегрируемым уравнениям (2) и (3), представим кинематические характеристики диссипативного движения $\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}$ и $\ddot{\tilde{x}}$ в виде суммы соответствующих характеристик, сообщаемых точке каждой из сил – потенциальной (обозначим их x) и диссипативной (их обозначим ξ и назовём диссипативными поправками). Тогда, учитывая, что векторы сил коллинеарны, можем написать:

$$\ddot{\tilde{x}} = \ddot{x} + \ddot{\xi};\ \dot{\tilde{x}} = \dot{x} + \dot{\xi};\ \tilde{x} = x + \xi\ . \tag{4}$$

Подстановка выражений (4) в уравнение (1) даёт:

$$\ddot{x} + \ddot{\xi} = -\beta\dot{\xi} - \beta\dot{x} + \frac{1}{m}f(x + \xi). \tag{5}$$

Первые два слагаемых в правой части уравнения (5) описывают диссипацию, третье относится к движению под действием потенциальной силы. Левая часть является суммой ускорений потенциальной и диссипативной сил соответственно, поэтому уравнение (5) можно переписать в виде системы:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{1}{m}f(x + \xi) \\ \ddot{\xi} = -\beta\dot{\xi} - \beta\dot{x} \end{cases}. \tag{6}$$

На первом этапе будем считать $f(x + \xi) = f(x)$, т.е. не будем учитывать поправку, вносимую диссипацией в положение тела. Тогда первое уравнение системы (6) будет иметь первый интеграл, выражающий закон сохранения энергии [1, с. 39], откуда получим скорость, сообщаемую точке потенциальной силой:

$$v(x) = \sqrt{\frac{2}{m}\big(E_0 - U(x)\big)}. \tag{7}$$

Здесь E_0 – значение полной энергии в начальный момент времени. Второе уравнение (6) подстановкой $\dot{\xi} = \eta(x)$, $\ddot{\xi} = \frac{d\dot{\xi}}{dt} = \frac{d\eta(x)}{dt} = \frac{d\eta}{dx}\frac{dx}{dt} = v(x)\frac{d\eta}{dx}$ приводится к эквивалентной системе двух уравнений первого порядка, а сама система (6) принимает вид:

$$\begin{cases} v(x) = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E_0 - U(x)\right)} \\ \eta'_x(x) + \frac{\beta}{v(x)}\eta(x) = -\beta. \\ \xi'_x(x)v(x) = \eta(x) \end{cases} \qquad (8)$$

Интегрируя второе уравнение (8), получим выражение для $\eta(x)$:

$$\dot{\xi}(x) = \eta(x) = -\left(\int \beta e^{\beta\int\frac{dx}{v(x)}}dx - C_1\right)e^{-\beta\int\frac{dx}{v(x)}}, \qquad (9)$$

а подставляя (9) в третье уравнение системы и интегрируя повторно, получим выражение для $\xi(x)$:

$$\xi(x) = -\int\left(\int \beta e^{\beta\int\frac{dx}{v(x)}}dx - C_1\right)e^{-\beta\int\frac{dx}{v(x)}}\frac{dx}{v(x)} + C_2. \qquad (10)$$

Подстановка начальных условий ($\dot{\xi}(x_0) = 0, \xi(x_0) = 0$) в (9) и (10) даёт:

$$\begin{cases} \dot{\xi}(x) = -\beta\left(\int_{x_0}^{x} e^{\beta\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{v(x)}}dx\right)e^{-\beta\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{v(x)}} \\ \xi(x) = -\beta\int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{x} e^{\beta\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{v(x)}}dx\right)e^{-\beta\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{v(x)}}\frac{dx}{v(x)} \end{cases}. \qquad (11)$$

Вычисление интегралов (11) приводит к следующим соотношениям для диссипативных поправок:

$$\begin{cases} \dot{\xi}(x) = -v(x) + v_0 e^{-\beta\ (x)} + \frac{1-e^{-\beta\tau(x)}}{\beta\tau(x)}\left(v(x) - v_0\right) \\ \xi(x) = x_0 - x + \frac{v_0}{\beta}\left(1 - e^{-\beta\tau(x)}\right) - \frac{1}{\beta}\left\{\frac{x-x_0}{\tau(x)} - v_0\right\}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!k}\left(\beta\tau(x)\right)^k \end{cases}, \qquad (12)$$

где функция $\tau(x)$ определяется соотношением

$$\tau(x) = \int_{x_0}^{x}\frac{dx}{v(x)} = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{E_0 - U(x)}}. \qquad (13)$$

Скорость и координата диссипативной системы согласно (4) получаются как сумма характеристик консервативного движения и соответствующей диссипативной поправки:

$$\begin{cases} \tilde{v}(x) = v(x) + \dot{\xi}(x) \\ \tilde{x}(x) = x + \xi(x) \end{cases}. \qquad (14)$$

Отметим, что кинематические характеристики диссипативной системы оказались, выражены через координату x соответствующей консервативной системы. Структура поправок (12) содержит скорость и закон движения консервативной системы, взятые с обратным знаком. Таким образом, поправки (12) действуют как операторы, уничтожающие скорость и координату консервативной системы, и отображающие точки координатной оси, имеющие координату x на другие точки той же оси, но имеющие уже новую координату $\tilde{x}$.

Библиографический список

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб. пособие. Т. I. Механика. – 4–е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 216 с.

2. Савельев И.В. Основы теоретической физики. Т. I. Механика и электродинамика. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975. – 416 с.

3. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям: Приложения в механике, точные решения. – М.: Физматлит, 1993. – 464 с.

4. Denman H.H, Buch L.H: Solution of the Hamilton-Jacobi equation for certain dissipative classical mechanical systems // J. Math. Phys. – 1973. – V.14, no 3. – p. 326–329.

УДК 517.95 + 534.12 + 532.5

Математическая модель нестационарных колебаний битого льда в канале

К.Н. Завьялова, К.А. Шишмарев
АлтГУ, г. Барнаул

Рассматривается нестационарная задача об определении прогибов битого льда в прямоугольном канале бесконечной длины под действием движущейся нагрузки. $H -$ глубина канала, $2L -$ ширина канала. Ледовый покров моделируется тонкой упругой пластиной с нулевой жесткостью в рамках линейной теории гидроупругости. Нагрузка движется с постоянной скоростью U, вызывает прогиб битого льда и может создавать нестационарные гидроупругие волны, распространяющиеся от нагрузки. Жидкость в канале невязкая и несжимаемая. Течение, вызванное прогибом битого льда, считается потенциальным. Система уравнений имеет вид

$$Mw_{tt} = p(x,y,0,t) - P(x-Ut) \qquad (-\infty < x < \infty, -L < y < L, z = 0), \qquad (1)$$

$$p(x,y,0,t) = -\rho_l \varphi_t(x,y,0,t) - \rho_l g w(x,y,t) \qquad (-\infty < x < \infty, -L < y < L, z = 0), \qquad (2)$$

$$\nabla^2 \varphi(x,y,z,t) = 0 \ \ (-\infty < x < \infty, -L < y < L, z = 0) \qquad (3)$$

$$\varphi_z = w_t \ \ (z=0), \qquad \varphi_z = 0 \ \ (y = \pm L), \qquad \varphi_z = 0 \ \ (z = -H), \qquad (4)$$

здесь $M -$ единица массы льда на единицу площади, $\rho_l -$ плотность льда. Потенциал скорости течения жидкости затухает в отдалении от нагрузки при конечных временах

$$\varphi \to 0 \ \ (|x| \to \infty, t < \infty), \qquad (5)$$