11. Gorbunov V.A. Covers in lattices of quasivarieties and independent axiomatizability // Algebra and Logic. – 1977. – V. 16, №5. – P. 340–369.

**УДК 512.552**

## Некоторые свойства сжатого графа делителей нуля конечного ассоциотивного кольца

***Е.В. Журавлев, А.С. Монастырева***
*АлтГУ, г. Барнаул*

Все кольца, рассматриваемые в данной работе, являются конечными ассоциативными. Пусть $R$ – кольцо. Для элемента $x \in R$ положим $l(x)=\{a \in R;\ ax=0\}$ и $r(x)=\{a \in R;\ xa=0\}$. Пусть $D(R)$ – множество делителей нуля (односторонних и двусторонних) кольца $R$, J(R) – радикал Джекобсона кольца $R$, $D(R)^*=D(R)\setminus\{0\}$, $Ann(R)= \{a \in R;\ aR=Ra=(0)\}$. Под термином «локальное кольцо» мы понимаем такое конечное кольцо $R$ с единицей, для которого фактор-кольцо $R/J(R)$ является полем.

*Графом делителей нуля $\Gamma(R)$* кольца $R$ называют граф, вершинами которого являются ненулевые делители нуля кольца (односторонние и двусторонние), причем различные две вершины $x, y$ соединяются ребром тогда и только тогда, когда $xy = 0$ или $yx = 0$.

Такие графы были определены Д. Андерсоном, П. Ливингстоном в работе [1]. Одним из направлений исследований в этой области стало описание колец, граф делителей нуля которых удовлетворяет определенному условию. Геометрическое изображение графа делителей нуля для конкретных колец представляется довольно сложным. Поэтому необходимо разбить множество вершин графа на классы эквивалентности, причем так, чтобы не нарушалось представление о строении графа в целом. В работах [2, 3] предложен способ решения этой проблемы для коммутативных колец. В данной работе мы расширили и немного изменили этот подход, распространив его и на некоммутативный случай.

Введем отношение эквивалентности на множестве $D(R)^*$:

$$\text{для любых } x, y \in D(R)^*\ x\sim y \Leftrightarrow l(x)\cup r(x)=l(y) \cup r(y).$$

Отношение ~ является отношением эквивалентности на $D(R)^*$, то есть мы можем рассматривать фактормножество $D(R)^*/\sim$.

Пусть $[x]$ − класс эквивалентности элемента $x \in D(R)^*$. Для любых $a \in [x]$, $b \in [y]$, где $x, y \in D(R)^*$, очевидно, что $ab=0$ или $ba=0$ тогда и только тогда, когда $xy=0$ или $yx=0$.

Пусть $R$ – кольцо, обозначим через $\Gamma_{\sim}(R)$ граф, множеством вершин которого является $\{[x];\ x\in D(R)^*\}$ и две вершины $[x]$, $[y]$ (не обязательно различные) соединяются ребром (или петлей) тогда и только тогда, когда $xy=0$ или $yx=0$.

Граф $\Gamma_{\sim}(R)$ будем называть *сжатым графом делителей нуля* кольца $R$.

Нами доказано, что в графе $\Gamma_{\sim}(R)$ все вершины делятся на два типа. Если $x^2=0$, то $[x]$ – это вершина с петлей. Если $x^2\neq 0$, то $[x]$ – это вершина без петли. Другими словами, если $x^2=0$, то граф делителей нуля класса $[x]$ представляет собой полный граф; если $x^2\neq 0$, то граф делителей нуля класса $[x]$ – это нуль-граф. Зная, сколько элементов содержится в каждом классе $[x]$, мы всегда от сжатого графа делителей нуля можем перейти к обычному графу делителей нуля. Поэтому при изучении свойств сжатого графа делителей нуля $\Gamma_{\sim}(R)$ можно использовать свойства графа $\Gamma(R)$. Более того, в сжатом графе петлей выделены нильпотентные элементы индекса нильпотентности два. Изображение сжатого графа $\Gamma_{\sim}(R)$ более компактно и наглядно. Например, мы можем оценить максимально возможное число элементов в любой системе попарно ортогональных идемпотентов кольца R по его сжатому графу делителей нуля, поскольку очевидно, что идемпотенты порождают классы эквивалентности без петель, причем попарно ортогональные идемпотенты попадают в разные классы, попарно смежные между собой. По сжатому графу делителей нуля кольца легко определить, является ли аннулятор кольца ненулевым, поскольку любой ненулевой элемент аннулятора порождает класс, который смежен в сжатом графе делителей нуля этого кольца со всеми остальными вершинами.

В настоящей работе доказаны следующие основные результаты.

**Теорема 1.** *Пусть $R$ – конечное кольцо. Граф $\Gamma_{\sim}(R)$ имеет порядок один тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

*1) $R$ – нильпотентное кольцо с нулевым умножением;*

*2) $R$ – локальное кольцо, причем $J(R)^2=(0)$.*

**Теорема 2.** *Пусть $A$ – конечномерная коммутативная неразложимая нильпотентная $Z_p$-алгебра ($p$ – простое число). Граф $\Gamma_{\sim}(A)$ состоит из двух смежных вершин, одна из которых – с петлей, а вторая – без петли, тогда и только тогда, когда $Ann(A)=A^2$ и в алгебре $A$ существует базис $a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_t$, такой, что $b_i\in Ann(A)$ для всех $i$ и $a_ia_j\neq 0$ для всех $i,j$.*

**Библиографический список**

1. Anderson D.F., Livingston P.S. The zero-divizor graph of a commutative ring // J. Algebra. – 1999. – V. 217. – P. 434–447.
2. Bloomfield N., Wickham C. Local rings with genus two zero divisor graph // Communication in Algebra. – 2010. – V. 38. – P. 2965–2980.
3. Bloomfield N. The zero divisor graphs of commutative local rings of order $p^4$ and $p^3$ // Communication in Algebra. – 2013. – V. 41. – P. 765–775.

**УДК 512.55**

## О графах делителей нуля конечных коммутативных локальных колец с 4-нильпотентным радикалом

***Е.В. Журавлев, О.А. Филина***
*АлтГУ, г. Барнаул*

Пусть $S$ – коммутативная полугруппа с нулем, $x \in S$,

$$\mathrm{Ann}(x) = \{y \in S \mid xy = 0\}.$$

Введем на $S$ отношение эквивалентности:

$$\forall x, y \in S \quad x \sim y \Leftrightarrow \mathrm{Ann}(x) = \mathrm{Ann}(y).$$

Класс эквивалентности элемента $x \in S$ будем обозначать $[x]$, а соответствующее фактормножество $S/\sim$.

Отношение $\sim$ является конгруэнцией на $S$: для любых $x_1, x_2, y_1, y_2 \in S$ если $x_1 \sim x_2$ и $y_1 \sim y_2$, то $x_1x_2 \sim y_1y_2$. Следовательно, мы можем рассматривать фактормножество $S/\sim$ как полугруппу относительно операции $[x][y] = [xy]$. Графом делителей нуля $\Gamma(S/\sim)$ полугруппы $S/\sim$ будем называть граф, вершинами которого являются элементы $S/\sim$ и две вершины $[x]$, $[y]$ (не обязательно различные) соединяются ребром (или петлей) тогда и только тогда, когда $[x][y] = [0]$ (равносильно $xy = 0$).

Пусть $R$ – конечное коммутативное локальное кольцо с единицей, $J(R)$ и $R^*$ – радикал Джекобсона и группа обратимых элементов кольца $R$ соответственно, $F = R/J(R) = GF(p^r)$ – конечное поле, $F^* = F \setminus \{0\}$. Существуют элементы $m_1, \ldots, m_h \in J(R)$ такие, что кольцо $R$ раскладывается в прямую сумму $F$-модулей (см. [1]):

$$R = F \oplus Fm_1 \oplus \ldots \oplus Fm_h,$$