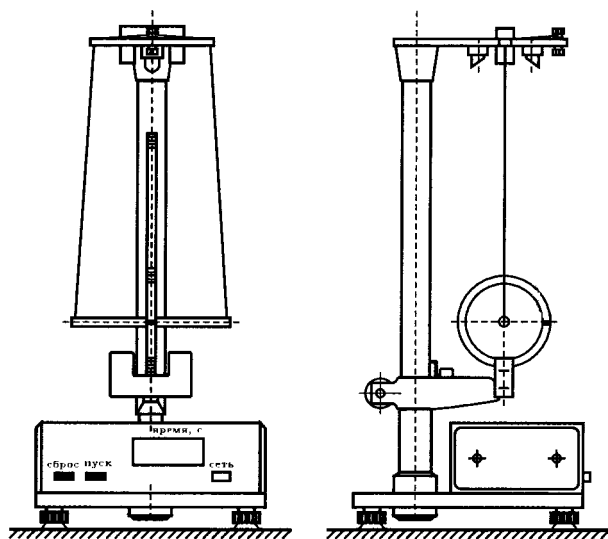


Министерство образования и науки РФ
Алтайский государственный университет

ФИЗИЧЕСКИЙ ПРАКТИКУМ: МЕХАНИКА



Барнаул

Издательство
Алтайского государственного
университета
2014

УДК 53(075.8)+531(075.8)

ББК 22.3я73-5+22.2я73-5

Ф 505

Рецензент

доктор физ.-мат. наук, профессор С. А. Безносюк

Ф 505 **Физический практикум: Механика** [Текст] : учебное пособие / В. В. Мелентьева, А. Г. Тюменцев, Ю. А. Никулина, О. В. Журенкова, Е. Г. Прокопец. — Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2014. — 131 с.

ISBN 978-5-7904-1673-6

Учебное пособие составлено в соответствии с требованиями ФГОС ВПО по направлениям «Физика» и «Радиофизика» и отражает содержание лабораторного практикума по механике, выполняемого студентами физико-технического факультета Алтайского государственного университета. В учебном пособии рассмотрены вопросы теории тех разделов, которые вынесены на лабораторный практикум, приведены описания лабораторных установок, подробные инструкции по выполнению работ, даны рекомендации по обработке результатов экспериментов и представлению отчетов.

УДК 53(075.8)+531(075.8)

ББК 22.3я73-5+22.2я73-5

*Настоящее издание опубликовано в рамках реализации
Программы стратегического развития
Алтайского государственного университета*

ISBN 978-5-7904-1673-6

© Мелентьева В. В., Тюменцев А. Г.,
Никулина Ю. А., Журенкова О. В.,
Прокопец Е. Г., 2014
© Оформление. Издательство
Алтайского государственного
университета, 2014

Оглавление

Математическая обработка результатов измерений и представление экспериментальных данных	6
1. Введение	6
2. Погрешности результатов измерений	6
3. Математическое описание погрешностей прямых измерений	8
4. Надежность результата при наличии случайных погрешностей	10
5. Алгоритм обработки результатов прямых измерений	11
6. Погрешности косвенных измерений	11
7. Графическое представление результатов экспериментов . . .	13
 Освоение методов проведения измерений и расчета их погрешностей	 14
1. Теоретическое введение	14
2. Методика измерений	16
3. Порядок выполнения работы	18
4. Контрольные вопросы	19
 Измерение скорости полета пули с помощью баллистического маятника	 20
1. Теоретическое введение	20
2. Порядок выполнения работы	22
3. Обработка результатов.	23
4. Контрольные вопросы	23
 Движение тела, брошенного под углом к горизонту	 24
1. Теоретическое введение	24
2. Порядок выполнения работы	28
3. Контрольные вопросы	29
 Изучение законов равноускоренного движения.	 30
1. Теоретическое введение	30
2. Методика измерений	34
3. Порядок выполнения работы	35
4. Контрольные вопросы	36

Соударение тел	38
1.Теоретическое введение	38
2.Порядок выполнения работы	42
3.Контрольные вопросы	45
Связанные маятники	46
1.Теоретическое введение	46
2.Описание установки	55
3.Порядок выполнения работы	57
4.Контрольные вопросы	58
Механические колебания	60
1.Теоретическое введение	60
2.Порядок выполнения работы	67
3.Контрольные вопросы	68
Колебания струны	70
1.Теоретическое введение	70
2.Порядок выполнения работы	75
3.Контрольные вопросы	76
Определение ускорения свободного падения методом оборотного маятника	77
1.Теоретическое введение	77
2.Методика измерений.	81
3.Порядок выполнения работы	83
4.Контрольные вопросы	84
Маятник Максвелла	85
1.Теоретическое введение	85
2.Описание установки	89
3.Порядок выполнения работы	90
4.Контрольные вопросы	92
Крутильный маятник	93
1.Теоретическое введение	93
2.Методика измерений	96
3.Порядок выполнения работы	99
4.Контрольные вопросы	101

Маятник Обербека	102
1.Теоретическое введение	102
2.Методика измерений	104
3.Порядок выполнения работы	106
4.Контрольные вопросы.	108
 Баллистический маятник	 109
1.Теоретическое введение	109
2.Методика измерений	111
3.Порядок выполнения работы	115
4.Контрольные вопросы	117
 Изучение трения качения с помощью наклонного маятника	 118
1.Теоретическое введение	118
2.Порядок выполнения работы	123
3.Обработка результатов	124
4.Контрольные вопросы	124
 Гироскоп	 125
1.Теоретическое введение	125
2.Методика измерений.	127
3.Порядок выполнения работы	129
4.Контрольные вопросы	129

Математическая обработка результатов измерений и представление экспериментальных данных

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: *математическая обработка результатов измерений и представление экспериментальных данных.*

ОБОРУДОВАНИЕ: лабораторная установка

1. Введение

Под измерением понимают сравнение измеряемой величины с другой величиной, принятой за единицу измерения (эталон).

Измерения подразделяют на прямые и косвенные.

При прямых измерениях определяемую величину сравнивают с единицей измерения непосредственно или при помощи измерительного прибора, проградуированного в соответствующих единицах.

При косвенных измерениях искомая величина определяется (вычисляется) из результатов прямых измерений других величин, которые связаны с измеряемой величиной определенной функциональной зависимостью.

2. Погрешности результатов измерений

Пусть проведено n измерений. Получены значения $x_1, x_2, \dots, x_n$. Каждое из этих значений определяет величину $x_{\text{ист}}$ (x истинное) с некоторой погрешностью Δx . Это означает, что истинное значение лежит в интервале

$$x_{\text{изм}} - \Delta x \leq x_{\text{ист}} \leq x_{\text{изм}} + \Delta x.$$

Истинное значение физической величины — ее значение, которое идеальным образом отражает в качественном и количественном отношении соответствующее свойство объекта.

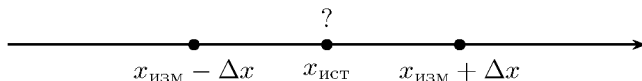


Рис. 1.

Погрешностью измерения называют отклонение результата измерения от истинного значения измеренной величины.

По форме выражения погрешностей измерений различают погрешности *абсолютные* и *относительные*.

Абсолютная погрешность измерения Δx — это погрешность, выражаемая в единицах измеряемой величины.

Относительная погрешность измерения — погрешность, выраженная в долях измеряемой величины

$$\delta = \frac{|x_{\text{изм}} - x_{\text{ист}}|}{x_{\text{ист}}}.$$

Чаще всего относительные погрешности измеряются в процентах.

Существуют также погрешности:

- систематические,
- случайные,
- промахи.

Систематической называют погрешность, которая остается постоянной от эксперимента к эксперименту. Такие погрешности возникают в результате конструктивных особенностей приборов, неточностей метода исследования, а также при применении для вычислений неточных формул, округленных констант. Систематические погрешности либо увеличивают, либо уменьшают результаты измерения, т. е. характеризуются постоянством знака.

Случайные погрешности — ошибки, меняющиеся от эксперимента к эксперименту, зависящие от действия случайных причин. При многократных измерениях они подчиняются статистическим законам, и их влияние на результаты измерений можно учесть или значительно уменьшить.

Промахи или грубые погрешности — чрезмерно большие ошибки, явно искажающие результат измерения. Этот класс погрешностей вызван чаще всего неправильными действиями наблюдателя. Такие измерения следует отбрасывать.

Погрешности измерений характеризуют несовершенство измерений. Позитивной характеристикой измерений является их *точность*.

Под *точностью* понимается качество измерений, отражающее близость их результатов к истинному значению измеряемой величины. Измерение тем более точно, чем меньше его погрешность. Точность качественно

характеризуют числом, равным обратному значению относительной погрешности, выраженной в долях измеряемой величины. Так, например, если относительная погрешность составляет $2 \cdot 10^{-3} \% = 2 \cdot 10^{-5}$, то точность этого измерения будет $5 \cdot 10^4$.

3. Математическое описание погрешностей прямых измерений

Пусть при измерении физической величины x в одинаковых условиях получили некоторые значения: $x_1, x_2, \dots, x_n$ (n — число измерений). Это означает, что измеряемая величина x имеет случайный (статистический) характер. Вместе с тем, поскольку любое измерение проводится опосредованно, т.е. с помощью приборов, в эксперименте всегда есть систематическая погрешность.

Наилучшей оценкой $x_{\text{ист}}$ является среднее арифметическое найденных значений x_i :

$$x_{\text{ист}} \approx \bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}. \quad (1)$$

Для оценки *систематической погрешности* чаще всего используют класс точности прибора (приведенную погрешность) $E_{\text{п}}$.

Приведенная погрешность — это отношение абсолютной погрешности Δx к предельному значению x измеряемой величины (т. е. к наибольшему ее значению, которое может быть измерено по шкале прибора).

Приведенная погрешность выражается в процентах:

$$E_{\text{п}} = \left| \frac{\Delta x}{x} \right| \cdot 100\%.$$

По приведенной погрешности приборы разделяют на семь классов: 0, 1; 0, 2; 0, 5; 1, 0; 1, 5; 2, 5; 4.

Приборы класса точности 0, 1; 0, 2; 0, 5 применяют для лабораторных измерений и называют *прецизионными*.

В технике применяют приборы классов 1; 1, 5; 2, 5 и 4 (*технические*).

Класс точности прибора указывают на шкале прибора. Если на шкале такого обозначения нет, то данный прибор *внеклассный*, т. е. его приведенная погрешность более 4%.

Завод, выпускающий прибор, гарантирует относительную погрешность измерения данным прибором, равную классу точности (приведенной погрешности) прибора при измерении величины, дающей отброс

указателя на всю шкалу. Определив по шкале прибора класс точности и предельное значение, легко рассчитать его абсолютную погрешность

$$\Delta x = \pm |E_n/100| x,$$

которую принимают одинаковой на всей шкале прибора. Знаки $<+>$ и $<->$ означают, что погрешность может быть допущена как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения от действительного значения измеряемой величины.

Правда, при использовании прибора для конкретных измерений редко бывает так, чтобы измеряемая величина давала отброс на всю шкалу. Как правило, измеряемая величина меньше. Это увеличивает относительную погрешность измерения.

Для оптимального использования приборов их (или соответствующую шкалу измерений) подбирают так, чтобы значение измеряемой величины попадало в конец шкалы прибора, это уменьшит относительную погрешность измерения и приблизит ее к классу точности прибора.

В тех случаях, когда на приборе класс точности не указан, абсолютная погрешность принимается равной половине цены наименьшего деления.

Так, при измерении линейкой, наименьшее деление которой 1 мм, допускается погрешность до 0,5 мм.

Для приборов, оснащенных нониусом, за приборную погрешность принимают погрешность, определяемую нониусом (для штангенциркуля — 0,1 мм или 0,05 мм, для микрометра — 0,01 мм или 0,001 мм).

При многократных измерениях погрешность Δx , определяемая по классу точности прибора или как половина цены наименьшего деления шкалы прибора, является систематической погрешностью измерений $\Delta x_{\text{сист.}}$.

Случайная погрешность вычисляется по формуле:

$$\Delta x_{\text{сл}} = \sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}, \quad (2)$$

где $\bar{x}$ находят из соотношения (1), а $n \geq 2$.

Для оценки полной погрешности Δx необходимо знать и $\Delta x_{\text{сл}}$, и $\Delta x_{\text{сист.}}$. Тогда

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta x_{\text{сл}})^2 + (\Delta x_{\text{сист.}})^2}. \quad (3)$$

и результат измерений записывают в виде

$$x = \bar{x} \pm \Delta x, \quad (4)$$

где x и Δx определяются соотношениями (1) и (10).

Замечание: $\bar{x}$ и Δx должны содержать одинаковое количество десятичных знаков, определяемое чаще всего по систематической погрешности измерений. Например, запись $x = 5,6184 \pm 0,7$ некорректна. *Правильно:* $x = 5,6 \pm 0,7$.

4. Надежность результата при наличии случайных погрешностей

Пусть по результатам серии измерений получено некоторое значение $x = \bar{x} \pm \Delta x$. Это означает, что x попадает в некоторый интервал значений $x - \Delta x, x + \Delta x$.

Доверительным интервалом называют интервал $(\bar{x} - \Delta x, \bar{x} + \Delta x)$, в который по определению попадает истинное значение x измеряемой величины с заданной вероятностью.

За *стандартный* принимают интервал $[\pm S_x]$, где

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}. \quad (5)$$

Стандартный доверительный интервал определяет *случайную погрешность*

$$S_x = \sigma = \Delta x_{\text{сл.}}$$

Надежностью результата серии измерений называют вероятность α то-

Таблица 1

Коэффициенты Стьюдента $t(\alpha, n)$

Число измерений	Надежность							
	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,999
2	1,00	1,38	2,0	3,1	6,3	12,7	31,8	636,6
3	0,82	1,06	1,3	1,9	2,9	4,3	7,0	31,6
4	0,77	0,98	1,3	1,6	2,4	3,2	4,5	12,9
5	0,74	0,94	1,2	1,5	2,1	2,8	3,7	8,6
6	0,73	0,92	1,2	1,5	2,0	2,6	3,4	6,9
7	0,72	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	6,0
8	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	5,4
9	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,3	2,9	5,0
10	0,70	0,88	1,1	1,4	1,8	2,3	2,8	4,8
15	0,69	0,87	1,1	1,3	1,8	2,1	2,6	4,1
20	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	3,9
40	0,68	0,85	1,1	1,2	1,7	2,0	2,4	3,6
60	0,68	0,85	1,0	1,3	1,7	2,0	2,4	3,5
120	0,68	0,85	1,0	1,3	1,7	2,0	2,4	3,4
∞	0,67	0,84	1,0	1,3	1,6	2,0	2,3	3,3

го, что истинное значение x измеряемой величины попадает в данный доверительный интервал (α выражается или в долях единицы, или в процентах).

Существуют специальные таблицы коэффициентов Стьюдента $t(\alpha, n)$, по которым можно определить, во сколько раз нужно увеличить *стандартный доверительный интервал* $[\pm S_x]$, чтобы при определенном числе измерений n получить заданную надежность α (см. таб. 1).

Используя таблицу коэффициентов Стьюдента, часто решают и обратную задачу: по известной абсолютной погрешности измерительного прибора и заданной величине надежности определяют необходимое число измерений в серии.

5. Алгоритм обработки результатов прямых измерений

- выполняют n измерений и записывают их результаты в таблицу;
- вычисляют по формуле (1) $\bar{x}$;
- по формуле (9) вычисляют $\Delta x_{\text{сл}}$ и находят по таблице 1 коэффициенты Стьюдента $t(\alpha, n)$ в зависимости от заданной надежности α и числа измерений n ;
- находят $\Delta x_{\text{сист}}$;
- результат записывают в виде

$$x = \bar{x} \pm \Delta x, \quad (6)$$

где $\Delta x = \sqrt{x_{\text{сл}}^2 + (t\sigma)^2}$, ($\sigma = \Delta x_{\text{сист}}$);

- находят δ_x .

6. Погрешности косвенных измерений

Как быть, если x определяется не прямым измерением, а косвенным, т. е. по результатам измерений других величин y и z ? Пусть x является некоторой функцией y и z , т. е.

$$x = f(y, z).$$

Тогда наилучшее значение при оценке x равно

$$\bar{x} = f(\bar{y}, \bar{z}), \quad (7)$$

где $\bar{y}$ и $\bar{z}$ находятся по формуле (1). Как найти Δx , если известны Δy и Δz ? Так как сами величины y и z находятся путем прямых измерений, то их

погрешности Δy и Δz можно оценить по формулам (9) и (10). Заметим, прежде всего, что $\Delta x = x - \bar{x}$, следовательно, простой оценкой для Δx является разность

$$\Delta x = f(\bar{y} + \Delta y, \bar{z} + \Delta z) - f(\bar{y}, \bar{z}) \approx \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z, \quad (8)$$

т. е. ошибка косвенного измерения находится через ошибки прямых измерений по правилу дифференцирования. Часто этой оценки оказывается достаточно. Более точным является следующее выражение:

$$\Delta x = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \Delta y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \Delta z^2}, \quad (9)$$

где $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial f}{\partial z}$ — частные производные по y и z , взятые при значениях $y = \bar{y}$, $z = \bar{z}$.

Удобно выражать точность, с которой найдено x , через *относительную погрешность* δ_x . По определению,

$$\delta_x = \frac{\Delta x}{\bar{x}}, \quad (10)$$

где $\bar{x}$ — рассчитывают по формуле (1), а Δx по формуле (10). Относительная погрешность, очевидно, является безразмерной величиной.

Заметим, что исходя из определения относительной погрешности результат измерений величины x можно записать в виде

$$x = \bar{x}(1 + \delta_x), \quad \text{так как} \quad x = \bar{x} \pm \Delta x = \bar{x}\left(1 + \frac{\Delta x}{\bar{x}}\right).$$

Рассмотрим практически важный случай, когда x является степенной функцией y и z :

$$x = f(y, z) = y^m z^n, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = m y^{m-1} z^n, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = n y^m z^{n-1}$$

(m и n могут быть целыми или дробными, больше или меньше нуля).

Относительная погрешность равна

$$\delta_x = \frac{\Delta x}{\bar{x}} = \sqrt{m^2 \delta_y^2 + n^2 \delta_z^2}. \quad (11)$$

Из соотношения (26) следует важный вывод: *при измерениях необходимо наиболее точно определить значение величины, входящей в расчетную формулу с наибольшим по модулю показателем степени.*

7. Графическое представление результатов экспериментов

В большинстве случаев экспериментального изучения различных физических явлений целесообразно представить полученные зависимости в виде графика.

Как оценить, согласуются ли результаты опыта с ожидаемой величиной, получаемой из зависимости между измеряемыми величинами? Наглядное представление об этом получают, сопоставляя теоретическую кривую и найденные экспериментально точки. Особенно удобно проверить, ложатся ли данные точки на прямую. Поэтому *при построении графиков желательно выбирать такие координаты, чтобы ожидаемая зависимость была линейной.*

Например, при определении ускорения свободного падения из соотношения $h = gt^2$ между высотой и временем падения удобно строить график координатах (t^2, h) . Тогда $g = 2 \operatorname{tg} \alpha$, т. е. определяется по всей совокупности результатов измерений t и h [по наклону прямой $h(t^2)$].

Экспериментальные точки на графике представляют в виде крестиков, размах по высоте и ширине которых равен удвоенным погрешностям измерения, отложенных по осям величин.

Список литературы

- [1] С. Э. Хайкин. Физические основы механики. М.: Наука, 1971, 752 с.
- [2] И. В. Савельев. Курс физики.— Т.I — М.: Наука, 1989.
- [3] Д. В. Сивухин. Общий курс физики.— Т.I. Механика. — М.: Наука, 1989.
- [4] С. П. Стрелков. Механика. М.: Наука, 1975, 560 с.
- [5] С. Г. Каленков, Г. И. Соломахо Механика. Практикум по физике. М.: Высш. шк., 1990.—111 с.

Освоение методов проведения измерений и расчета их погрешностей

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: *ознакомление с методами оценки результатов измерений и расчета погрешностей.*

ОБОРУДОВАНИЕ: установка для определения удельного сопротивления проволоки, штангенциркуль, микрометр.

1. Теоретическое введение

Электрическое сопротивление участка проводника

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

где R — сопротивление отрезка проволоки, l — его длина, S — площадь поперечного сечения, ρ — удельное сопротивление материала проволоки. Отсюда

$$\rho = R \frac{S}{l}, \quad (1)$$

или

$$\rho = \frac{U}{I} \frac{\pi d^2}{4l}. \quad (2)$$

Чтобы определить ρ , необходимо измерить электрическое сопротивление R отрезка проволоки, длину отрезка l и определить площадь его сечения S . Для измерения сопротивления собирают простейшую электрическую цепь (рис. 1).

Участок цепи AB — отрезок проволоки, E — источник тока, A — амперметр, V — вольтметр.

Диаметр d проволоки можно измерить штангенциркулем или микрометром. Если диаметр проволоки измерять штангенциркулем в различных местах, то скорее всего окажется, что результат везде одинаков. Штангенциркуль не "почувствует", что толщина проволоки неодинакова по всей ее длине. В этом случае точность измерений штангенциркулем, а это обычно 0,1 мм, и определяет погрешность измерения диаметра, т. е. $\Delta d = 0,1$ мм. Микрометр — более чувствительный и более точный прибор, чем штангенциркуль. Если измерить диаметр проволоки в различных местах микрометром, то можно получить серию результатов: $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$, где d_1 — результат первого измерения, d_2 — второго и т. д. В этом случае погреш-

ность определяется уже и характером самой величины d . Диаметр проволоки есть случайная величина, она варьирует около некоторого среднего значения

$$\bar{d} = \frac{1}{n} (d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_n), \quad (3)$$

где n – число измерений.

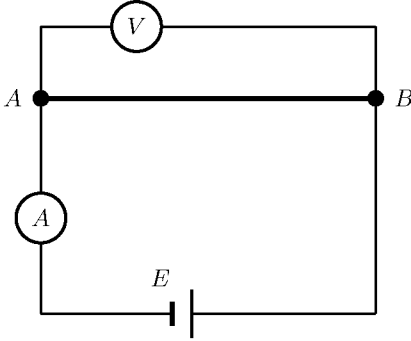


Рис. 1.

Абсолютная погрешность Δd рассчитывается по формуле

$$\Delta d = \sqrt{(\Delta d_{\text{сист}})^2 + (t\sigma)^2} \quad (4)$$

где $\Delta d_{\text{сист}}$ – систематическая погрешность измерительного прибора; t – коэффициент Стюдента для n измерений и задаваемой вами надежности α ,

$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2}{n(n-1)}}$ – случайная погрешность измерений.

Истинное значение диаметра лежит в интервале

$$\bar{d} - \Delta d \leq d \leq \bar{d} + \Delta d \quad \text{или} \quad d = \bar{d} \pm \Delta d.$$

Пусть, например, $\bar{d} = 0,5$ мм, а $\Delta d = 0,01$ мм. Тогда результат измерений

$$d = \bar{d} \pm \Delta d = (0,50 \pm 0,01) \text{ мм}.$$

В этой работе в результате прямых измерений мы должны получить значения диаметра проволоки d , длины проволоки l , напряжения U и силы тока I . Для каждой из этих величин необходимо определить абсолютную погрешность аналогично (4). В случае единичного измерения абсолютная погрешность будет равна систематической.

Результатом косвенных измерений является удельное сопротивление ρ , рассчитываемое по формуле (2)

$$\rho = \frac{U}{I} \frac{\pi d^2}{4l}.$$

Для нахождения абсолютной погрешности косвенных измерений $\Delta \rho$ используем формулу:

$$\Delta \rho = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial I} \Delta I\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial U} \Delta U\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial d} \Delta d\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial l} \Delta l\right)^2}$$

Взяв частные производные от ρ по U , I , l и d , получим

$$\Delta\rho = \rho \sqrt{\left(\frac{\Delta I}{I}\right)^2 + \left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2}. \quad (5)$$

Относительная погрешность измерений ρ

$$\delta_\rho = \frac{\Delta\rho}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{\Delta I}{I}\right)^2 + \left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2}. \quad (6)$$

В рассматриваемом выше примере нам известны относительные погрешности всех величин, входящих в формулу (6):

$$\Delta U / \bar{U} = 5 \cdot 10^{-2}, \quad \Delta I / \bar{I} = 5 \cdot 10^{-2},$$

$$\Delta l / \bar{l} = 1 \cdot 10^{-3}, \quad \Delta d / \bar{d} = 2 \cdot 10^{-2}.$$

Видно, что наибольший вклад вносят погрешности измерения U , I , и d , поэтому относительная погрешность измерения оказывается равной $\delta_\rho = 7,1 \cdot 10^{-2} \simeq 10^{-1}$.

Значение ρ мы уже вычисляли по формуле (2) и получили, что $\bar{\rho} = 4,9087384 \cdot 10^{-6}$ Ом·м. Поскольку $\Delta\rho = \delta_\rho \cdot \bar{\rho} \simeq 10^{-1} \cdot \bar{\rho} \simeq 0,5 \cdot 10^{-6}$, то нужно взять $\bar{\rho} \simeq 4,9 \cdot 10^{-6}$ Ом·м и записать полученный результат следующим образом:

$$\rho = (4,9 \pm 0,5) \cdot 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{м}.$$

2. Методика измерений

Проверим, выполняется ли в условиях опыта соотношение (1), устанавливающее зависимость между сопротивлением R проволоки, ее длиной l и удельным сопротивлением ρ , т. е.: 1) является ли площадь сечения S одинаковой по всей длине проволоки ($S = const$); 2) однородна ли проволока по составу по всей длине ($\rho = const$).

Для проволоки круглого сечения, имеющей диаметр d , площадь сечения $S = \pi d^2/4$. Постоянство диаметра по длине проволоки (точнее малость его отклонения от $\bar{d}$ легко проверить: нужно измерить микрометром величину d в достаточно большом числе точек вдоль всей длины проволоки. Практически оказывается, что измеренные значения $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$ немного отличаются друг от друга. Поэтому результат измерений следует записать в виде

$$d = \bar{d} \pm \Delta d,$$

где $\bar{d}$ и Δd находятся по формулам (3) и (4).

Если установлено, что диаметр проволоки всюду одинаков, то и

$$S = \pi d^2/4 = \text{const.}$$

После этого легко проверить, выполняется ли условие постоянства ρ по всей длине проволоки. Действительно, если S и ρ — постоянные величины, то и их отношение $\rho/S = \text{const}$, т. е.

$$R = \frac{\rho}{S} l = \text{const} \cdot l. \quad (7)$$

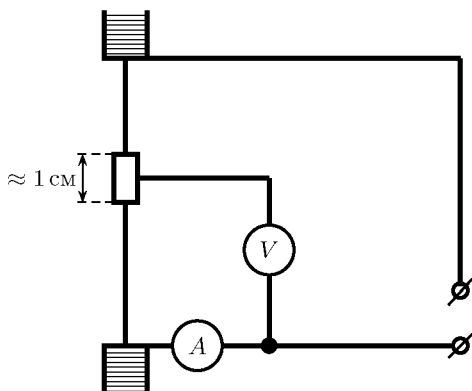


Рис. 2.

Таким образом, сопротивление участка проволоки должно быть прямо пропорциональным его длине l .

Для экспериментального определения зависимости R от l измеряют величину сопротивления проволоки при различных значениях l , и по результатам измерений строят график зависимости R от l . Абсолютную погрешность измерений R находят как погрешность косвенных измерений. Так как

$$R = \frac{U}{I}, \text{ то}$$

$$\Delta R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial U} \Delta U\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial I} \Delta I\right)^2},$$

после вычисления частных производных по I и U , получим:

$$\Delta R = R \sqrt{\left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2 + \left(\frac{\Delta I}{I}\right)^2}.$$

Если в пределах точности измерений найденные экспериментальные точки "ложатся" на прямую, то это подтверждает справедливость соотношения (9). Тогда для определения ρ можно пользоваться формулой (1).

Вычисление абсолютной погрешности $\Delta \rho$ проводится по формуле (5). Выясним, когда эта погрешность будет минимальной, а значит, точность определения ρ наилучшей. Для этого нужно, чтобы каждое слагаемое в правой части было как можно меньше.

Погрешности ΔU , ΔI , Δl , Δd определяются в основном точностью самих измерительных приборов. Чтобы уменьшить погрешность $\Delta\rho/\rho$, пользуясь имеющимися амперметром, вольтметром и микрометром, нужно проводить измерения при наибольших возможных значениях U , I , и l . Практически это значит, что определять ρ нужно, проводя измерения на максимальной длине проволоки. Тогда не только l , но и U будет максимальным, а погрешность $\Delta\rho/\rho$ — наименьшей.

Проведем оценку погрешности $\Delta\rho/\rho$ для двух различных значений длины l . Возьмем длину $l = 50$ см и напряжение $U = 1$ В. Подвижный контакт на установке имеет ширину около 1 см (рис. 2), поэтому $\Delta l = 0,5$ см больше половины цены деления шкалы линейки и $\Delta l/l = 1 \cdot 10^{-2}$. ΔU равна половине цены деления шкалы вольтметра. Одному вольту соответствует 20 делений шкалы, поэтому $\Delta U/U = 0,5/20 = 2,5 \cdot 10^{-2}$. Таким образом, сумма этих погрешностей равна $3,5 \cdot 10^{-2}$. Нетрудно подсчитать, что при $l = 10$ см каждая из этих погрешностей увеличится в 5 раз, а их сумма будет равна уже $17,5 \cdot 10^{-2}$. Учитывая погрешности измерений силы тока I и диаметра d проволоки, получаем в первом случае ($l = 50$ см) $\Delta\rho/\rho \approx 10^{-1}$, т. е. 10%, тогда как во втором случае ($l = 10$ см) $\Delta\rho/\rho$ оказывается уже около 25%.

3. Порядок выполнения работы

1. Определите с помощью штангенциркуля и микрометра диаметр d проволоки по всей ее длине в 5–6 точках. Результаты занесите в таблицу. Определите среднее значение диаметра и запишите результат в виде

$$d = \bar{d} \pm \Delta d.$$

	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	$\bar{d}$	$\Delta d_{\text{сист}}$	σ	Δd	δ
штангенциркуль										
микрометр										

2. Определите экспериментально зависимость сопротивления R проволоки от ее длины l . Измерения проведите для десяти значений длины l_i от $l \approx 0,3l_0$ до $l = l_0$, где l_0 — полная длина проволоки. Результаты измерений запишите в таблицу.

№ опыта	l	Δl	U	ΔU	I	ΔI	R	ΔR	ρ	$\Delta\rho$
1										
2										

3. Экспериментальные точки нанесите на координатную плоскость, откладывая по оси X величину l , а по оси Y — соответствующее ей сопротивление $R = U/I$ (рис. 3).

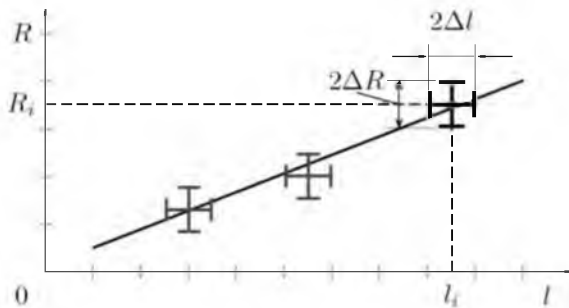


Рис. 3.

Каждую экспериментальную точку следует изображать с указанием погрешностей Δl и ΔR , т. е. в виде пересечения двух отрезков: вдоль оси X длиной $2\Delta l$ с центром в точке $l = l_i$ и вдоль оси Y длиной $2\Delta R$ с центром в точке $R = R_i$. Убедитесь в том, что в пределах точности измерений экспериментальные точки ложатся на прямую, как это показано, например, на рис. 3.

4. Контрольные вопросы

1. Дайте определение случайной и систематической погрешностей.
2. Имеется цилиндр радиусом R и длиной l . При измерении штангенциркулем оказалось, что $R = 55,3$ мм, $l = 63,5$ мм. Оцените относительную погрешность измерений объема цилиндра.
3. Получите выражение для δ_ρ .

Список литературы

- [1] С. Г. Каленков, Г. И. Соломахо Механика. Практикум по физике. М.: Высш. шк., 1990.—111 с.
- [2] О. Н. Кассандрова, В. В. Лебедев Обработка результатов наблюдений. — М.: Наука, 1970.
- [3] Под ред. Л. Л. Гольдина. Руководство к лабораторным занятиям по физике. — М.: Наука, 1973.
- [4] А. А. Детлаф, Б. М. Яворский Курс физики. — М. 1989.

Измерение скорости полета пули с помощью баллистического маятника

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:	<i>ознакомиться с использованием законов сохранения.</i>
ОБОРУДОВАНИЕ:	баллистический маятник, пружинный пистолет со снарядом, сантиметровая лента.

1. Теоретическое введение

Установка состоит из штатива, на котором подвешен цилиндр (маятник), и пружинного пистолета. Необходимо определить скорость снаряда. Судить о скорости снаряда можно по высоте подъема маятника.

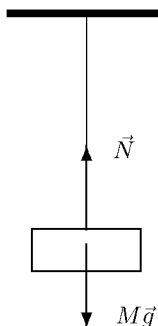


Рис. 1.

Рассмотрим картину процесса. Когда мы оттягиваем пружину, совершаемая работа переходит в потенциальную энергию пружины. При выстреле большая часть потенциальной энергии пружины переходит в кинетическую энергию снаряда:

$$E = \frac{mv^2}{2}, \quad (1)$$

где m — масса снаряда, v — скорость снаряда в момент выстрела.

Выстрел производится примерно горизонтально, и скорость снаряда $\vec{v}$ направлена горизонтально. Во время полета, до попадания в маятник, на пулю действует только сила тяжести (трением о воздух пренебрегаем). Она сообщает пуле составляющую скорости по вертикали

$$v_y = gt, \quad (2)$$

где t — время полета пули от пистолета до маятника. Вертикальная скорость $v_y \ll v$, мы ею пренебрегаем. Считаем, что пуля подлетает к маятнику со скоростью $\vec{v}$, которая была при выстреле. При ударе о маятник часть ее кинетической энергии переходит в тепло. Другая часть передается в виде кинетической энергии маятнику. В результате маятник и застрявшая в нем пуля начинают двигаться вместе с некоторой скоростью

Таким образом, горизонтальная составляющая импульса системы "пуля плюс маятник" до удара $m\vec{v}$. Изменится ли она при ударе? Для того,

чтобы горизонтальная составляющая импульса системы изменилась, нужно, чтобы на систему действовали внешние горизонтальные силы. Внешние силы в нашем случае — это сила тяжести и сила натяжения нити. Пока маятник висит вертикально, эти силы направлены вертикально (см. рис. 1) и на горизонтальную часть импульса системы не влияют. Определим эту скорость. Для этого рассмотрим систему, состоящую из пули и маятника. Импульс пули при выстреле $m\vec{v}$ направлен горизонтально. Импульс маятника до удара в него пули равен нулю.

При ударе пули о маятник, когда пуля тормозится в поролоне маятника, система начинает отклоняться от вертикали. При этом возникает горизонтальная составляющая силы натяжения $\vec{N}$. (см. рис. 2). Угол отклонения системы от вертикали α мал. Время торможения пули в поролоне маятника мало, а, следовательно, и импульс горизонтальной составляющей силы натяжения мал, тогда можно пренебречь изменением горизонтальной составляющей импульса системы "пуля плюс маятник". Другими словами, пуля и маятник испытывают практически абсолютно неупругий удар, при котором импульс системы сохраняется, но не сохраняется кинетическая энергия. $\vec{v}'$.

После того, как пуля застряла в поролоне маятника, импульс системы выражается как $(m + M)\vec{v}'$. Так как импульс системы не меняется, то ее конечный импульс равен первоначальному, т. е.

$$m\vec{v} = (m + M)\vec{v}'. \quad (3)$$

Из (3) видно, что для определения v нужно знать v' . Массы легко определить взвешиванием. Как узнать v' ? Наша система сразу после удара имеет кинетическую энергию

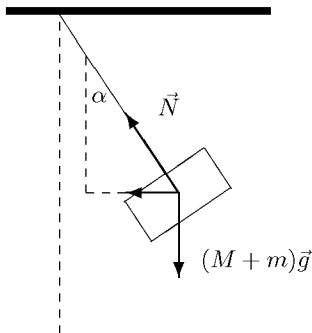


Рис. 2.

$$E = \frac{(m + M)(v')^2}{2}. \quad (4)$$

Маятник движется в поле тяжести, кинетическая энергия его переходит в потенциальную энергию взаимодействия маятника с Землей. В точке максимального отклонения вся кинетическая энергия перейдет в потенциальную энергию полностью, без потерь, так как трение в подвесе, в нитях, о воздух пренебрежимо мало (см. рис. 3).

Таким образом, $E = U = (m + M)gh$. Тогда

$$\frac{(m + M)(v')^2}{2} = (m + M)gh. \quad (5)$$

Отсюда можно найти v' , зная h , а затем из (3) — v . В работе удобно измерять не h , а α . Из рис. 3 видно, что

$$h = l - \sqrt{l^2 - s^2} = l - l\sqrt{1 - \frac{s^2}{l^2}} \quad (6)$$

Если $s \ll l$, то приближенно $\sqrt{1 - \frac{s^2}{l^2}} \simeq 1 - \frac{s^2}{2l^2}$. Здесь использована формула из математического анализа $\sqrt{1-x} \approx 1 - x/2$ при $x \ll 1$. Тогда

$$h = l - l\left(1 - \frac{s^2}{2l^2}\right) = \frac{l}{2} \sin^2 \alpha \simeq \frac{l}{2} \alpha^2. \quad (7)$$

Подставляя h из (7) в (5), имеем $\frac{(m+M)(v')^2}{2} = (m+M)g\frac{l}{2}\alpha^2$. (8)

Отсюда можно найти v' , затем из формулы (3) — v .

$$v = \frac{m+M}{m} \alpha \sqrt{gl}, \quad (9)$$

где α измеряется в радианах. Это и есть искомая формула. Проследим кратко еще раз логику ее вывода. Мы можем измерить высоту подъема маятника h , она определяется энергией, переданной пулей при ударе. При ударе не вся кинетическая энергия пули передается маятнику, а только часть. Эту часть мы нашли, используя закон сохранения горизонтальной компоненты импульса, который справедлив, так как нет внешних горизонтальных сил.

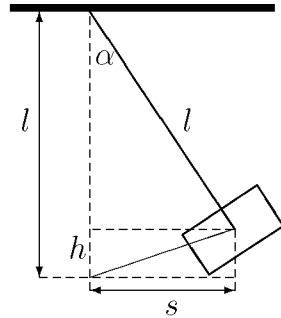


Рис. 3.

2. Порядок выполнения работы

1. Взвесьте снаряд и найдите его массу.
2. Отрегулируйте положение пистолета и маятника так, чтобы ось цилиндра маятника и ствола пистолета составляли одну прямую. Измерьте длину подвеса l от плоскости подвеса до оси маятника. Результаты измерений занесите в таблицу.

масса пули	масса маятника	длина подвеса
$m =$	$M =$	$l =$

3. Произведите не менее десяти выстрелов. Отсчет снимается по указателю и транспортиру. Смотреть при этом нужно так, чтобы луч зрения был перпендикулярен плоскости транспортира. Результаты занесите в таблицу.

N	горизонтальное отклонение α	среднее отклонение $\bar{\alpha}$	скорость v	погрешность Δv
1				

3. Обработка результатов.

1. Определите $\Delta\alpha$, Δl и Δt как ошибки прямых измерений.
2. По среднему горизонтальному отклонению $\bar{\alpha}$ из формулы (9) вычислите v .
3. Найдите ошибку определения скорости, как погрешность косвенных измерений.

4. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте закон сохранения количества движения (импульса) и обсудите допустимость его использования в работе.
2. Сформулируйте закон сохранения энергии и обсудите допустимость его использования в работе.
3. Что такое потенциальные силы, потенциальная энергия? Приведите пример потенциальной энергии и докажите ее потенциальность.
4. Обсудите точность, с которой можно измерять различные величины в работе.
5. Как изменится теоретическая часть работы при упругом ударе шарика о маятник?
6. Какой вклад в изменение кинетической энергии дает сила натяжения нити?

Список литературы

- [1] *С. Э. Хайкин.* Физические основы механики. М.: Наука, 1971, 752 с.
- [2] *С. П. Стрелков.* Механика. М.: Наука, 1975, 560 с.
- [3] *Л. И. Иверонова.* Механика и молекулярная физика. Лабораторный практикум. М.: Наука, 1976.

Движение тела, брошенного под углом к горизонту

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: *изучить кинематику равнопеременного движения.*

ОБОРУДОВАНИЕ: пистолет на штативе, сантиметровая лента, пружина, пуля, набор грузов.

1. Теоретическое введение

Изучение кинематики равномерного и равнопеременного движений проводится в работе на примере исследования полета пули в поле тяжести. Чтобы узнать, как будет двигаться пуля после выстрела, нужно решить две задачи.

1. Определить скорость, сообщаемую пуле пружиной.

2. Зная величину скорости пули и угол, под которым вылетает пуля, т. е. направление скорости и координаты точки вылета, найти координаты точки, в которой находится пуля в любой момент времени, и, в частности, координаты точки падения пули.

1. Первая задача может быть решена разными способами. Один из них такой. При зарядке пистолета, сжимая пружину на величину l , мы совершаем работу против сил упругости. Сжатая пружина обладает потенциальной энергией.

$$U = \frac{k l^2}{2}, \quad (1)$$

где k — коэффициент упругости пружины.

При выстреле эта энергия переходит в кинетическую энергию пули. Если потери энергии на трение небольшие, то можно считать, что приближенно выполняется закон сохранения механической энергии. Тогда при выстреле потенциальная энергия пружины (1) переходит в кинетическую энергию пули:

$$T = \frac{m v_0^2}{2}, \quad (2)$$

где v_0 — скорость пули в момент выстрела. Следовательно,

$$v_0 = l \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (3)$$

Для отыскания начальной скорости пули нужно знать l , m и k . Длину l легко измерить, масса пули определяется взвешиванием.

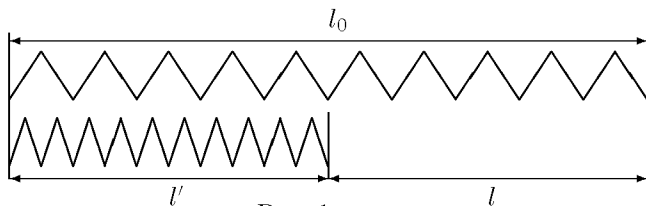


Рис. 1.

Чтобы найти коэффициент упругости, воспользуемся набором грузов. Под действием веса груза пружина сжимается на Δx . На груз действуют две силы: сила тяжести $F = mg$ и сила упругости пружины $F = -k \Delta x$. Поскольку груз находится в равновесии, равнодействующая сил приложенных к нему равна нулю

$$Mg - k \Delta x = 0.$$

Тогда

$$k = \frac{Mg}{\Delta x}. \quad (4)$$

Теперь можно найти v_0 по формуле (3).

2. Найти, где будет находиться пуля в произвольный момент времени, и куда она упадет.

Для решения этой задачи рассмотрим силы, действующие на пулю во время полета. На пулю действует сила тяжести и сила сопротивления воздуха. Силой сопротивления воздуха будем пренебрегать. Зная силу тяжести, можно найти ускорение пули из второго закона Ньютона, по ускорению определить скорость, по скорости — перемещение.

Второй закон Ньютона справедлив для материальной точки. Пуля имеет конечные размеры. Но, если нас интересуют ее координаты с точностью до ее размеров, пулю можно считать материальной точкой. При этом мы пренебрегаем и вращением пули, точнее тем, что часть работы, совершаемой силой упругости, переходит в кинетическую энергию вращательного движения пули.

Итак, вместо движения пули мы рассмотрим модельную задачу — движение материальной точки в поле тяжести.

Запишем второй закон Ньютона для материальной точки, движущейся в поле тяжести:

$$m\vec{a} = \vec{F}, \quad (5)$$

где $\vec{F} = m\vec{g}$ и, следовательно, $\vec{a} = \vec{g}$. Введем оси координат (см. рис. 2). Выберем ось OY вертикально, ось OX — горизонтально. В этом случае

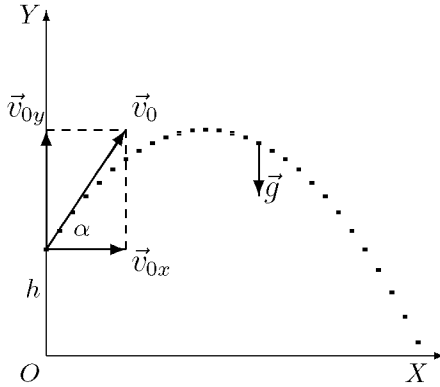


Рис. 2.

проекция ускорения на ось OX :

$$a_x = 0, \quad (6)$$

а на OY :

$$a_y = -g. \quad (7)$$

Теперь найдем v_x и v_y :

$$v_x = \int a_x dt = \int 0 dt = const = C_1, \quad (8)$$

т. е. v_x не меняется со временем. Значит, скорость по оси OX такая, как была в момент выстрела. Пусть в тот момент $t = 0$, т. е.

$$v_x(t = 0) = v_{ox} = v_o \cos \alpha. \quad (9)$$

Таким образом,

$$v_x = v_o \cos \alpha. \quad (10)$$

Аналогично из (7):

$$v_y = \int a_y dt = - \int g dt = -g \int dt = -gt + C_2. \quad (11)$$

C_1 и C_2 — постоянные интегрирования. Они определяются по начальным условиям задачи. Определим C_2 . В момент выстрела, при $t = 0$:

$$v_y(t = 0) = v_{oy} = v_o \sin \alpha. \quad (12)$$

С другой стороны, при $t = 0$ из (11)

$$v_y(t = 0) = -g \cdot 0 + C_2. \quad (13)$$

Приравняв (12) и (13) имеем:

$$v_0 \sin \alpha = C_2. \quad (14)$$

Итак,

$$v_y = v_0 \sin \alpha - g t. \quad (15)$$

Теперь найдем координаты x и y . Из (10)

$$x = \int v_x dt = \int v_0 \cos \alpha dt = v_0 \cos \alpha \int dt = (v_0 \cos \alpha) t + C_3. \quad (16)$$

Так как при $t = 0$, $x = 0$, то

$$0 = x(t = 0) = (v_0 \cos \alpha) \cdot 0 + C_3, \quad (17)$$

т. е. постоянная интегрирования $C_3 = 0$, и

$$x = v_0 \cos \alpha t. \quad (18)$$

Из (15)

$$\begin{aligned} y &= \int v_y dt = \int (v_0 \sin \alpha - g t) dt = \\ &= \int (v_0 \sin \alpha) dt - \int g t dt = (v_0 \sin \alpha) t - g t^2 / 2 + C_4. \end{aligned} \quad (19)$$

При $t = 0$, $y(t = 0) = h$ и

$$h = (v_0 \sin \alpha) \cdot 0 - (g \cdot 0^2) / 2 + C_4, \quad (20)$$

т. е. $C_4 = h$ и

$$y = h + (v_0 \sin \alpha) t - g t^2 / 2. \quad (21)$$

Выражения (18) и (21) позволяют ответить на вопрос о том, где будет находиться материальная точка в любой момент времени. Если мы хотим найти координату x точки падения пули (см.рис.2), нужно узнать время падения t_{π} . Это легко сделать, так как y при этом равно нулю. Тогда из (21)

$$0 = h + (v_0 \sin \alpha) t_{\pi} - g t_{\pi}^2 / 2; \quad (22)$$

$$t_{\pi} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \pm \sqrt{\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2} + \frac{2h}{g}}. \quad (23)$$

Так как $t_{\pi} > 0$, выбираем:

$$t_{\pi} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2} + \frac{2h}{g}}. \quad (24)$$

Итак, из (18), используя (24) получим:

$$x_{\text{п}} = \frac{v_0 \cos \alpha}{g} \left[v_0 \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh} \right]. \quad (25)$$

Отметим, что можно определить начальную скорость пули из формулы (25), зная угол α и измеряя дальность полета $x_{\text{п}}$. Различие в значениях начальной скорости пули, полученных по формуле (3), т. е. по энергии деформации, и формуле (25), т. е. по дальности полета пули, позволяет судить о справедливости части сделанных нами допущений.

2. Порядок выполнения работы

1. Взвешиванием определить массу пули m .
2. Определить коэффициент упругости пружины. Найти v_0 для среднего значения $\bar{k}$ по формуле (3). Результаты занести в таблицу.

№	M	Δx	F	k	$\bar{k}$	m	l	v_0
1								
2								
3								

чтобы формула (25) упростилась. Получить из (25) выражение для v_0 . Прodelав не менее пяти выстрелов для выбранного угла и высоты h , по измеренной дальности полета $x_{\text{п}}$ найти v_0 . Результаты занести в таблицу.

№	$x_{\text{п}}$	$\bar{x}_{\text{п}}$	α	h	v_0
1					
2					
3					
4					
5					

3. Сравнить начальную скорость пули v_0 , найденную двумя способами.
4. Взяв более предпочтительное из полученных значений v_0 и задавшись некоторым углом α , вычислить $x_{\text{п}}^{\text{выч}}$ по формуле (25).
5. Установить мишень в соответствующей точке $x_{\text{п}}$ и определить, правильно ли предсказана точка падения. Результаты занести в таблицу.

№	α	v_0	h	$x_{\text{п}}^{\text{выч}}$	$x_{\text{п}}^{\text{эксп}}$	$\bar{x}_{\text{п}}^{\text{эксп}}$	$\Delta x_{\text{п}}^{\text{эксп}}$
1							
2							
3							

3. Контрольные вопросы

1. Что происходит с потенциальной энергией пружины при выстреле?
2. Почему значения начальной скорости пули v_0 , определенные по формулам (3) и (25), должны быть различными? Объясните выбор, сделанный в п. 5.
3. Как по известному ускорению находят скорость и координаты материальной точки? Из каких соображений определяют возникающие при интегрировании постоянные?
4. Найдите скорость пули в точке падения.
5. Предложите какой-нибудь способ определения величины начальной скорости пули. Сравните достоинства и недостатки способов, используемых лабораторной работе.
6. Найдите уравнение траектории пули.

Список литературы

- [1] *С. Э. Хайкин*. Физические основы механики. М.: Наука, 1971, 752 с.
- [2] *С. П. Стрелков*. Механика. М.: Наука, 1975, 560 с.
- [3] *Л. И. Иверонова*. Механика и молекулярная физика. Лабораторный практикум. М.: Наука, 1976.

Изучение законов равноускоренного движения.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:	<i>изучение динамики поступательного движения связанной системы тел с учетом силы трения, оценка роли трения как источника систематической погрешности при определении ускорения свободного падения на лабораторной установке.</i>
ОБОРУДОВАНИЕ:	лабораторная установка "машина Атвуда", набор грузов, электронный секундомер.

1. Теоретическое введение

Ускорение свободного падения g можно найти с помощью простого опыта: бросить тело с известной высоты H и измерить время падения t , а затем из формулы $h = gt^2/2$ вычислить g .

В действительности дело обстоит не так просто, если требуется определить g достаточно точно. Определим время t падения с высоты $h = 1.0$ м при g , равном 9.8 м/с^2 :

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.0 \text{ м}}{9.8 \text{ м/с}^2}} \approx 0.45 \text{ с.}$$

По нашей оценке при проведении такого эксперимента необходимо измерять время с точностью до 0.01 с. Оценим разброс для $t_1 = 0.44$ с; $t_2 = 0.45$ с; $t_3 = 0.46$ с по формуле $g = 2h/t^2$:

$$g_1 = \frac{2 \text{ м}}{(0.44)^2 \text{ с}^2} = 10.330578 \text{ м/с}^2 \approx 10.3 \text{ м/с}^2$$

$$g_2 = \frac{2 \text{ м}}{(0.45)^2 \text{ с}^2} = 9.8765431 \text{ м/с}^2 \approx 9.9 \text{ м/с}^2$$

$$g_3 = \frac{2 \text{ м}}{(0.46)^2 \text{ с}^2} = 9.4517956 \text{ м/с}^2 \approx 9.4 \text{ м/с}^2$$

Понятно, что измерить время с точностью до 0.01 с не просто. Наручные часы или спортивный секундомер для такой цели непригодны.

Если увеличить высоту, то время падения тоже увеличится. Так, при $h = 5$ м время падения будет 1 с, а при $h = 20$ м — 2 с. В этом случае

можно ограничиться меньшей точностью при измерении времени, например 0.01 с, но возникает ошибка другого характера. Сопротивление воздуха при больших скоростях играет заметную роль. Формула $h = gt^2/2$ описывает равноускоренное движение и, конечно, не учитывает сопротивления воздуха. Таким образом, увеличивая высоту h , мы увеличиваем время падения и уменьшаем относительную погрешность измерения времени, но при этом вносим другую ошибку: сама формула $h = gt^2/2$ становится неточной. Более того, если кирпич сбросить с высоты $h = 500$ м, то примерно первые 200 м он будет двигаться с ускорением, а затем сила сопротивления воздуха станет равной силе тяжести (это будет при скорости примерно 70 м/с) и тело остальные 300 м будет падать с постоянной скоростью $V \approx 70$ м/с. В этом случае формула $h = gt^2/2$ становится неверной. Этот простой пример наглядно подчеркивает общую черту любого физического эксперимента. В любом эксперименте точность измерений какой-либо физической величины связана не только с точностью измерительных приборов, но и с тем, насколько точно принятая модель описывает данный опыт.

В рассматриваемом нами опыте мы видим, что точность измерения ускорения g связана не только с точностью измерения времени t , но и с тем, можно или нет пренебречь трением о воздух. Иными словами, достаточно точно или нет описывает формула $h = gt^2/2$ движение тела.

Трудности опыта связаны с большим значением ускорения g свободного падения. Так как ускорение большое, то тело быстро набирает скорость, а при этом или время падения мало и его трудно точно измерить, или сама формула $h = gt^2/2$ не точна.

Уменьшить ускорение можно с помощью устройства, которое называют *машинной Атеуда* (рис. 1).

Через блок перекинута нить, на которой закреплены грузы массой M каждый. На один из грузов кладется перегрузок массой m . Ускорение грузов легко найти, если ввести два предположения (выбрать модель):

- 1) блок и нить невесомы, т. е. их массы равны нулю;
- 2) трением тела о воздух и трением между блоком и его осью можно пренебречь.

С учетом этих предположений уравнения движения грузов имеют вид

$$-Ma = Mg - T, \quad (M + m)a = (M + m)g - T. \quad (1)$$

где T — сила натяжения нитей, a — ускорение грузов. Из уравнений (1) получаем

$$a = g \frac{m}{2M + m} = g \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}, \quad (2)$$

где $\varepsilon = m/(2M)$.

Время, за которое груз опускается с высоты h , равно

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon}} \quad (3)$$

Формально из выражения (3) следует, что время падения груза может быть сколь угодно большим, если уменьшить ε . Например, если взять грузы массами $M = 5$ кг каждый, перегрузок массой $m = 1$ г, то $\varepsilon = 10^{-4}$, а время спуска груза на высоту $h = 1$ м примерно равно 45 с. Это время можно достаточно точно измерить секундомером. Однако реально такой опыт невыполним. Мы предположили, что трение в оси блока отсутствует. Но в действительности оно есть. Весь вопрос в том, можно ли им пренебречь или нет.

Если подвести к блоку на нитях тяжелые грузы, то в оси блока будет большая сила трения. Чем массивнее грузы, тем больше сила трения. Значит, необходимо брать достаточно тяжелый перегрузок, чтобы преодолеть эту силу трения и привести всю систему в движение.

Сделаем теперь количественные оценки. Пусть m_0 — масса такого перегрузка, который только-только страгивает блок с грузами. Это значит, что любой перегрузок меньшей массы не приводит систему в движение. В этом случае момент сил натяжения нитей равен моменту силы трения $M_{\text{тр}}$ в оси блока:

$$(T_2 - T_1) R = m_0 g R = M_{\text{тр}}, \quad (4)$$

где $T_2 = (M + m_0)g$ и $T_1 = Mg$ — силы натяжения нитей, R — радиус блока (рис.2).

Момент силы трения в оси блока $M_{\text{тр}} = F_{\text{тр}}r$, где $F_{\text{тр}}$ — сила трения между блоком и осью, r — радиус оси.

Сила трения $F_{\text{тр}}$ между блоком и осью пропорциональна силе давления на ось блока. Тогда

$$N = T_1 + T_2 = (2M + m_0)g,$$

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu(2M + m_0)g.$$

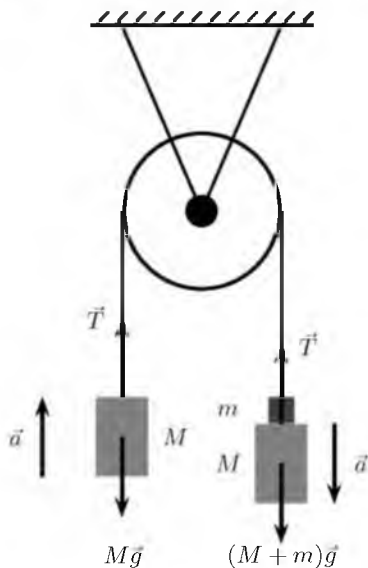


Рис. 1.

где μ — коэффициент трения между блоком и осью, зависящий от свойств соприкасающихся поверхностей втулки блока и оси, смазки и т. п.

Таким образом, момент силы трения в оси блока

$$M_{\text{тр}} = (2M + m_0) g \mu r, \quad (5)$$

Обозначим $\varepsilon_0 = m_0 / (2M)$. Подставим (5) в (4):

$$\frac{\varepsilon_0}{1 + \varepsilon_0} = \mu \frac{r}{R} \quad (6)$$

Как видно из (6), значение ε_0 не может быть сколь угодно малым. Оно определяется конструкцией блока (например, его радиусами R и r) и коэффициентом трения между блоком и осью.

Так как в машине Атвуда $m_0 \ll M$, то $\varepsilon_0 \ll 1$ и

$$\varepsilon_0 \approx \mu r / R$$

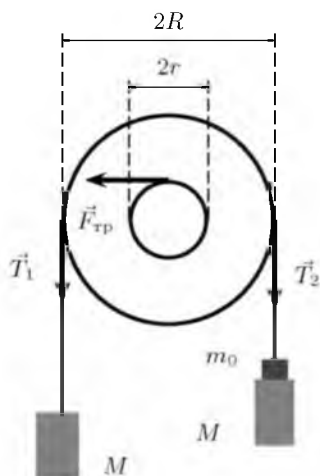


Рис. 2.

Какое же значение ε_0 можно ожидать? Типичное значение коэффициента трения $\mu \sim 10^{-2} \div 10^{-1}$. На наших установках $r/R \sim 10^{-2} \div 10^{-1}$.

Таким образом, $\varepsilon_0 \sim 10^{-4} \div 10^{-2}$. Мы привели лишь правдоподобные рассуждения о том, каким может быть ε_0 . (Существенно то, что ε_0 можно оценить экспериментально. Например, на установке с грузами массой $M = 86$ г перегрузок массой 1 г не сдвигает блока, а перегрузок массой 2 г приводит блок в движение. Это значит, что

$$6 \cdot 10^{-3} < \varepsilon_0 < 1.2 \cdot 10^{-2}.$$

В таком случае оценить ε_0 , характеризующую установку, можно лишь по порядку величины. Как оказывается, она порядка 10^{-2} . Интуитивно ясно, что трением можно пренебречь, если масса перегрузка $m \gg m_0$.

Действительно, если масса перегрузка чуть больше m_0 , то трение в оси блока будет решающим образом определять движение грузов. Это движение уже не будет равноускоренным. Может даже случиться, что система будет двигаться рывками, т. е. остановится, затем снова придет в движение и т. д.

Таким образом, при $m \gtrsim m_0$, т. е. при $\varepsilon \gtrsim \varepsilon_0$, формула (2) становится неверной. Можно ожидать, что при $\varepsilon \gg \varepsilon_0$ она достаточно точно описывает реальную ситуацию. Так как $\varepsilon \leq 10^{-2}$, то оптимальное значение $\varepsilon \sim 10^{-1}$. Это значит, что экспериментировать надо с перегрузками 5–20 г. Если взять $\varepsilon \sim 1$, то $a \sim g$. Мы приходим к случаю почти свободного падения.

Можно показать, (см. контрольный вопрос 2), что относительная погрешность при определении ускорения грузов, связанная пренебрежением массой блока и трением, равна

$$\frac{\Delta a}{\bar{a}} \lesssim \frac{m_0}{m} + \frac{m_6}{2M} \quad (7)$$

где m_6 — масса блока.

Так как величины m_0/m и $m_6/(2M)$ одного и того же порядка 10^{-1} , то и относительная погрешность при измерении ускорения $\Delta a/\bar{a} \sim 10^{-1}$. Очевидно, что такого же порядка будет и относительная погрешность при измерении g .

2. Методика измерений

В первую очередь необходимо определить минимальную массу перегрузка m_0 , страгивающего блок, для того, чтобы в дальнейшем проводить измерения с грузами, в 5–10 раз превышающими по массе m_0 . Только в этом случае можно пренебречь влиянием трения на движение системы. Не следует стремиться определить m_0 точно, достаточно получить ее правильную оценку "сверху", например выяснить, что m_0 не превышает 1 г или 2 г.

Для определения m_0 можно постепенно увеличивать массу перегрузка, пока блок не придет в движение. Так как блок не может быть отцентрирован идеально, то может оказаться, что в различных начальных положениях блока массы страгивающего перегрузка различны. Поэтому нужно повторить измерения m_0 в разных положениях блока, а затем в качестве оценки для m_0 взять наибольшее из найденных значений.

Следует убедиться, что движение системы при достаточно большой фиксированной массе перегрузка $m \gg m_0$ является равноускоренным. Для этого нужно экспериментально проверить выполнение зависимости $h = g t^2/2$. Удобно переписать это соотношение в виде

$$t = \sqrt{\frac{2}{a}} \sqrt{h}, \quad (8)$$

из которого ясно, что в осях координат $x = \sqrt{h}$, $y = t$ прямая $t = t(\sqrt{h})$, проходящая через начало координат, соответствует равноускоренному движению.

Ускорение можно найти по формуле:

$$a = \frac{2h}{t^2}. \quad (9)$$

Далее, важно выяснить, подтверждается ли на опыте зависимость времени падения от массы m перегрузка [см. (2)]:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \sqrt{\frac{(2M + m)}{m}} \approx 2 \sqrt{\frac{h}{g}} \sqrt{\frac{M}{m}} \quad (10)$$

В осях координат $x = \sqrt{M/m}$, $y = t$ функция $t = t(\sqrt{M/m})$ является уравнением прямой. Зависимость $t = t(\sqrt{M/m})$ при фиксированной высоте падения h может быть построена по экспериментальным точкам: для нескольких значений массы перегрузка определяется время падения $t = \bar{t} \pm \Delta t$.

Из формулы (10) следует

$$g = \frac{2h(2M + m)}{t^2 m}. \quad (11)$$

3. Порядок выполнения работы

1. Определите массу m_0 страгивающего перегрузка. Измерения повторите при четырех положениях блока, каждый раз поворачивая блок примерно на 90° по отношению к предыдущему положению. В качестве m_0 следует принять наибольшее из найденных значений.
2. Определите экспериментально зависимость времени падения t груза от высоты h . Измерения проведите при определенном выбранном значении массы перегрузка m . При этом необходимо также, чтобы выполнялось неравенство

$$m_0 \ll m \ll 2M$$

Определите время падения t для пяти высот h , повторяя измерения для каждого значения h четыре раза. Результаты занесите в таблицу.

№	m	m_0	h	Δh	t_1	t_2	t_3	t_4	$\bar{t}$	Δt	a	Δa
1												
2												
3												
4												
5												

3. Определите ускорение a по формуле (9) и Δa , как погрешность косвенных измерений. Результаты занесите в таблицу предыдущего пункта.

4. Определите опытным путем зависимость времени падения t от массы m перегрузка. Измерения проводите при наибольшей возможной высоте падения $h = h_{\max}$ для пяти значений массы m . Для каждого значения m повторите измерения четыре раза.

Все значения массы m перегрузка должны лежать в диапазоне $m_0 \ll m \ll 2M$. Результаты занесите в таблицу.

№	$h_{\max}$	m	M/m	t_1	t_2	t_3	t_4	$\bar{t}$	Δt	g	Δg
1											
2											
3											
4											

В нашей лабораторной установке точность Δm определения массы по существу совпадает со значением массы m_0 перегрузка.

5. Определите ускорение свободного падения g по формуле (11) и погрешность Δg . Результаты занесите в таблицу предыдущего пункта.
6. По результатам измерений в осях координат $x = \sqrt{M/m}$, $y = t$ постройте прямую $t = t(\sqrt{M/m})$. См. рис. 3.

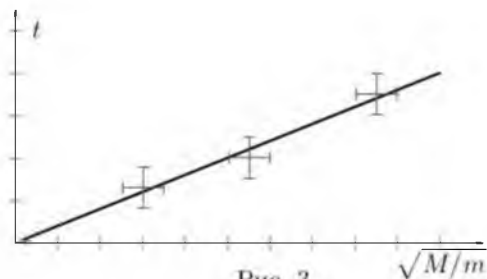


Рис. 3.

4. Контрольные вопросы

1. Почему измеренное ускорение свободного падения меньше, а не больше, чем 9.8 м/с^2 ?
2. Какова относительная погрешность измерения g ?
3. Блок представляет собой тонкий обруч массой m_b с невесомыми спицами и втулкой (рис. 4). Радиус обруча R , радиус втулки r . Втулка насажена на ось. Коэффициент трения между втулкой и осью μ . Через блок перекинута нить, на которой укреплены грузы массой M

и перегрузок массой m . Определите ускорение a системы и относительную погрешность $\Delta a/a$, связанную с пренебрежением трением и массой блока.

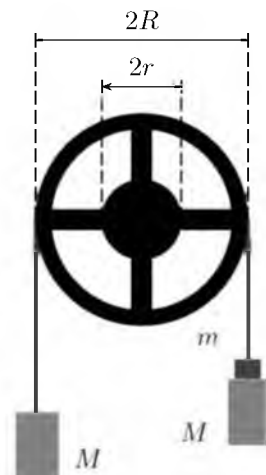


Рис. 4.

4. Как влияет вращение блока на движение грузов в системе?

Список литературы

- [1] *С. Э. Хайкин*. Физические основы механики. М.: Наука, 1971, 752 с.
- [2] *И. В. Савельев*. Курс физики.— Т.I — М.: Наука, 1989.
- [3] *Д. В. Сивухин* Общий курс физики.— Т.I. Механика. — М.: Наука, 1989.
- [4] *С. П. Стрелков*. Механика. М.: Наука, 1975, 560 с.
- [5] *С. Г. Каленков, Г. И. Соломахо* Механика. Практикум по физике. М.: Высш. шк., 1990.—111 с.

Соударение тел

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: *изучение процесса соударения тел.*
ОБОРУДОВАНИЕ: лабораторная установка

1. Теоретическое введение

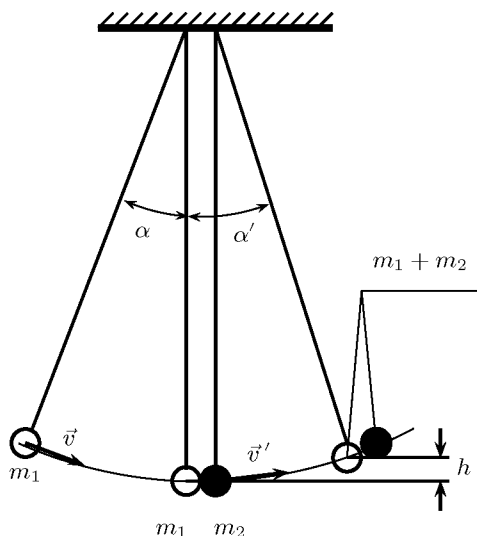


Рис. 1. Абсолютно неупругий удар.

При соударении тел друг с другом они претерпевают деформации. В этом случае кинетическая энергия, которой обладали тела перед ударом, частично или полностью переходит в потенциальную энергию упругой деформации и во внутреннюю энергию тел. Увеличение внутренней энергии тел сопровождается повышением их температуры.

Существуют два предельных вида удара: абсолютно неупругий и абсолютно упругий.

Абсолютный неупругий удар характеризуется тем, что потенциальная энергия деформации не возникает, после удара столкнувшиеся тела либо движутся с одинаковой скоростью, либо находятся в состоянии по-

коя. При абсолютно неупругом ударе не сохраняется полная механическая энергия тел, но выполняется закон сохранения импульса и закон сохранения энергии: механическая энергия сталкивающихся тел переходит в их внутреннюю энергию и в кинетическую энергию образовавшегося в результате неупругого удара тела. Примером абсолютно неупругого удара является столкновение пули с мишенью баллистического маятника или шаров, изготовленных из пластилина, которые при столкновении слипаются и затем двигаются как единое тело.

В установке, которая применяется для выполнения лабораторной работы "соударение тел", заложен метод баллистического маятника. В этом случае шары двигаются по кривой, соединяющей их центры, — такой удар называется центральным. В случае, когда один шар находится в состоянии покоя, а другой отведен на угол α и после этого опущен, систему во время удара можно считать замкнутой и применять к ней закон сохранения импульса.

Из этого закона определяется скорость v' , которую получает система непосредственно после удара (рис. 1):

$$v' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v, \quad (1)$$

где v' — скорость системы после удара, v — скорость шара с массой m_1 до удара, m_1 и m_2 массы шаров. После того, как удар закончился, действие внутренних сил прекращается и к дальнейшим процессам, происходящим после удара, применим закон сохранения энергии.

Скорость надо рассматривать как начальную скорость, с которой начнет колебаться масса шаров после соединения, т. е. в нижнем положении. В этом положении система обладает кинетической энергией

$$E_k = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(v')^2,$$

которая при отклонении маятника с массой $(m_1 + m_2)$ переходит в потенциальную энергию $E_p = (m_1 + m_2)gh$. Отсюда находится высота h

$$h = \frac{(v')^2}{2g} = \frac{1}{2g} \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 v^2. \quad (2)$$

При практических вычислениях удобно выразить высоту h через угол отклонения маятника из положения равновесия α , который определяется по транспортиру на установке. Тогда

$$h = l(1 - \cos \alpha) = 2l \sin^2 \left(\frac{\alpha'}{2} \right). \quad (3)$$

Пользуясь этим выражением, формулу (2) нетрудно привести к виду

$$v = 2 \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{gl} \sin \frac{\alpha'}{2}. \quad (4)$$

Подставляя значения v скорости маятника с массой m_1 до столкновения шаров в формулу (1), получим скорость маятника после соударения шаров

$$v' = 2 \sqrt{gl} \sin \frac{\alpha'}{2}. \quad (5)$$

Абсолютно упругий удар характеризуется тем, что механическая энергия тел не переходит в другие, немеханические, виды энергии. При таком ударе кинетическая энергия переходит полностью или частично в потенциальную энергию упругой деформации. Затем тела возвращаются к первоначальной форме, отталкивая друг друга. В итоге потенциальная энергия упругой деформации снова переходит в кинетическую энергию, и тела разлетаются со скоростями, величина и направление которых определяются двумя условиями: сохранением полной энергии и сохранением полного импульса системы тел.

Рассмотрим *центральный удар* абсолютно упругих шаров. В этом случае скорости шаров v_1 и v_2 до удара направлены по линии, соединяющей их центры. Эта линия называется *линией центров*.

При столкновении кинетическая энергия шаров $\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$, связанная с движением их центра масс, изменяться не может, т. к. не меняется скорость самого центра масс. Может претерпевать превращения только кинетическая энергия $\frac{1}{2}\mu(v_1 - v_2)^2$ относительного движения шаров.

В некоторый момент вся кинетическая энергия относительного движения переходит в потенциальную энергию упруго деформированных шаров. В этот момент шары аналогичны сжатым пружинам, стремящимся перейти в недеформированное состояние, начинается обратный процесс перехода энергии упругих деформаций в кинетическую энергию поступательного движения шаров.

Этот процесс можно наблюдать на лабораторной установке с двумя шарами. Разведите шары в разные стороны приблизительно на одинаковые расстояния и одновременно отпустите их. Скорости шаров после столкновения v'_1 и v'_2 легко найти из законов сохранения импульса и энергии:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2, \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} m_1 (v_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2)^2 = \frac{1}{2} m_1 (v'_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v'_2)^2. \quad (7)$$

Первое уравнение линейное, второе — квадратное. Наблюдая столкновение шаров на установке, легко убедиться, что скорости шаров до и после столкновения не одинаковы, т. е.

$$v_1 \neq v'_1, \quad v_2 \neq v'_2.$$

Тогда уравнения (6–7) можно переписать в следующем виде

$$m_1 (v_1 - v'_1) = m_2 (v'_2 - v_2),$$

$$m_1 ((v_1)^2 - (v'_1)^2) = m_2 ((v'_2)^2 - (v_2)^2).$$

Так как $(v_1 - v'_1)$ и $(v'_2 - v_2)$ не равны нулю, то уравнения можно поделить почленно, а это дает:

$$v_1 + v'_1 = v_2 + v'_2.$$

Таким образом, задача свелась к решению системы двух линейных уравнений, а отсюда единственное решение

$$v'_1 = -v_1 + 2 \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad (8)$$

$$v'_2 = -v_2 + 2 \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (9)$$

Примем вариант, когда один из шаров, например, с массой m_2 находится в состоянии покоя, — неподвижен ($v_2 = 0$) (см. рис. 2).

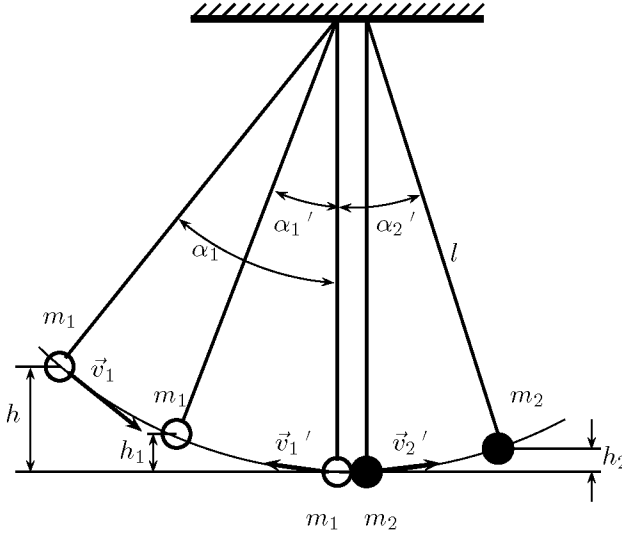


Рис. 2. Абсолютно упругий удар шаров.

Тогда

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1, \quad v'_2 = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_1. \quad (10)$$

При этом возможны следующие случаи:

а) если $m_1 \gg m_2$, тогда шар с массой m_1 будет продолжать двигаться в первоначальном направлении со скоростью почти равной скорости до удара, второй шар с массой m_2 начнет двигаться вперед со скоростью $v'_2 \approx 2 v_1$;

б) если $m_1 \ll m_2$, шар с массой m_1 отскочит в обратном направлении ($v'_1 \approx -v_1$), второй же шар с массой m_2 получит пренебрежимо малый импульс ($v'_2 \approx 0$) (этот случай можно рассматривать как абсолютно упругий удар мяча о стену).

в) если $m_1 = m_2$, то из (10) следует, что $v'_1 = 0$ и $v'_2 = -v_1$, т. е. при столкновении двух одинаковых абсолютно упругих шаров они просто обмениваются скоростями.

Рабочую формулу начальной скорости ударяющего шара применительно к лабораторной установке для соударения двух тел можно получить по аналогии с выводом, приведенным в разделе "абсолютно неупругий удар", где отклонение маятника на высоту h заменятся углом α_1 , который определяется по транспортиру

$$v_1 = 2 \sqrt{gl} \sin \frac{\alpha_1}{2}, \quad (11)$$

где g – ускорение свободного падения, l – длина подвески шаров (рис. 2).

Конструкция установки для исследования столкновения шаров.

Схема установки приведена на рис. 3. Базовым элементом установки является основание (1), на котором смонтированы: цилиндрическая колонка (3), пульт управления (7) и регулировочные винты (2). Жестко закрепленная в основании цилиндрическая колонка несет на себе верхний кронштейн (5) и нижний кронштейн (4). Конструкция верхнего кронштейна предусматривает установку подвешенных на проводах подвесах (10) шаров (6) в нужном положении (например, установка на нулевое положение по транспортиру (8), создание между шарами требуемого зазора). Через провод подвеса в шары подается электронапряжение. Нижний кронштейн несет на себе транспортеры, правый и левый (8) электромагнит (9). Конструкция крепления транспортеров позволяет перемещать их вправо и влево и спереди назад в небольших пределах. Электромагнит перемещается по правому транспортеру и закрепляется в требуемом положении. На лицевой панели пульта управления (7) расположены кнопки: сеть, сброс, пуск и шкала микросекундомера.

Установка для исследования столкновения шаров укомплектована стальными и бронзовыми шарами разных диаметров для исследования абсолютно упругого удара и прессформой для изготовления шаров из пластилина для проведения исследования абсолютно неупругого удара.

2. Порядок выполнения работы

Порядок изготовления шаров из пластилина в прессформе.

1. Отвернуть выжимной винт (1)(см. рис. 4).
2. Повернуть совместно верхнюю и нижнюю полусферу на 90° .
3. Снять верхнюю полусферу.
4. Смазать рабочие части полусфер тонким слоем вазелина.
5. Установить в нижнюю полусферу резбовую втулку (5).

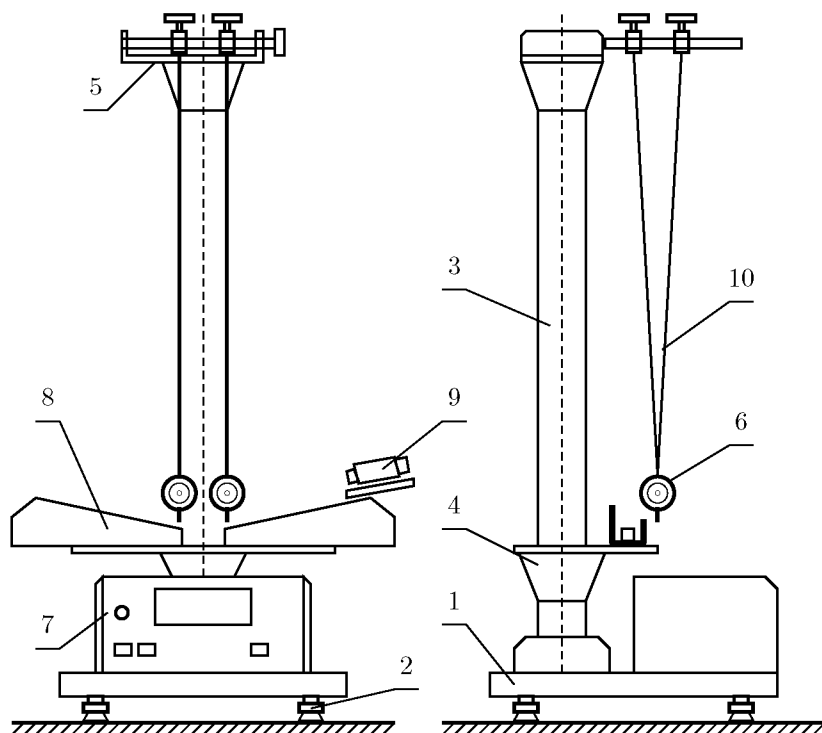


Рис. 3. Схема установки для исследования столкновения шаров. 1 — основание; 2 — регулировочные винты; 3 — колонка; 4 — кронштейн нижний; 5 — кронштейн верхний; 6 — шары; 7 — пульт управления; 8 — транспортер; 9 — электромагнит; 10 — провод-подвес.

6. Заполнить нижнюю полусферу предварительно сформированным шаром из пластилина.
7. Накрыть верхней полусферой пластилин, и повернуть собранную прессформу под корпус (2).
8. Зажать прессформу выжимным винтом.
9. Повторить 1, 2, 3 операции и снять готовый шар.

Порядок выполнения работы при абсолютно неупругом ударе

1. Изготовить два шара из пластилина.
2. Найти массы шаров m_1 и m_2 .
3. Установить зазор между шарами на установке не более 3 мм.

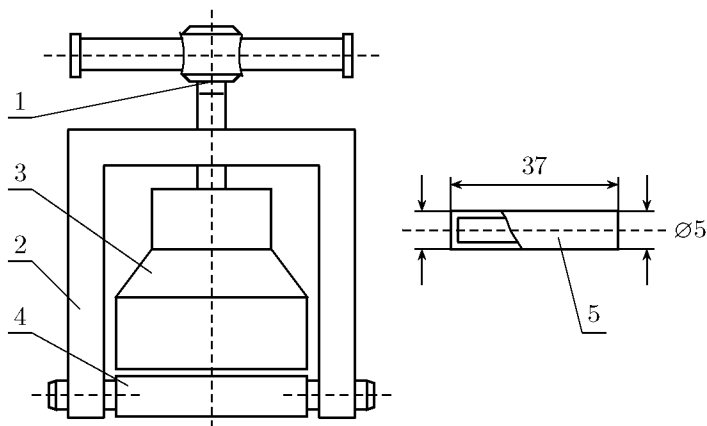


Рис. 4. Прессформа для изготовления шаров из пластилина к исследованию абсолютно неупругого удара. 1 — выжимной винт; 2 — корпус прессформы; 3 — верхняя полусфера; 4 — нижняя полусфера; 5 — втулка резьбовая.

4. Измерить длину подвески шаров.
5. Отклонить правый шар на начальный угол α и отпустить его. Зафиксировать величину угла, на который отклонятся слипшиеся шары. Измерения провести по 5 раз для каждого из трех значений начального отклонения $\alpha = 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$. Результаты занести в таблицу.

№	α	α'	$\bar{\alpha}'$	v'	$\Delta v'$
1	5°				
2					
3					
4					
5					
1	10°				

6. По формуле (5) найти скорость системы после удара v' .

Порядок выполнения работы при абсолютно упругом ударе.

1. Установить в подвесы установки два стальных шара одинакового диаметра. Проверить положение шаров по высоте, величину зазора между шарами, нулевое положение шаров по транспортиру.

2. Выбрать начальные отклонения α ударяющего шара, (например, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ соответственно равны $5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$). Установить электромагнит на транспорте таким образом, чтобы риска на шаре совпадала с центром стержня электромагнита, а указатель оси шара соответственно делению транспорта $\alpha = 5^\circ$.
3. Включить установку в сеть. Правый шар зафиксировать электромагнитом. Проверить положение указателя шаров.
4. Внимательно произвести отсчет угла отклонения α' и времени соударения шаров t , Провести измерения 10 раз, результаты занести в таблицу.

№	α_1	α'_1	$\bar{\alpha}'_1$	t	$\bar{t}$	v_1	v'_1	v'_2
1	5°							
2								

5. На основании проведенных измерений определить средние значения углов $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$ после столкновения шаров и t – время соударения шаров. Определить скорость ударяющего шара v_1 до столкновения и скорости шаров v'_1 и v'_2 после столкновения. Определить количество движения шаров (импульс) до столкновения шаров $P = m_1 v_1$ и суммарный импульс $P' = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$ после столкновения.
Построить график зависимости времени соударения t от угла отклонения ударяющего шара α .

3. Контрольные вопросы

1. Дать определение абсолютно неупругого удара и абсолютно упругого удара. Привести примеры.
2. Как изменяется кинетическая и потенциальная энергии при столкновении шаров?
3. От чего зависит время соударения шаров?
4. Вывести формулу 5.
5. Найти импульс системы шаров после абсолютно неупругого удара.

Список литературы

- [1] Д. В. Сивухин Общий курс физики.— Т.І. Механика. – М.: Наука, 1989.
- [2] И. В. Савельев. Курс общей физики.— Т.І — М.: Наука, 1989.
- [3] А. А. Детлаф, Б. М. Яворский Курс физики. — М.: Наука, 1989.

Связанные маятники

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:	<i>Изучение колебаний в системе с двумя степенями свободы.</i>
ОБОРУДОВАНИЕ:	два маятника, штативы, пружины.

1. Теоретическое введение

1. Гармонические колебания.

Если положение системы в любой момент времени может быть определено единственной координатой, то говорят, что система имеет одну степень свободы.

Напомним, что *числом степеней свободы механической системы* называется количество независимых величин, с помощью которых может быть задано положение системы. Система из N материальных точек, между которыми нет жестких связей, имеет $3N$ степеней свободы (положение каждой из N точек должно быть задано тремя координатами). Любая жесткая связь, устанавливающая неизменное взаимное расположение двух точек, уменьшает число степеней свободы на единицу. Так, например, если система состоит из двух материальных точек, расстояние l между которыми остается постоянным, то число степеней свободы равно пяти. Таким образом, число степеней свободы $i = 3N - m$, где N — количество точек, m — число уравнений связи.

Примерами систем, имеющих одну степень свободы, являются: маятник, колеблющийся в заданной плоскости (координатой может служить угол отклонения маятника от вертикали) (рис.1 а), материальная точка массы m , связанная с пружиной (координатой может служить удлинение пружины Δx) (рис.1 б). Положение этих систем в любой момент времени определяется одной единственной координатой системы. Как известно из школьного курса физики, при малых значениях координаты ее изменение с течением времени определяется одной и той же зависимостью:

$$x(t) \text{ или } \varphi(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (1)$$

Такое изменение координаты со временем, происходящее по закону косинуса (или синуса), называется гармоническим колебанием. В (1): A — положительная константа, называемая амплитудой; ω_0 — угловая частота, имеющая размерность рад/с; величина стоящая под знаком косинуса, $(\omega_0 t + \varphi_0)$ называется фазой (из рис. 1 а видно, что фаза растет пропорционально времени), φ_0 называется фазовой постоянной или начальной

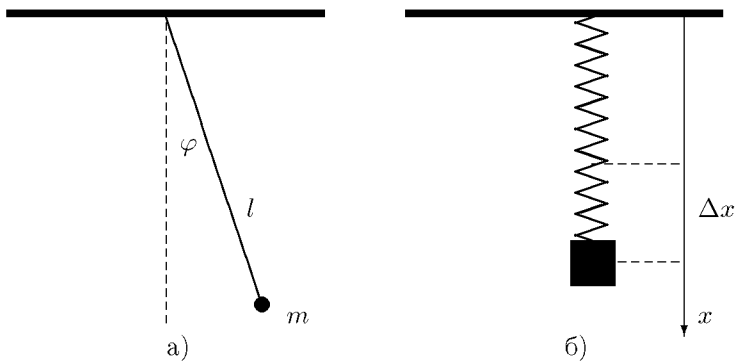


Рис. 1.

фазой (φ_0 — значение фазы в момент времени $t = 0$), ее величина зависит от значения координаты и скорости в момент начала отсчета времени t .

Угловая частота колебаний ω_0 связана с физическими свойствами системы.

Рассмотрим колебания математического маятника. Считаем, что угол α мал. Запишем второй закон Ньютона для данной системы (см. рис. 2):

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$$

Спроецируем это уравнение на оси X и Y :

$$X: m a_x = 0 - T \sin \alpha$$

$$Y: m a_y = -m g + T \cos \alpha$$

При малых смещениях от положения равновесия колебания фактически происходят только вдоль оси X и $a_y = 0$. Тогда из последних уравнений следует, что:

$$m a_x = -m g \operatorname{tg} \alpha \quad (2)$$

Примем приближение $\operatorname{tg} \alpha \approx \frac{x}{l}$ при малых углах. С учетом этого приближения и того, что $a_x \equiv \ddot{x}$, получим из (2) следующее выражение:

$$\ddot{x} + \frac{g}{l} x = 0. \quad (3)$$

Это и есть уравнение колебаний математического маятника в стандартном виде. Это дифференциальное уравнение второго порядка. Его решением

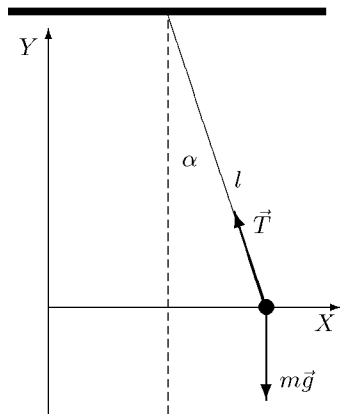


Рис. 2.

является закон гармонических колебаний (1). Таким образом, для математического маятника

$$\omega_0^2 = g/l. \quad (4)$$

Следовательно, угловая частота зависит от длины маятника и ускорения свободного падения.

Аналогично, частота колебаний пружинного маятника (рис. 1 б):

$$\omega_0^2 = k/m \quad (5)$$

зависит от коэффициента жесткости пружины и массы груза, прикрепленного к ней.

Теперь напомним, как происходит изменение энергии при гармонических колебаниях.

Рассмотрим механические колебания массы m , скользящей без трения по горизонтальной поверхности и соединенной с неподвижной стенкой при помощи пружины. Пружина имеет "нулевую" массу и коэффициент жесткости k . Полная механическая энергия системы E при колебаниях остается неизменной, так как система консервативна. Полная энергия совпадает с потенциальной энергией $E_{\text{п}}$ в точках наибольшего отклонения от положения равновесия, т. е. при $x = \pm A$, и совпадает с кинетической энергией $E_{\text{к}}$ при прохождении груза через положение равновесия, где его скорость максимальна.

В произвольный момент времени величину полной энергии (равную сумме кинетической и потенциальной) нетрудно сосчитать:

$$E = E_{\text{к}} + E_{\text{п}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} \quad (6)$$

где v — скорость тела.

Напомним, что скорость v является первой производной координаты по времени. Если координата тела изменяется с течением времени по гармоническому закону

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

то его скорость в любой момент времени

$$v(t) = \dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Подставим в (6) выражение для $x(t)$ и $v(t)$:

$$E = \frac{m}{2} A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{k}{2} A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (7)$$

Воспользовавшись тем, что из (5) $k = m\omega_0^2$, имеем:

$$E = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2. \quad (8)$$

Таким образом, энергия тела, совершающего гармонические колебания, остается постоянной и прямо пропорциональна квадрату амплитуды.

2. Затухающие колебания.

Колебания маятника являются гармоническими лишь в том случае, когда нет трения. Но силы трения или точнее, силы сопротивления, хотя, может быть, и малые, всегда действуют на колеблющееся тело. Эти силы вызывают затухание колебаний (говорят, что трение "демпфирует" колебания). Поэтому более реальной моделью колебаний являются затухающие колебания. Силы трения довольно сложно зависят от скорости, но при колебаниях, когда скорость тела мала по абсолютной величине, можно считать с достаточной степенью точности, что силы трения прямо пропорциональны скорости движения. Поэтому, например, уравнение движения массы, связанной с пружиной, будет иметь такой вид:

$$m \ddot{x} = -kx - \eta \dot{x}, \quad (9)$$

где $-kx$ — сила упругости, и $\eta \dot{x}$ — сила сопротивления (η называется коэффициентом сопротивления — постоянная величина). Решение уравнения (9) можно записать в виде

$$x = A e^{-\delta t} \cos(\omega_1 t + \varphi_0), \quad (10)$$

здесь $\delta = \eta/2m$ — коэффициент затухания и $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \delta^2/4$.

Когда величина δ большая, то говорят о сильном затухании. Если коэффициент δ мал, то говорят, что колебания являются слабо затухающими. Легко показать, что при этом полная энергия почти постоянна в течение одного периода колебаний, но уменьшается по экспоненте за интервал времени, включающий в себя много циклов:

$$E = E_0 e^{-2\delta t}, \quad (11)$$

где $E_0 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2$.

3. Сложение колебаний.

Теперь перейдем к рассмотрению сложения колебаний одного направления. Пусть тело или материальная точка может одновременно находиться в нескольких полях упругих или квазиупругих сил, каждая из которых заставляет совершать гармоническое колебательное движение (например, барабанная перепонка уха, принимающая несколько звуковых волн). Если материальная точка одновременно участвует в двух гармонических колебаниях одного направления с разными амплитудами, начальными фазами и периодами, то ее смещения от положения равновесия под действием каждой из сил:

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{01}), \quad x_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_{02}). \quad (12)$$

Результирующее смещение точки вдоль одной линии равно алгебраической сумме обоих смещений:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{01}) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_{02}) \quad (13)$$

В общем случае, когда амплитуды, частоты и начальные фазы складываемых однонаправленных колебаний отличаются, возникает сложный колебательный процесс. Интерес представляет частный случай, когда колебания слегка различаются по частоте, а их амплитуды равны. Принимая в момент начала отсчета времени $t_0 = 0$ начальные фазы обоих колебаний равными нулю, имеем:

$$x_1(t) = A \cos(\omega_1 t), \quad x_2(t) = A \cos(\omega_2 t). \quad (14)$$

где $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1, \omega_2$.

Пользуясь известным тригонометрическим соотношением (формулой суммы косинусов), результирующее колебание можно описать выражением:

$$x(t) = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right). \quad (15)$$

Полагая $|\omega_1 - \omega_2| = \Delta\omega$ и $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$, выражение (15) можно представить в виде:

$$x(t) = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right) \cos(\omega t). \quad (16)$$

Здесь второй множитель имеет частоту, близкую к частотам складываемых колебаний $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2 \approx \omega_1 \approx \omega_2$, а частота первого сомножителя много меньше частот складываемых колебаний из-за близости значений последних. Поэтому период первого сомножителя T существенно больше периода второго сомножителя (так как период есть величина обратная частоте):

$$T = \frac{2\pi}{\Delta\omega/2} = 2 \frac{2\pi}{\Delta\omega}. \quad (17)$$

Это позволяет рассматривать результирующее движение как почти гармоническое колебание с частотой ω и медленно изменяющейся амплитудой, причем изменение амплитуды так же происходит по гармоническому закону. Таким образом, результирующее движение точки вдоль одной линии под действием двух упругих сил, при условии равенства амплитуд и близости значений частот складываемых колебаний, будет представлять собой практически гармоническое колебание с медленно пульсирующей амплитудой. И соответственно результирующее смещение

$$x(t) = A_m \cos(\omega t). \quad (18)$$

Такое практически гармоническое колебание с относительно медленно возрастающей и убывающей амплитудой колебаний носит название *биений*. Изменение амплитуды происходит по гармоническому закону

$$A_m = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right).$$

За время T (см. (17)) амплитуда биений дважды достигает минимума (в моменты $t = \pi/\Delta\omega, 3\pi/\Delta\omega$ $A_m = 0$), и дважды достигает максимального значения ($t = 2\pi/\Delta\omega, 4\pi/\Delta\omega$ $|A_m| = 2A$).

Время $\tau = T/2$, за которое при биениях амплитуда колебаний, проходя через один минимум, снова достигает своего максимального значения называют *периодом биений*

$$\tau = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

А частоту $\omega_6 = 2\pi/\tau$ — *частотой биений*.

$$\omega_6 = 2\pi/\tau = \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2. \quad (19)$$

Или проще $\nu_6 = \nu_1 - \nu_2$. Частота биений равна разности частот складываемых однонаправленных колебаний.

4. Связанные маятники.

Наблюдать биения можно в простой механической системе, представляющей собой два одинаковых маятника с жесткими стержнями, соединенными слабой пружиной ничтожной массы.

Маятники могут совершать колебания в одной плоскости, проходящей через точки подвеса и положения равновесия. Когда маятники висят вертикально, пружина не деформирована (см. рис. 3).

В отличие от колебательных систем, рассмотренных выше, такие связанные маятники представляют собой механическую систему с двумя степенями свободы. Для задания механического состояния этой системы нужно указать координаты и скорости обоих маятников, а любое сложное колебание двух связанных маятников можно представить как суперпозицию двух независимых более простых колебательных движений (подобно тому, как движение материальной точки на плоскости можно представить как сумму ее независимых движений вдоль двух взаимно перпендикулярных осей).

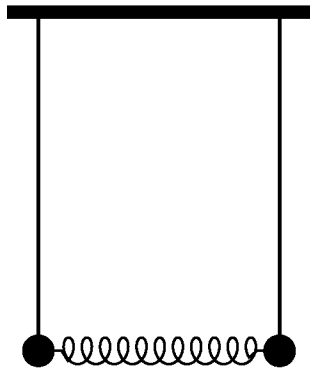


Рис. 3.

$$\omega_I = \sqrt{g/l} \quad (20)$$

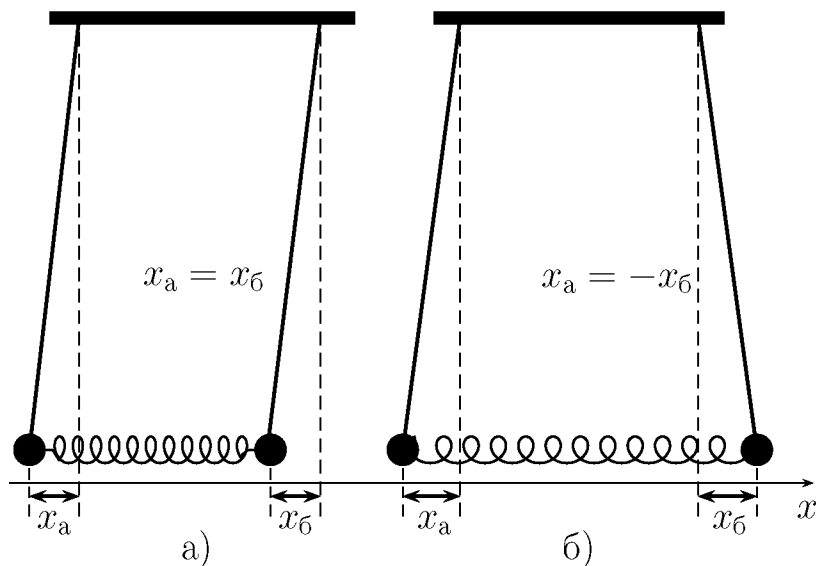


Рис. 4.

Какие же более простые колебательные движения возможны в системе двух связанных маятников? Очевидно вид этих простых колебаний определяется начальными условиями. Если, например, отклонить оба маятника из положения равновесия в одну и ту же сторону на один и тот же угол и отпустить (см. рис. 4 а), то маятники будут качаться синхронно, и пружина будет все время оставаться в недеформированном состоянии. Это значит, что пружина не оказывает на такое движение маятников никакого влияния. Каждый из маятников совершает гармоническое колебание, а амплитуды и фазы у них одинаковы. Частота этих колебаний ω_I совпадает с частотой собственных свободных гармонических колебаний одиночного маятника (см. (4)).

Но если отклонить маятники на одинаковый угол в противоположные стороны и отпустить (см. рис. 4 б), то маятники будут качаться в противофазе. Колебания маятников и в этом случае будут гармоническими, но частота этих колебаний ω_{II} будет больше, чем ω_I . Действительно, при колебаниях такого типа в каждый момент времени деформированная пружина стремится повернуть маятники в ту же сторону, что и сила тяжести, т. е. в положения их равновесия. Это и приводит к увеличению частоты колебаний относительно частоты свободных колебаний не связанного маятника.

Каждый из маятников будет совершать гармонические движения сим-

метрично относительно центра масс системы ”связанные маятники” — середины пружины, эта точка остается в покое, и ее можно считать закрепленной. В силу симметрии начальных условий колебаний в каждый момент времени абсолютное удлинение пружины будет равно удвоенному модулю смещения от положения равновесия одного из маятников, и на каждый из маятников помимо силы тяжести и реакции стержня будет действовать сила упругости пружины, равная по модулю произведению жесткости пружины на ее абсолютное удлинение. Таким образом, в известном вам уравнении свободных колебаний математического маятника появится дополнительное слагаемое

$$\ddot{x}(t) + \frac{g}{l} x(t) + \frac{k}{m} 2x(t) = 0.$$

Решением данного уравнения для маятника, отклоненного в начальный момент времени в сторону положительного направления выбранной оси x на A будет следующее выражение:

$$x(t) = A \cos(\omega_{II} t),$$

где

$$\omega_{II} = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}, \quad (21)$$

частота, с которой маятники совершают колебания в противофазе.

Рассмотренные колебания связанных маятников, зависящие от начальных условий, при которых каждый из маятников совершает гармоническое движение, носят название *нормальных колебаний* или *нормальных мод*. Число различных типов нормальных колебаний и соответствующих им частот равно числу степеней свободы системы. В рассмотренной системе двух связанных маятников два типа нормальных колебаний. Их называют *первая мода* или *мода I* и *вторая мода* или *мода II*.

Итак, любое собственное колебание двух связанных маятников можно представить как суперпозицию их нормальных колебаний.

Теперь рассмотрим, какое движение будут совершать связанные маятники при суперпозиции их нормальных колебаний с одинаковыми амплитудами. Обозначим смещения правого и левого маятников через x_a и x_b . Запишем выражения для смещений маятников в моде I и моде II:

$$x_a(t) = A \cos(\omega_I t), \quad x_b(t) = A \cos(\omega_I t), \quad (22)$$

$$x_a(t) = A \cos(\omega_{II} t), \quad x_b(t) = -A \cos(\omega_{II} t). \quad (23)$$

Складывая между собой смещения каждого маятника при этих колебаниях, получим следующее:

$$x_a(t) = A (\cos(\omega_I t) + \cos(\omega_{II} t)) = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right) \cos \omega_{cp} t \quad (24)$$

$$x_6(t) = A(\cos(\omega_I t) - \cos(\omega_{II} t)) = 2A \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right) \sin \omega_{cp} t \quad (25)$$

где $\omega_{cp} = (\omega_I + \omega_{II})/2$ — средняя частота и $\Delta\omega = (\omega_I - \omega_{II})$ — разность частот нормальных колебаний.

Если связывающая маятники пружинка очень слабая, то ее влияние на маятники мало, и поэтому частота ω_{II} мало отличается от частоты ω_I колебаний под действием только поля тяжести. Тогда сравнивая (24-25) с (16) можно видеть, что результатом сложения двух мод с близкими частотами будут *биения* в системе двух связанных маятников.

Какие же начальные условия приводят к биениям в системе двух связанных маятников? Из формул (24-25) видно, что в начальный момент времени $t = 0$ $x_a = 2A$, $x_6 = 0$. Это значит, что начальные условия, приводящие к такому движению, имеют вид: в начальный момент времени правый маятник смещен из положения равновесия вправо на величину $2A$, а левый маятник удерживается в положении равновесия. Легко видеть, что эти начальные условия представляют собой суперпозицию начальных условий для нормальных колебаний (22) и (23), как, разумеется, и должно быть.

Теперь посмотрим, к чему приводит суперпозиция двух мод колебаний связанных маятников с точки зрения энергии этих маятников.

С учетом (22) и (23), а также (8) нетрудно найти выражения для полной энергии каждого маятника. Будем считать амплитуды колебаний маятников практически постоянными в течение одного периода колебаний с частотой $\omega_{cp} \approx \omega_1 \approx \omega_2$, тогда из (22) и (23) легко получить значения амплитуд колебаний маятников в любой момент времени:

$$A_{ma} = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right); \quad A_{m6} = 2A \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right).$$

Пренебрегая энергией, передаваемой пружиной маятникам в течение одного периода колебаний, запишем выражения для полной энергии обоих маятников согласно (8):

$$E_a = \frac{1}{2} m \omega_{cp}^2 A_{ma}^2 = 2m A^2 \omega_{cp}^2 \cos^2\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right), \quad (26)$$

$$E_6 = \frac{1}{2} m \omega_{cp}^2 A_{m6}^2 = 2m A^2 \omega_{cp}^2 \sin^2\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right). \quad (27)$$

Полная энергия маятников в любой момент времени — величина постоянная (так как пружина слабая, то в ней никогда не будет запасено значительное количество энергии и последней можно без ущерба пренебречь, также напомним, что мы пока пренебрегаем трением в системе двух связанных маятников). Действительно, сложив (26) и (27) получим

$$E = E_a + E_6 = 2m A^2 \omega_{cp}^2. \quad (28)$$

Чтобы записать выражения для энергий каждого маятника в более удобном виде, вычислим разность энергий этих маятников:

$$E_a - E_6 = 2m A^2 \omega_{cp}^2 \left[\cos^2\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right) - \sin^2\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right) \right] = E \cos(\Delta\omega t)$$

С учетом последнего и того, что $\Delta\omega = \omega_6$ выражения (26) и (27) можно представить в виде:

$$E_a = \frac{1}{2} E (1 + \cos(\omega_6 t)), \quad (29)$$

$$E_6 = \frac{1}{2} E (1 - \cos(\omega_6 t)). \quad (30)$$

Из формул (28) и (29) следует, что *полная энергия маятников переходит от одного маятника к другому и обратно с частотой биений.*

Пока при рассмотрении биений связанных маятников мы пренебрегали трением. Посмотрим теперь, как трение влияет на колебания этих маятников. Можно указать на несколько причин затухания колебаний в системе связанных маятников:

- а) трение в подвесах маятников;
- б) внутреннее трение в пружине;
- в) трение маятников о воздух при колебаниях.

Можно предположить, что с учетом трения каждая мода становится подобной затухающим колебаниям в системе с одной степенью свободы (см. (9) и (10)) и имеет свой собственный коэффициент затухания β . Если внутреннее трение в пружине мало, то можно считать, что обе моды будут иметь близкие значения постоянных затухания β_I и β_{II} . Но если предпринять специальные меры, то можно добиться того, что эти коэффициенты для каждой моды будут различны.

Например, можно изготовить такую систему, в которой значительно затухание, обусловленное трением, возникающем в пружине при растяжении ее или сжатии. В этом случае мода II (при которой пружина сжимается и растягивается) будет иметь значительно большую постоянную затухания, чем мода I, когда длина пружины постоянна, т. е. $\beta_{II} \gg \beta_I$. В другом случае можно изготовить систему связанных маятников, когда быстрее затухает мода I, и колебание будет состоять почти полностью из одной моды II.

2. Описание установки

Для изучения колебаний связанных маятников в работе используется установка, схематически изображенная на рис. 5 а.

Каждый маятник представляет собой металлический стержень, к концу которого прикреплен металлический цилиндр массы m . В точках подвеса стержни закрепляются на жилках, длина стержней от точки закрепления до центра масс цилиндров равна l . Связь обеспечивается пружинками,

Diagram of a two-degree-of-freedom mechanical system. Two vertical bars of mass m are connected by two horizontal bars. The top horizontal bar has length l_0 and the bottom horizontal bar has length l_0 . The total height of the system is l . The bars are shown in a slightly deformed state, indicated by dashed lines.

Присоединение пружинок на некотором расстоянии от точки подвеса (а не на уровне центров масс цилиндров, т. е. на расстоянии l) приводит к тому, что мы можем коэффициент k , который присутствует в формуле (21) для подсчета частоты ω_{II} "эффективно" уменьшить. Для этого рассмотрим маятник в отклоненном положении (рис. 5 б).

Так как точка, к которой прикреплена пружинка, смещается под действием упругой силы на расстояние x_0 , то энергия, затраченная на отклонение маятника, запишется в виде: $\frac{1}{2} k x_0^2$. Это же выражение можно записать и через смещение. Действительно, из подобия треугольников NPR и NTM следует, что $\frac{x_0}{x} = \frac{l_0}{l}$ т. е.

Тогда выражение для энергии запишется в виде $\frac{1}{2} K x^2$, где

56

Таким образом, закреплением пружинок мы можем добиться того, чтобы разность частот ($\omega_{II} - \omega_I$) была мала, и эффект биений был наибольшим.

3. Порядок выполнения работы

1. Определение частоты моды I.

Отклоните оба маятника на одинаковый угол в одну сторону (угол не должен быть слишком большим) и отпустите. Этим мы возбудили моду I. Следите, чтобы пружинки не "работали". Измерьте время 20 колебаний. Все измерения проводите не менее трех раз. Частота $\nu_I = n/t$.

Сравните частоту моды I с вычисленной по формуле

$$\nu_I = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Результаты измерений и вычислений занесите в таблицу.

№	n	t	$\bar{t}$	ν_I	$\nu_I^{\text{выч}}$
1					
2					
3					

2. Определение частоты моды II.

Отклоните оба маятника на одинаковый угол в разные стороны (например, сближьте их) и отпустите. Частоту моды II получим аналогично предыдущему: $\nu_{II} = n/t$, где n — число наблюдаемых вами колебаний, t — время этих колебаний. Вычислите частоту колебаний моды II по формуле

$$\nu_{II} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2K}{m}},$$

где K определяется из (31). Результаты представьте таблицей аналогично пункту 1.

3. Определение частоты биения.

Возбудите сложное колебание. Для этого, например, левый маятник отклоните к правому, а правый удерживайте рукой. Отпустите их одновременно и в этот момент включите секундомер. Наблюдайте явление биений и замечьте момент времени, когда правый маятник остановится. Это будет период биений τ . Частота биений определится из $\nu_6 = 1/\tau$. Сравните эту величину с определенной теоретически: $\nu_6 = \nu_I - \nu_{II}$.

4. Наблюдение затухания моды II.

Возбудите сложное колебание (например, так, как в пункте 3). Используйте приспособление, которое "демпфирует" моду II. В качестве такого приспособления можно взять два кусочка бумаги, согнутые "крышечкой" и надеть их на пружинки (см. рис. 6 а). Этим самым мы увеличиваем трение для моды II, зависящее от растяжения пружинок, и, практически, не увеличиваем трение моды I. Через некоторое время после начала колебаний маятников вы увидите только моду I.

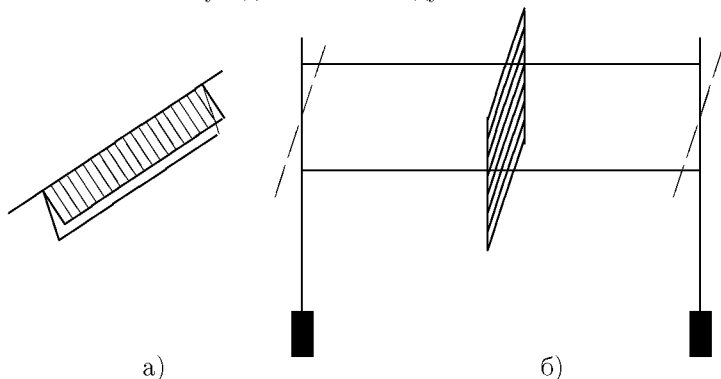


Рис. 6.

5. Наблюдение затухания моды I.

Возбудите сложное колебание (например, так, как в пункте 3). Используйте приспособление, которое "демпфирует" моду I, в качестве такого приспособления можно взять, например, кусочек плотной бумаги, прикрепленной к середине пружинок наподобие "паруса" (см. рис. 6 б). Так как в моде II середины пружинок не смещаются, то это приспособление практически не влияет на моду II и не изменяет коэффициент затухания для моды II β_{II} . В моде I середина пружинок смещается, и из-за трения "паруса" о воздух сильно увеличивается коэффициент затухания для моды I β_I . Через некоторое время после начала колебаний маятников вы увидите только моду II.

6. Построение графиков.

Изобразите графически колебания каждого маятника в случае биений. Для удобства анализа этих графиков поместите их один под другим и выполните в одинаковом масштабе.

4. Контрольные вопросы

1. В каких случаях система имеет одну, две, три, четыре и т. д. степени свободы?

2. Что такое гармоническое колебание? Получите формулу для ω_0 математического маятника и для маятника с пружиной. От чего зависит ω_0 ?
3. Как изменяется энергия при гармонических колебаниях? Получите формулу для энергии пружины (8).
4. Убедитесь, что решение уравнения (9) в случае слабого затухания можно записать в виде (10), изобразите это решение графически.
5. Получите формулу (11) для энергии в случае затухающих колебаний.
6. Получите формулы для сложения двух однонаправленных колебаний (24-25).
7. Что такое биения? Что называют частотой биений?
8. Опишите картину колебаний двух связанных маятников. Что такое нормальные колебания? Почему из сложного колебания можно выделить отдельные моды?
9. Получите формулы для частот ω_I и ω_{II} .
10. Почему разность $(\omega_I - \omega_{II})$ должна быть достаточно малой для наблюдения биений в системе двух связанных маятников? Как добиться того, чтобы $(\omega_I - \omega_{II}) \ll \omega_I, \omega_{II}$?
11. Покажите, что полная энергия маятников переходит от одного маятника к другому и обратно с частотой биений.
12. Назовите причины затухания колебаний в системе связанных маятников. Объясните влияние приспособлений из бумаги ("крышечек" и "паруса") на коэффициенты затухания первого и второго нормальных колебаний.

Список литературы

- [1] *Д.В. Сивухин*. Механика. – М.: Наука, 1989. – Т.I. – 576 с.
- [2] *С.Г. Стрелков*. Механика. – М.: Наука, 1975. – 559 с.
- [3] *И.В. Савельев*. Механика. Молекулярная физика. – М.: Наука, 1977 – Т.I. – 416 с.

Механические колебания

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:	<i>изучение собственных колебаний пружинного маятника.</i>
ОБОРУДОВАНИЕ:	набор пружин и грузов, штатив, секундомер, сосуд с водой

1. Теоретическое введение

Колебательные движения, или колебания, очень широко распространены в природе. Примером колебаний может служить движение груза, прикрепленного к пружине, или шарика, подвешенного на нити, если они не находятся в состоянии покоя.

Характерным признаком колебательного движения является то, что при таком движении характеристики движения тела: координаты, импульс, скорость повторяются или почти повторяются через одинаковые или почти одинаковые промежутки времени.

1. Рассмотрим следующий пример (рис. 1). На гладкой горизонтальной поверхности лежит тело массой m , прикрепленное к невесомой пружине. Трение учитывать не будем. Направим ось x вдоль поверхности так, чтобы начало координат совпало с положением тела. Обозначим единичный вектор оси $0x$ через $\vec{i}$. При отклонении тела от положения равновесия на расстояние $x = A$, возникающая сила упругости $\vec{F} = -k\vec{x}$ стремится вернуть тело в исходное положение. Так как трение отсутствует, то работа силы упругости полностью перейдет в кинетическую энергию тела, и оно вернется в положение равновесия ($x = 0$), имея некоторую скорость. Далее тело по инерции пройдет положение равновесия и начнет отклоняться в другую сторону. При этом сила упругости затормозит движение тела до его остановки в точке $x = -A$, после чего процесс повторится в обратном направлении. Возникнет колебательное движение.

Для математического описания процесса воспользуемся 2-м законом Ньютона

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i. \quad (1)$$

Согласно ему произведение массы m на ускорение $\vec{a}$ равно равнодействующей всех сил, приложенных к телу. В данном случае это будут следующие силы: сила упругости, пропорциональная удлинению пружины $\vec{F} = -k\vec{x} = -kx\vec{i}$, сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$.

$$m\vec{a} = -kx\vec{i} + m\vec{g} + \vec{N}. \quad (2)$$

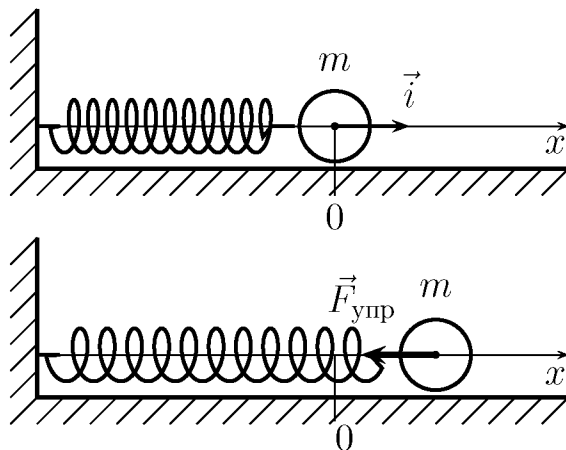


Рис. 1.

Спроектируем это уравнение на ось $0x$. Получим

$$ma_x = -kx. \quad (3)$$

Ускорение — это вторая производная координаты по времени:

$$a_x \equiv \frac{d^2 x}{dt^2} \equiv \ddot{x}.$$

Подставим в уравнение (3) выражение для ускорения, разделим обе части уравнения на m (т. к. масса шарика не равна нулю, то это можно сделать) и перенесем все в левую сторону. Тогда получим

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) — это дифференциальное уравнение 2-го порядка. Решить такое уравнение, значит найти x как функцию времени, т. е. найти какие значения x имеет шарик в различные моменты времени. Решать это уравнение мы будем методом подбора. Нам нужно найти такую функцию, вторая производная которой имела бы такой же вид, как и сама функция: $f''(t) \sim f(t)$. Очевидно, что функции $f(t) = b\sin(\Omega t + \Phi)$ и $f(t) = b\cos(\Omega t + \Phi)$ удовлетворяют этому требованию¹. Например, одним

¹Ввиду того, что уравнение движения является дифференциальным уравнением второго порядка в его решение входят две произвольные постоянные (в данном случае b и Φ), которые должны быть определены из начальных условий. Параметр Ω определяется коэффициентом при x

из возможных решений уравнения (4) будет

$$x = A \cos \omega_0 t,$$

где A , ω_0 — некоторые постоянные величины. Найдём первую и вторую производную x по времени

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} \equiv v_x = -\omega_0 A \sin \omega_0 t,$$

$$\ddot{x} \equiv \frac{d^2 x}{dt^2} \equiv \frac{dv_x}{dt} \equiv \frac{d}{dt}(\dot{x}) = -\omega_0^2 A \cos \omega_0 t,$$

и подставим в уравнение (4)

$$-\omega_0^2 A \cos \omega_0 t + \frac{k}{m} A \cos \omega_0 t = 0.$$

Уравнение будет превращаться в тождество в случае

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (5)$$

при любом A . Следовательно, функция

$$x = A \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \quad (6)$$

является решением уравнения (4) движения груза на пружине. Здесь величина A имеет смысл наибольшего отклонения груза от положения равновесия и называется *амплитудой колебаний*, величина $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ характеризует быстроту протекания процесса и называется *циклической частотой*.

Время одного колебания, носящее название *периода колебаний*, и циклическая частота связаны формулой

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Используя выражение (5), получим формулу для периода колебаний пружинного маятника

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (7)$$

Из формулы видно, что с увеличением жесткости пружины период T_0 уменьшается, а увеличение массы увеличивает период. Следует отметить, что величина силы тяжести не влияет на движение груза на пружине. Период колебаний такой системы не изменится, если расположить пружину вертикально. Следовательно груз, подвешенный на пружине, будет одинаково колебаться в различных точках поверхности земного шара.

2. Рассмотрим далее так называемый *математический маятник* — подвешенный на невесомой нерастяжимой нити маленький шарик, размерами которого можно пренебречь по сравнению с длиной нити (рис. 2). Как и в первом случае пренебрежем силой трения. Будем считать, что смещение маятника настолько мало, что его можно отсчитывать по оси Ox , т. е. дуга совпадает с хордой.

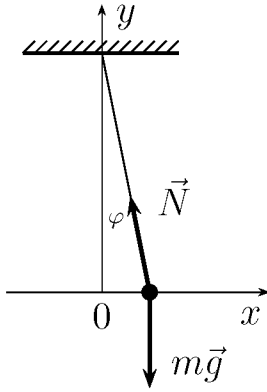


Рис. 2.
вое уравнение получим

Запишем 2-й закон Ньютона для математического маятника

$$m\vec{a} = \vec{N} + m\vec{g}. \quad (8)$$

Спроектируем это уравнение на оси Ox и Oy

$$\begin{aligned} ma_x &= -N \sin \varphi, \\ ma_y &= N \cos \varphi - mg. \end{aligned} \quad (9)$$

Так как смещением по оси Oy мы пренебрегаем, считая, что угол мал, то $a_y = 0$, $a_x = a$. Из второго уравнения (9)

$$N = mg / \cos \varphi.$$

Подставляя выражение для N в пер-

$$ma_x = ma = -mg \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = -mg \operatorname{tg} \varphi. \quad (10)$$

Так как φ мало, то $OC = l$ и

$$\operatorname{tg} \varphi \approx \frac{x}{l}. \quad (11)$$

Тогда из (10) и (11)

$$ma = -mg \frac{x}{l}. \quad (12)$$

Выполнив такое же преобразование как для уравнения (3), будем иметь

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0. \quad (13)$$

Сравнивая его с уравнением (4), мы видим, что оно отличается только коэффициентом при x . По аналогии с (4) решением данного уравнения будет

$$x = x_m \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t \quad (14)$$

Итак, при малых углах отклонения возвращающая сила пропорциональна смещению x (см. формулу (12)). Такая сила называется упругой

или квазиупругой. Теперь можно дать определение: **колебания, совершающиеся под действием упругой или квазиупругой силы, называются гармоническими.** Или, т. к. решением уравнения движения является функция синус или косинус, то можно предложить другое определение: **колебания, при которых изменение всех характеристик движения описывается функцией синус или косинус, называются гармоническими.**

3. Пусть теперь на систему кроме квазиупругой силы действует и сила трения. Вследствие этого механическая энергия колебательной системы непрерывно уменьшается. Интересным является случай, когда потери энергии обусловлены наличием сопротивления, величина которого пропорциональна скорости колеблющейся массы

$$R = -\eta v = -\eta \frac{dx}{dt}.$$

Здесь минус обозначает, что сопротивление R уменьшает скорость движения, а величина $\eta = \text{const}$ представляет собой коэффициент сопротивления. Таково, например, сопротивление вязкого трения. Запишем, как в предыдущих случаях, 2-й закон Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R} = -k\vec{x} - \eta\vec{v}. \quad (15)$$

В проекции на ось $0x$ имеем

$$ma_x = -kx - \eta v_x. \quad (16)$$

Заменив a_x на $\ddot{x}$, v_x на $\dot{x}$, перенеся все члены в левую сторону, разделив на m и обозначив $k/m = \omega_0^2$, $\eta/2m = \delta$ получим

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (17)$$

Это уравнение отличается от (4) наличием члена с первой производной от x . Если $\delta = 0$, то (17) перейдет в (4). Уравнение (17) можно привести к уравнению гармонических колебаний вида (4). Для этого применим подстановку $x = \xi(t)e^{-\delta t}$ и, найдя $\dot{\xi}$, $\ddot{\xi}$, подставим их в (17). Получим

$$\ddot{\xi} + (\omega_0^2 - \delta^2)\xi = 0. \quad (18)$$

или, введя обозначение

$$\omega_0^2 - \delta^2 = \omega^2 \quad (19)$$

приводим (18) к виду

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = 0. \quad (20)$$

Решение уравнения (20) имеет вид (см. уравнение (4))

$$\xi = A_0 \cos \omega t,$$

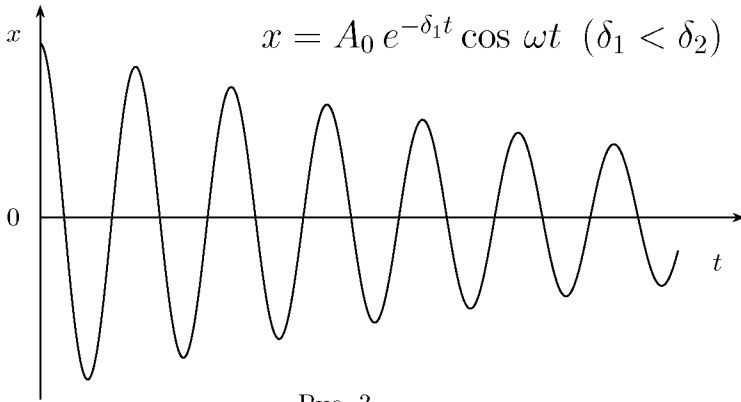


Рис. 3.

где A_0 — постоянная. Вернувшись к переменной x , находим окончательное решение уравнения (17)

$$x = \xi(t)e^{-\delta t} = A_0 e^{-\delta t} \cos \omega t. \quad (21)$$

Таким образом, в результате совместного действия квазиупругой силы $\vec{F} = -k\vec{x}$ и силы трения $\vec{R} = -\eta\vec{v}$ система совершает колебательное движение, амплитуда которого

$$A(t) = A_0 e^{-\delta t} \quad (22)$$

убывает с течением времени по экспоненциальному закону, т. е. в системе возникают затухающие колебания. Частота ω затухающих колебаний, как видно из (19), зависит не только от параметров системы m и k , но и от коэффициента η , характеризующего силу трения. Очевидно, что циклическая частота затухающих колебаний меньше циклической частоты колебаний системы при отсутствии потерь:

$$\omega < \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

период же T затухающих колебаний больше периода T_0 свободных колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} > T_0.$$

На рис. 3 и 4 приведены графики изменения x для двух различных значений δ . Из приведенных графиков видно, что параметр δ характеризует

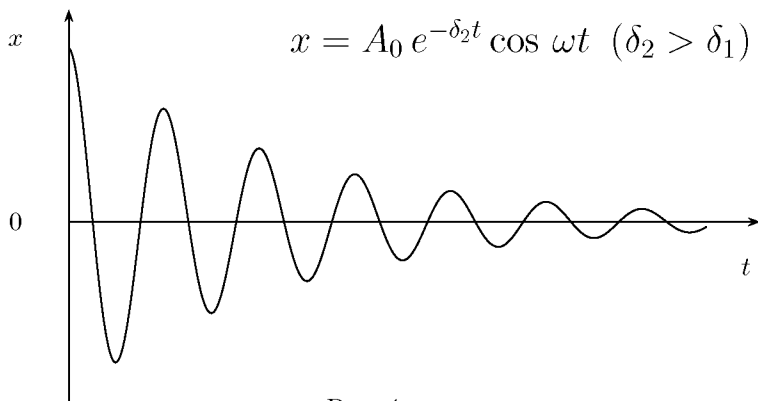


Рис. 4.

быстроту затухания колебаний; величину δ называют *коэффициентом затухания*.

Возьмем отношение двух амплитуд (22), разделенных во времени интервалом в одну секунду

$$\frac{A(t)}{A(t+1)} = \frac{A_0 e^{-\delta t}}{A_0 e^{-\delta(t+1)}} = e^{\delta}.$$

Логарифмируя, получим

$$\ln \frac{A(t)}{A(t+1)} = \delta. \quad (23)$$

Так как для данной системы $\delta = \pi/2m = \text{const}$, то отношение двух амплитуд, разделенных интервалом в одну секунду, всегда одно и то же. Удобно пользоваться так называемым *логарифмическим декрементом затухания*. Эта величина равна логарифму отношения двух последовательных амплитуд, разделенных промежутком времени, равным периоду

$$\Theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\delta t}}{A_0 e^{-\delta(t+T)}} = \delta T. \quad (24)$$

Таким образом, логарифмический декремент затухания в T раз больше, чем коэффициент затухания. Так как δ и T постоянны, то и $\Theta = \text{const}$. А это означает, что отношение двух амплитуд, отстоящих во времени на один период, постоянно и не зависит от выбора момента времени t .

2. Порядок выполнения работы

1. Определение коэффициента упругости пружин.

Коэффициент упругости находим для каждой пружины, используя три различных груза m . Сначала взвешиваем грузы, затем подвешиваем их к пружине и измеряем смещение x . Построив график зависимости F от x , находим коэффициент упругости для каждой пружины. Результаты заносим в таблицу.

№ пружины	№ опыта	m	x	$\bar{k}$
1	1			
	2			
	3			
	1			

2. Определение зависимости периода собственных колебаний пружинного маятника от массы груза.

Для этого находим период T_0 собственных колебаний для одной из пружин при разных массах грузов m . Строим график зависимости T от m (по оси абсцисс откладываем массу m). Период T_0 определяем, измеряя секундомером время 10–15 полных (туда и обратно) колебаний, не менее трех раз. $T_0 = \frac{t}{n}$, где t — время n полных колебаний. Результаты заносим в таблицу.

k	№ опыта	m	T_0
	1		
	2		

3. Определение зависимости периода собственных колебаний пружинного маятника от коэффициента упругости пружины

Для этого измеряем периоды T_0 собственных колебаний груза массой m на различных пружинах и строим график зависимости T_0^2 от k (по оси абсцисс откладываем значения k). Измерения аналогичны указанным в пункте 2. Результаты заносим в таблицу.

m	№ опыта	k	T_0
	1		
	2		

4. Вычисление коэффициентов упругости пружин.

По формуле $k = \frac{4\pi^2 m}{T_0^2}$, полученной из (7), вычисляем коэффициенты упругости пружин, используя значения T_0 , полученные в пункте 3. Вычисленные значения k сравниваем с полученными в пункте 1. Результаты заносим в таблицу.

№ пружины	k из п.1	k из п.3
1		
2		

5. Определение логарифмического декремента затухания пружинного маятника

Сначала получим формулу, удобную для экспериментального определения логарифмического декремента затухания Θ . Для этого формулу (24) преобразуем для случая n периодов. Вычислим отношение для двух амплитуд для времени t_0 и $t_0 + \Delta t = t_0 + nT$, т. е. $d = \frac{A(t_0)}{A(t_0 + nT)}$, где T — период затухающих колебаний. В это выражение подставляем значения

$$A(t_0) = A_0 e^{-\delta t}, \quad A(t_0 + nT) = A_0 e^{-\delta(t_0 + nT)}$$

и получаем $d = e^{\delta T n}$. После логарифмирования будем иметь:

$$\ln \frac{A(t_0)}{A(t_0 + nT)} = \ln d = \delta T n = n\Theta.$$

$$\text{Отсюда} \quad \Theta = \frac{1}{n} \ln d.$$

Маятник помещаем в сосуд с жидкостью и приводим в движение. В этом эксперименте используем груз, с которым проводились измерения в п. 3 и пружину, применявшуюся в п. 2. Первоначальную амплитуду колебаний маятника берем равной 50–70 мм. Измеряем число колебаний n , за которое амплитуда A_0 уменьшится в d раз (обычно $d = 10$, т. е. $A \approx 0.1A_0$). Вычисляем Θ по полученной выше формуле. Измерения проводим не менее трех раз для каждой из трех начальных амплитуд A_0 . Измерения и результаты вычислений заносим в таблицу.

A_0	№ опыта	n	d	Θ
1	1			
	2			
	3			
2	1			

6. Определение коэффициента сопротивления среды

По найденному логарифмическому декременту затухания находим коэффициент сопротивления среды: $\eta = 2m \frac{\Theta}{T_0}$.

3. Контрольные вопросы

- Исходя из (6), покажите, что максимальное отклонение тела от положения равновесия есть A_0 .

2. Покажите, что период колебаний $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.
3. Запишите уравнение движения груза на пружине в поле тяжести.
4. Покажите, что (14) является решением (13).
5. Применяя подстановку $x = \xi(t)e^{-\delta t}$, из уравнения (17) получите уравнение (18).
6. Почему на некоторых графиках строится зависимость функции от квадрата аргумента, а на других от его первой степени?
7. Начертите график зависимости амплитуды колебаний от времени при наличии в системе силы вязкого трения.

Список литературы

- [1] *С. Э. Хайкин*. Физические основы механики. М.: Наука, 1971, 752 с.
- [2] *И. В. Савельев*. Курс физики.— Т.I — М.: Наука, 1989.
- [3] *Д. В. Сивухин* Общий курс физики.— Т.I. Механика. — М.: Наука, 1989.
- [4] *С. П. Стрелков*. Механика. М.: Наука, 1975, 560 с.

Колебания струны

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: *изучение колебаний струны и градуировка шкалы частот звукового генератора.*

ОБОРУДОВАНИЕ: *стойка со струной, звуковой генератор, разновесы.*

1. Теоретическое введение

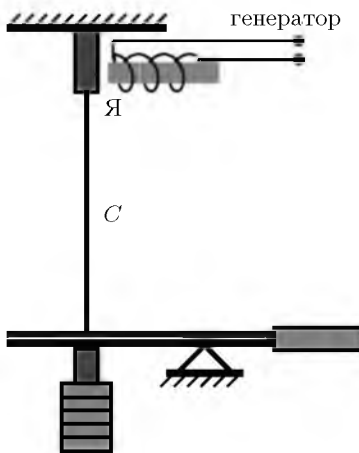


Рис. 1.

В работе исследуются колебания натянутой струны. Схема экспериментальной установки изображена на рис. 1. Нижний конец вертикально висящей струны C несет чашку весов, верхний конец прикреплен к язычку $Я$ электромагнитного вибратора, служащего для возбуждения колебаний. Обмотки вибратора запитываются синусоидальным током от звукового генератора.

Если нагрузить чашку весов и включить звуковой генератор, от вибратора по струне побегут поперечные волны, которые, отражаясь от концов, образует сложную картину колебаний. Медленно изменяя частоту звукового генератора,

можно заметить, что колебания струны при некоторых частотах стабилизируются — образуют стоячую волну. При этом струна делится неподвижными точками — узлами на несколько равных отрезков. Амплитуда колебаний отдельных точек струны перестает при этом зависеть от времени и определяется только их положением на струне.

При изменении нагрузки на чашке весов картина размывается. Меняя частоту звукового генератора можно получить стоячие волны при новой нагрузке. Таким образом, частота стоячей волны зависит от натяжения струны. Получим формулу, связывающую частоту стоячих колебаний струны с ее натяжением.

Рассмотрим колебания гибкой однородной струны с закрепленными концами. Проанализируем движение отрезка dx струны в направлении

оси OX (рис. 2).

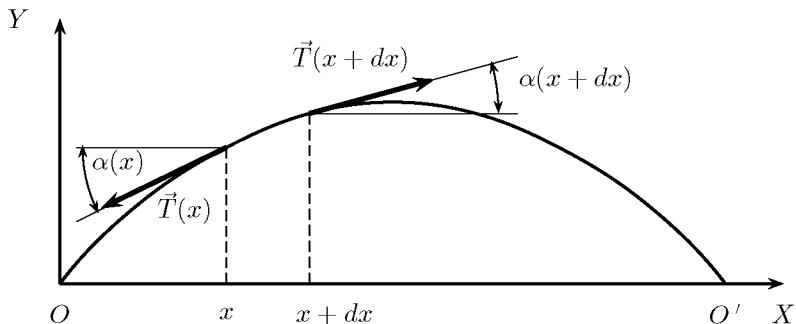


Рис. 2.

На этом участке действуют силы натяжения в точках O и O' . Эти силы направлены по касательной к струне и при малых колебаниях одинаковы по абсолютной величине. Нас интересует движение участка струны вдоль оси OY . Проекции силы натяжения струны T на ось OY , взятые в точках x и $x + dx$, при малых углах α равны

$$T \sin \alpha(x) \approx T \operatorname{tg} \alpha(x) = T \left. \frac{dy}{dx} \right|_x,$$

$$T \sin \alpha(x + dx) \approx T \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x+dx}.$$

Разность этих проекций и есть проекция силы, приводящей в движение участок dx . По второму закону Ньютона имеем:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum_i F_i.$$

Подставляя выражение для сил натяжения, имеем

$$\rho dx \frac{d^2 y}{dt^2} = T \left(\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x+dx} - \left. \frac{dy}{dx} \right|_x \right), \quad (1)$$

где ρ — погонная плотность, т. е. масса единицы длины струны, а ρdx — масса отрезка струны dx . Разделив обе части последнего соотношения на dx и введя обозначение $C^2 = \frac{T}{\rho}$ или

$$C = \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad (2)$$

получим

$$C^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (3)$$

Выражение $\frac{d^2 y}{dx^2}$ получилось из выражения $\left(\frac{dy}{dx} \Big|_{x+dx} - \frac{dy}{dx} \Big|_x \right) / dx$.

Действительно, $\frac{dy}{dx}$ есть некоторая функция $f(x)$, и мы имеем

$$\frac{f(x+dx) - f(x)}{dx},$$

т. е. определение производной от функции $f(x)$. Кроме того,

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Уравнение (3) называется **волновым уравнением**. Это уравнение в частных производных.

Для нашей задачи можно найти его решение из физических соображений. Так как конец струны связан с вибратором, колеблющимся по гармоническому закону, то вдоль струны от вибратора бежит монохроматическая волна:

$$y_1 = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right), \quad (4)$$

где x — расстояние до точки на струне, v — скорость волны, ω — круговая частота, $\omega = 2\pi\nu$.

Отразившись от нижнего конца, волна бежит обратно, складываясь с волной, идущей от вибратора. Отраженная волна записывается в виде

$$y_2 = A \cos \left(\omega \left(t - \frac{2L-x}{v} \right) - \pi \right). \quad (5)$$

Здесь L — длина струны, $2L-x$ — расстояние, пройденное волной от вибратора до конца струны и обратно до точки x . π появляется в связи с тем, что при отражении теряется полуволна. Результирующее отклонение точки y на струне при непрерывно работающем вибраторе

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 = A \left[\cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \cos \left(\omega \left(t - \frac{2L-x}{v} \right) - \pi \right) \right] = \\ &= A \left[\cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \cos \omega \left(t - \frac{2L-x}{v} \right) \right] = 2A \sin \left(\frac{x-L}{v} \right) \sin \left(t - \frac{L}{v} \right). \end{aligned}$$

Итак,

$$y = 2A \sin \left[\omega \frac{x-L}{v} \right] \sin \left[\omega \left(t - \frac{L}{v} \right) \right]. \quad (6)$$

Из выражения (6) видно, что разные точки колеблются с разной амплитудой $2A \sin\left[\omega \frac{x-L}{v}\right]$ по гармоническому закону $\sin\left[\omega\left(t - \frac{L}{v}\right)\right]$. Теперь учтем, что на концах струна закреплена, т. е. $y(0) = y(L) = 0$. Подставим $x = 0$ и $x = L$ в (6) и потребуем $y(0) = 0$ и $y(L) = 0$. Тогда получим

$$-2A \sin\left(\omega \frac{L}{v}\right) \sin \omega \left(t - \frac{L}{v}\right) = 0, \quad (7)$$

$$2A \sin\left(\omega \frac{L-L}{v}\right) \sin \omega \left(t - \frac{L}{v}\right) = 0. \quad (8)$$

Равенство (7) будет верным при любом t только если $\frac{\omega L}{v} = n\pi$.

Но $\omega = 2\pi\nu$ и тогда $\frac{2\pi\nu L}{v} = n\pi$; $n = 0, 1, 2, \dots$. Так как $\frac{\nu}{v} = \frac{1}{\lambda}$, это значит, что $n\frac{\lambda}{2} = L$, т.е. на струне будет укладываться целое число полуволн.

Учитывая, что $\frac{\omega L}{v} = n\pi$, перепишем формулу (6) в виде

$$y = 2A \sin \frac{\omega x}{v} \sin \omega t. \quad (9)$$

Проверим, является ли полученная формула для стоячей волны решением уравнения (3). Для этого подставим (9) в (3) и продифференцируем. Получим

$$-C^2 \frac{\omega^2}{v^2} 2A \sin \frac{\omega x}{v} \sin \omega t = -\omega^2 2A \sin \frac{\omega x}{v} \sin \omega t. \quad (10)$$

Отсюда видно, что при $v = C$ выражение (10) истинно. Итак, стоячая волна описывается уравнением

$$y = y_0 \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi n C}{L} t\right) = y_0 \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho}} t\right). \quad (11)$$

Здесь учтено, что $v = C$ и $\frac{\omega}{v} = \frac{\pi n}{L}$, причем n — любое число, y_0 — амплитуда колебаний в точках x_0 , где $\sin \frac{\pi n x_0}{L} = 1$.

Рассмотрим выражение (11) несколько подробнее. Точки, в которых $\sin \frac{\pi n x_0}{L}$ обращается в нуль, являются **узлами** стоячей волны. Между двумя соседними узлами все участки струны колеблются в фазе (их отклонения имеют одинаковый знак), при переходе через узел фаза колебаний изменяется вдоль струны по гармоническому закону, а частота колебаний всех точек струны постоянна и равна $\frac{\pi n C}{L}$ (n — в выражении (11) определяет число **пучностей**, т. е. максимумов колебаний, но не узлов). Пусть $n = 2$, тогда $\sin \frac{\pi n x}{L} = 0$ при $x = \frac{L}{4}$ и $x = \frac{3L}{4}$.

Из выражения $\frac{2\pi\nu L}{v} = n\pi$; $n = 0, 1, 2, \dots$ получим формулу для собственных частот струны, т. е. частот, при которых в струне устанавливаются стоячие волны:

$$\nu = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad \nu = \frac{nC}{2L}. \quad (12)$$

Заметим, что определяемые формулой (12) собственные частоты не зависят от материала струны. Данный, на первый взгляд, парадоксальный результат является следствием того, что мы пренебрегли деформацией струны при колебаниях. В условиях нашего опыта это предположение хорошо выполняется.

Из соотношения (11) видно, что точки струны с координатами $x = 0, \frac{L}{n}, \frac{2L}{n}$ являются узлами. Передача энергии по струне производится только бегущей волной.

Отметим также, что волновому уравнению удовлетворяет не только решения в форме (11), но и сумма выражений типа (11) с различными n :

$$y(x, t) = \sum_n y_{n0} \sin\left(\frac{\pi n}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho}} t\right). \quad (13)$$

Таким образом, в струне могут одновременно существовать колебания с различными собственными частотами. Так, наряду с основными тонами ($n = 1$) могут возбуждаться обертоны. Обертонами называют колебания, которые происходят с частотами кратными основной частоте тона ($n = 2, 3, 4, \dots$).

Выясним, при каких условиях развитая выше теория, описывающая, строго говоря, только движение идеально гибкой струны, верна. С этой целью сделаем ряд замечаний.

1. При колебаниях реальной струны всегда происходят потери энергии. Для поддержания незатухающих колебаний служит вибратор. Если, однако, потери энергии за период малы по сравнению с запасом колебательной энергии в струне, то искажения стоячих волн бегущей волной не очень существенны.

Так как энергия волны пропорциональна квадрату амплитуды, то наше условие может быть переписано в виде:

$$a^2 \ll y_0^2, \quad (14)$$

где a — амплитуда бегущей волны, которую можно измерить по размытию узла, y_0 — амплитуда стоячей волны (определяемая, естественно, в пучности, примыкающей к узлу).

2. Выше рассматривалась струна с жестко закрепленными концами, что в реальных условиях может не выполняться. Поэтому справедливость выведенных формул может быть поставлена под сомнение. Проще всего

перейти от рассмотрения всей струны к рассмотрению ее участка, расположенного между двумя узлами. В этом случае применимость формул становится очевидной.

3. При наблюдении стоячих волн на установке легко заметить, что струна не колеблется в одной плоскости, а совершает вращательное движение, которое может быть представлено как сумма колебаний в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, так что все предыдущие выводы остаются в силе.

2. Порядок выполнения работы

1. Ознакомьтесь с инструкцией, излагающей правила работы со звуковым генератором. Изучите конструкцию установки. Уясните назначение всех ее элементов.
2. Включите звуковой генератор: установите частоту на нуль (см. инструкцию к использованию генератора). Нагрузив струну и вращая ручку изменения частоты генератора, получите стоячие волны.
3. Увеличивая частоту звукового генератора при некотором постоянном натяжении струны, получите стоячие волны, соответствующие $n = 1, 2, 3, \dots$ (максимальное значение n следует брать не менее 8). Фиксируя каждый раз показания лимба звукового генератора, повторите процесс измерения 3–4 раза. Прodelайте эти измерения при различных значениях (не менее 3-х) натяжений струны.
4. Фиксируя частоту звукового генератора и меняя силу натяжения струны, получите стоячие волны, соответствующие различным n . Каждое измерение проводите не менее трех раз. Повторите эксперимент при других частотах. Проверьте, соответствуют ли полученные результаты формуле (12) (легко видеть, что при фиксированной частоте отношения грузов зависят только от n).
5. Результаты эксперимента представьте в виде графика, откладывая по оси абсцисс значения соответствующих частот, отчитанные по лимбу звукового генератора, а по оси ординат — собственные частоты, вычисленные по формуле (12). Совпадают ли измеренные и рассчитанные значения? Какие причины могут привести к их расхождению?
6. При проведении эксперимента проверьте справедливость условия (14). Если оно выполняется недостаточно хорошо, надо уменьшить выходную мощность звукового генератора. Погонная плотность струны $\rho = 0,93 \cdot 10^2$ г/см.

3. Контрольные вопросы

1. Какие механические процессы называют волновыми?
2. Напишите уравнение бегущей волны.
3. Непосредственной подстановкой убедитесь, что волновому уравнению (3) удовлетворяет не только решение типа (6), но и функции $y = f(x + ct)$ и $y = f(x - ct)$, где f — произвольная функция, описывающая бегущую волну. Определите скорость распространения колебаний в струне.
4. Представьте стоячую волну как результат сложения (суперпозиции) двух бегущих гармонических волн равных амплитуд и частот. Используйте полученные результаты для объяснения процесса установления стоячих волн в струне после включения прибора.
5. Покажите, что вращательное движение может быть представлено как сумма двух колебаний.
6. Дайте определение продольных, поперечных и стоячих волн.
7. Укажите основные характеристики гармонических колебаний.

Список литературы

- [1] *С. Э. Хайкин*. Физические основы механики. М.: Наука, 1971, 150
- [2] *И. В. Савельев*. Курс общей физики.— Т.I — М.: Наука, 1989. 77,80,84,85
- [3] *С. П. Стрелков*. Механика. М.: Наука, 1965., 136,139,141–143

Определение ускорения свободного падения методом обратного маятника

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: *изучение метода Бесселя, определение ускорения свободного падения.*

ОБОРУДОВАНИЕ: *лабораторная установка.*

1. Теоретическое введение

Физический маятник.

Для определения ускорения свободного падения в данной работе используется физический маятник с двумя осями вращения.

Физическим маятником будем называть абсолютно твердое тело, способное совершать колебания относительно неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через центр тяжести. Получим уравнение движения такого тела. На рис. (1) изображена модель физического маятника массой m . Ось вращения z проходит через точку O перпендикулярно оси рисунка. Точка C является центром тяжести маятника и находится от оси на расстоянии l .

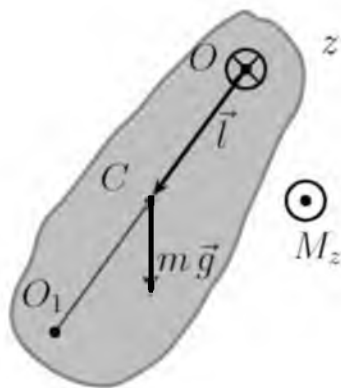


Рис. 1.

Запишем уравнение динамики вращательного движения для рассматриваемого тела:

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = M_z. \quad (1)$$

Найдем проекцию момента внешних сил M_z на ось вращения z . На тело действуют сила тяжести и реакция опоры. Так как сила реакции опоры приложена к оси вращения, то эта сила не создает вращающего момента. Момент силы тяжести по определению равен

$$\vec{M} = [\vec{l}, m \vec{g}]. \quad (2)$$

Так как векторы $\vec{l}$ и $\vec{g}$ находятся в плоскости рисунка, то результат их векторного произведения — вектор $\vec{M}$ будет перпендикулярен плоскости рисунка и направлен против оси z , т. к. поворот от $\vec{l}$ к $\vec{g}$ происходит против часовой стрелки. Из сказанного следует, что

$$M_z = -|\vec{M}| = -|\vec{l}| |m\vec{g}| \sin \varphi = -mgl \sin \varphi. \quad (3)$$

Подставим (3) в (1):

$$\varphi'' + \frac{mgl}{I} \sin \varphi = 0 \quad \text{или} \quad I\varphi'' = -mgl \sin \varphi \quad (4)$$

Если рассматривать малые отклонения маятника от положения равновесия ($|\varphi| \ll 1$), то в (4) $\sin \varphi$ можно заменить на φ . В этом случае получится уравнение гармонического осциллятора:

$$\varphi'' + \frac{mgl}{I} \varphi = 0. \quad (5)$$

Решением уравнения (5) является гармоническая функция

$$\varphi = A \cos \left(\sqrt{\frac{mgl}{I}} \cdot t + \alpha \right). \quad (6)$$

Из равенств (5), (6) следует, что рассматриваемое тело будет совершать гармонические колебания с циклической частотой:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}} \quad (7)$$

и периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}. \quad (8)$$

Соотношение (8) может быть использовано для определения g . Для этого необходимо измерить T , I и l и выразить через них g с помощью формулы (8).

Оказывается, однако, что с высокой точностью можно измерить только период колебаний T маятника, а величины I и l достаточно точно измерить не удастся. Например, для нахождения расстояния l от оси вращения до центра тяжести маятника необходимо предварительно определить положение центра тяжести, что сделать точно довольно трудно.

Математический маятник.

Частным случаем физического маятника является математический маятник. *Математическим маятником* называется материальная точка m , подвешенная на нерастяжимой нити длины L_0 .

Момент инерции материальной точки, вращающейся по окружности радиуса L_0 , определяется как

$$I = mL_0^2 \quad (9)$$

Подставляя (9) в (8) и учитывая, что $l = L_0$, получим циклическую частоту и период для колебаний математического маятника:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L_0}}, \quad (10)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L_0}{g}}. \quad (11)$$

Из равенств (8) и (11) следует, что математический маятник и физический маятник будут иметь одинаковые периоды колебаний, если выполнится соотношение $L_0 = I/ml$. Величину L_0 называют *приведенной длиной физического маятника*.

Оборотный маятник.

На рис. (1) точка O , через которую проходит ось вращения z , называется *точкой подвеса*.

Точка O_1 , лежащая на линии OC на расстоянии, равном приведенной длине физического маятника от точки подвеса ($OO_1 = L_0$), называется *центром качания физического маятника*.

Точка подвеса O и центр качания O_1 обладают *свойством взаимности*: при переносе точки подвеса в точку O_1 точка O становится центром качания, так что период колебаний маятника не изменяется.

Физический маятник с двумя осями вращения называется *оборотным*. Период колебаний оборотного маятника не изменяется при переносе точки подвеса в центр качания и наоборот, что и отражает название маятника.

Метод определения ускорения свободного падения с помощью оборотного маятника называют *методом Бесселя*.

В лабораторной установке оборотный маятник представляет собой стальной стержень, на котором укреплены два массивных груза Γ_1 и Γ_2 . Две легкие опорные призмы Π_1 и Π_2 могут перемещаться по стержню и фиксироваться с помощью винтов в разных его точках. Маятник может колебаться в вертикальной плоскости, опираясь нижним ребром одной из призм на закрепленную на массивном штативе опорную площадку (рис. 2).

Пусть $T(l_1)$ и $T(l_2)$ — периоды колебаний маятника на призмах Π_1 и Π_2 соответственно. l_1 и l_2 — расстояния от призм до центра тя-

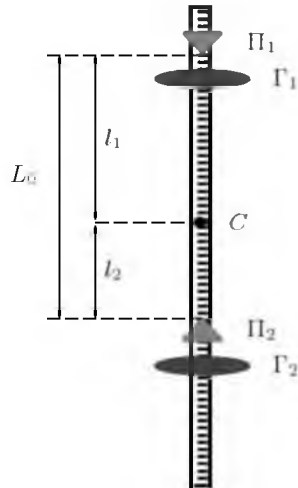


Рис. 2.

жести маятника. Тогда в соответствии с (8)

$$T(l_1) = T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi \sqrt{\frac{I_1}{m g l_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + m l_1^2}{m g l_1}}, \quad (12)$$

$$T(l_2) = T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 2\pi \sqrt{\frac{I_2}{m g l_2}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + m l_2^2}{m g l_2}}. \quad (13)$$

В формулах (12–13) использовано соотношение между моментом инерции маятника относительно призмы $I_{1,2}$ и моментом инерции маятника относительно центра инерции I_0 (в нашем случае центр инерции или центр масс совпадает с центром тяжести маятника), вытекающее из теоремы Гюйгенса–Штейнера:

$$I_{1,2} = I_0 + m l_{1,2}^2.$$

Выразим из формул (12–13) I_0

$$I_0 = \frac{T_1^2}{4\pi^2} m g l_1 - m l_1^2 = \frac{T_2^2}{4\pi^2} m g l_2 - m l_2^2.$$

Отсюда получим выражение для ускорения свободного падения

$$g = \frac{4\pi^2(l_1^2 - l_2^2)}{T_1^2 l_1 - T_2^2 l_2}. \quad (14)$$

Теперь для определения свободного падения необходимо измерить период колебания маятника на призмах T_1 и T_2 и расстояния от центра тяжести маятника до точек подвеса.

Если же грузы на маятнике расположить таким образом, чтобы периоды T_1 и T_2 оказались равными, т. е. положения призм Π_1 и Π_2 совпали с точкой подвеса и центром качания маятника, соответственно, то формула (14) еще более упростится

$$g = \frac{4\pi^2(l_1 - l_2)(l_1 + l_2)}{T^2(l_1 - l_2)} = \frac{4\pi^2}{T^2}(l_1 + l_2) = \frac{4\pi^2 L_0}{T^2}. \quad (15)$$

В последнем соотношении сумма расстояний от центра тяжести маятника до точек подвеса есть приведенная длина оборотного маятника

$$L_0 = l_1 + l_2.$$

Таким образом, достоинством метода оборотного маятника для определения ускорения свободного падения является то, что для использования формулы (15) уже не требуется определять положение центра тяжести маятника, а достаточно только знать расстояние между призмами, которое можно измерить достаточно точно. Правда, при применении формулы (15) требуется добиться точного равенства периодов колебаний маятника на призмах T_1 и T_2 . Ошибка в измерении этих величин и будет основным источником погрешностей в определении значения g .

2. Методика измерений.

При выводе соотношения (15) были сделаны следующие предположения:

- а) маятник совершает колебания малой амплитуды, и поэтому период колебаний не зависит от амплитуды (изохронность колебаний);
- б) массы призм много меньше масс грузов и стержня;
- в) колебания маятника незатухающие (пренебрегли моментом сил трения в точке подвеса).

1. Непосредственным измерением легко проверить, что периоды колебаний маятника при малой ($\varphi < 10^\circ$) и большой ($\varphi > 10^\circ$) амплитудах заметно отличаются. Так как формула (15) получена на основании уравнения колебаний (5), справедливого при условии $\sin \varphi \approx \varphi$, необходимо определить, в каком диапазоне амплитуд период колебаний остается постоянным с достаточно высокой точностью. Это легко сделать, измеряя период колебаний маятника для различных значений амплитуды.

2. Добиться полного совпадения периодов, т. е. точного равенства $T(l_1) = T(l_2)$, практически очень сложно. Поэтому следует выяснить, при каких условиях небольшое расхождение полученных при измерении значений периодов $\Delta T = T(l_1) - T(l_2)$ приведет к незначительной погрешности в определении величины $(l_1 + l_2)$, а следовательно, и g .

Обсудим качественно характер зависимости периодов колебаний маятника на призмах Π_1 и Π_2

$$T_{1,2} = 2\pi \sqrt{\frac{I_{1,2}}{m g l_{1,2}}}$$

от расстояния $l_{1,2}$ до оси вращения.

а) Пусть точка подвеса — призма Π_1 . При очень малых l_1 момент силы тяжести $M = m g l_1 \sin \varphi$ (см. рис. 1), стремящийся вернуть маятник в положение равновесия, становится очень малым и период колебаний T_1 резко возрастает. В пределе $l_1 \rightarrow 0$ момент силы тяжести равен нулю и колебания вообще невозможны: при $l_1 \rightarrow 0$ период

$$T_1 \sim \frac{1}{\sqrt{l_{1,2}}} \rightarrow \infty.$$

Физически это значит, что маятник подвешен в точке, практически совпадающей с центром масс. Значению $l_1 = 0$ соответствует центр масс маятника.

б) В обратном пределе очень больших l_1 можно рассматривать физический маятник как математический с длиной подвеса $L = l_1$. В этом случае период колебаний

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g}}.$$

При $l_1 \rightarrow \infty$ период T_1 также неограниченно возрастает.

При возрастании l_1 период T_1 сначала убывает до некоторого минимального значения $T_m = T_{min}$, а затем снова возрастает.

в) Если подвешивать маятник по другую сторону от центра масс, то, как видно из формул (12–13), зависимость $T(l_2)$ будет точно такой же как $T(l_1)$. Поэтому график $T(l_{1,2})$ имеет две симметричные ветви, соответствующие положению точки повеса маятника слева или справа от его центра тяжести. Качественно вид зависимости $T(l_{1,2})$ изображен на рис. (3).

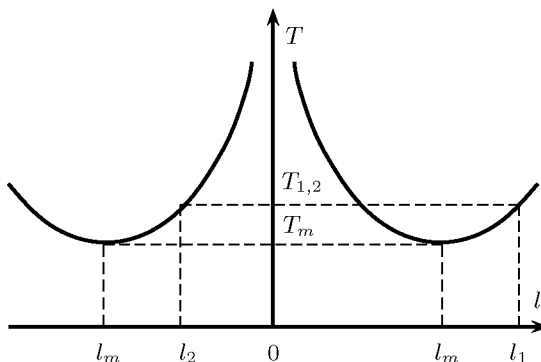


Рис. 3.

Из графика видно, что по каждую сторону от центра масс маятника имеется по два положения опорных призм, при которых периоды колебаний маятника совпадают.

Итак, добиваться равенства $T_1 = T_2$ следует при

1) $l_{1,2} \rightarrow 0$, положения призм не должны быть близки к центру тяжести маятника;

2) $l_{1,2} \rightarrow \infty$, большие

значения $l_{1,2}$ приводят к возрастанию периода колебаний, в этом случае начальная энергия колебательного движения маятника может оказаться сравнимой с работой сил трения за требуемое для хорошей точности измерения T число периодов, иначе — колебания будут затухать прежде, чем мы успеем достаточно точно измерить их период;

3) $l_1 \neq l_2$, из рис. (3) видно, что в силу симметрии графика при $l_1 = l_2 \approx l_m$ значения периодов $T_1 = T_2 \approx T_m$, при этом малому изменению периода (малой погрешности ΔT) соответствует большое изменение Δl , т. е. большая погрешность в определении величин $(l_1 + l_2)$ и g .

Целесообразно проводить измерения при

$$1.5 < \frac{l_1}{l_2} < 3. \quad (16)$$

3. Для определения оптимальных положений призм рекомендуется следующая последовательность измерений.

Подвижные грузы закрепляют на стержне в несимметричных положениях (рис. 2): один груз — у конца стержня, а другой — вблизи центра симметрии стержня. В этом случае центр масс C маятника находится

между подвижными грузами и смещен относительно середины стержня. Определяют положение центра масс C маятника:

$$R_c = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}. \quad (17)$$

Не меняя положения грузов, опорные призмы устанавливают по разные стороны от центра масс. Одна из опорных призм укрепляется на наибольшем возможном расстоянии l_1 от центра масс, т. е. вблизи конца стержня, вторую подвижную призму устанавливают по другую сторону от центра масс вблизи точки C .

Измеряют периоды колебаний $T(l_1) = T(l_2)$, на призмах Π_1 и Π_2 , соответственно.

Если $T_1 \neq T_2$, сдвигают груз Γ_2 на 1 см вниз, не меняя положений призм и груза Γ_1 . Снова измеряют периоды колебаний $T(l_1) = T(l_2)$, итак далее, пока $T(l_1) = T(l_2)$ не совпадут с точностью до 10^{-3} с. Соответствующее положение груза Γ_2 обозначают x (см).

3. Порядок выполнения работы

1. Закрепите подвижные грузы на стержне в положениях, приблизительно соответствующих рис. (2). Найдите положение центра масс C маятника по формуле (17).
2. Проверьте, выполняется ли соотношение (16).
3. Убедитесь в изохронности колебаний. Для этого измерьте период колебаний маятника при амплитуде 5° по 30 колебаниям. То же сделайте для амплитуды 10° . Сравните $T(5^\circ)$ и $T(10^\circ)$.
4. Измерьте периоды T_1 и T_2 на соответствующих призмах при нескольких различных положениях груза Γ_2 по 10 полным колебаниям. Результаты занесите в таблицу:

x , см	1	2	3	4	5	6
T_1						
T_2						

Постройте графики зависимостей $T_1(x)$ и $T_2(x)$, найдите точку их пересечения x_n .

Равенство $T(l_1) = T(l_2) = T$ должно выполняться с точностью $(1 - 2) \cdot 10^{-3}$ с.

5. Измерьте расстояние $(l_1 + l_2)$ между призмами и по формуле (15) вычислите ускорение свободного падения g . При этом следует учитывать, что период колебаний равен $T = T(l_1) = T(l_2)$.

6. Найдите погрешности, с которыми определены T и $(l_1 + l_2)$, и оцените относительную погрешность $\Delta g/g$.
7. Пользуясь математическим маятником на лабораторной установке, проверьте равенство периодов физического маятника и математического маятника с длиной нити $L_0 = l_1 + l_2$.

4. Контрольные вопросы

1. Что такое физический и математический маятник?
2. В чем особенность оборотного маятника?
3. Вывести уравнение движения физического маятника и получить формулу для периода колебаний.
4. Сформулировать теорему Гюйгенса–Штейнера.
5. Почему ускорение свободного падения в разных точках земного шара различно?
6. Стержень маятника имеет длину $l = 60$ см и массу $m = 355$ г. Массы грузов одинаковы и равны $M = 1155$ г. Центры грузов находятся на расстояниях $l_1 = 30$ см и $l_2 = 56$ см от левого конца стержня. Определите положение центра масс маятника. Массами опорных призм ($m_{\text{пр}} = 20$ г) пренебречь.
7. Укажите основные источники погрешности в рассматриваемой работе.

Список литературы

- [1] *Д.В. Сивухин*. Механика. – М.: Наука, 1989. – Т.I. – 576 с.
- [2] *С.Г. Стрелков*. Механика. – М.: Наука, 1975. – 559 с.
- [3] *И.В. Савельев*. Механика. Молекулярная физика. – М.: Наука, 1977 – Т.I. – 416 с.
- [4] *С.Г. Каленков, Г.И. Соломахо* Механика. Практикум по физике. М.: Высш. шк., 1990.—111 с.

Маятник Максвелла

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:	<i>знакомство с плоским движением твёрдого тела на примере маятника Максвелла; определение момента инерции маятника; определение ускорения свободного падения.</i>
ОБОРУДОВАНИЕ:	маятник Максвелла, комплект сменных колец (3 кольца), угольник.

1. Теоретическое введение

Плоским называется такое движение тела, при котором траектории всех точек тела лежат в параллельных плоскостях. Это значит, что для рассмотрения такого движения достаточно взять срез тела, параллельный плоскости движения.

Рассмотрим плоское движение тела относительно произвольной неподвижной системы координат OXY , не связанной с телом. При плоском движении тело может совершать поступательное и вращательное движения одновременно. При этом ускорение каждой точки тела есть векторная сумма ускорения поступательного движения и ускорения вращательного движения.

Уравнение поступательного движения:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \Leftrightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F},$$

где $\vec{F}$ — результирующая всех внешних сил, действующих на тело.

Рассмотрим теперь отдельно вращение тела. Разобьём тело на N маленьких частичек и будем их рассматривать как материальные точки. i -я частичка тела характеризуется массой Δm_i и положением, которое определяется радиусом-вектором $\vec{R}_i$ (рис. 1 а). На i -ю точку действует внешняя сила $\vec{F}_i$ и внутренние силы $\vec{F}_i^{int}$, — со стороны остальных частичек. Уравнение движения i -ой точки запишется в виде

$$\Delta m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i + \vec{F}_i^{int}, \quad (1)$$

где $\vec{v}_i = d\vec{R}_i/dt$ — скорость относительно неподвижной системы координат OXY .

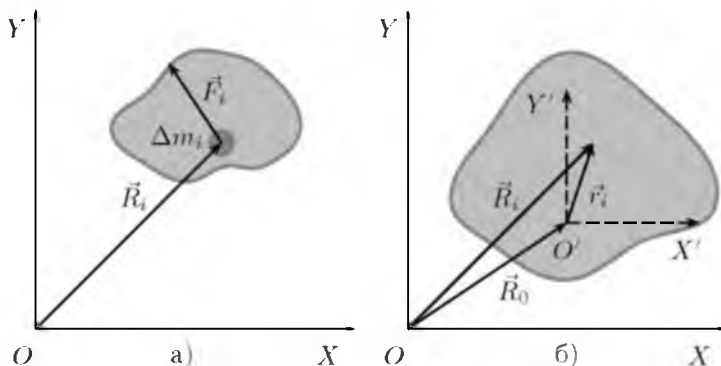


Рис. 1. Плоское движение тела: а) в произвольной системе координат; б) в связанной с телом системе координат.

Выполнив необходимые математические преобразования и просуммировав по всем N частичкам тела, получим общий закон плоского движения:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad (2)$$

где $\vec{M} = \sum_i [\vec{R}_i, \vec{F}_i]$ — сумма моментов внешних сил,

а $\vec{L} = \sum_i [\vec{R}_i, \Delta m_i \vec{v}_i]$ — момент импульса тела относительно оси.

Следует отметить, что при таком рассмотрении линейные скорости движения $\vec{v}_i$ уже не будут перпендикулярны $\vec{R}_i$, а $\vec{R}_i$ будут изменяться во времени по величине и по направлению. Поэтому удобнее перейти в систему отсчета $O'X'Y'$, связанную с телом (рис. 1 б), причем ее центр лучше связать с центром масс, во избежание учета центробежных моментов тензора инерции.

Теперь радиус-вектор и скорость выразятся как:

$$\vec{R}_i = \vec{R}_0 + \vec{r}_i, \quad \vec{v}_i = \vec{v}_0 + \vec{u}_i,$$

$$\text{где } \vec{v}_0 = \frac{d\vec{R}_0}{dt} \quad \text{и} \quad \vec{u}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

Проделав соответствующие преобразования, окончательно получим:

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0, \quad (3)$$

где $\vec{L}_0 = \sum_i [\vec{r}_i, \Delta m_i \vec{u}_i]$ — момент импульса относительно оси, проходящей (в данный момент) через центр масс O' , а $\vec{M}_0 = \sum_i [\vec{r}_i, \vec{F}_i]$ — момент внешних сил относительно той же оси.

Закон, записанный в уравнении (3), показывает, что в сложном плоском движении тела *производная от момента импульса относительно оси, проходящей через центр масс, равна моменту внешних сил относительно той же оси.*

Скорость $\vec{u}_i$ можно представить в виде $\vec{u}_i = [\vec{\omega}, \vec{r}_i]$, где $\vec{\omega}$ всегда перпендикулярно к плоскости движения. Поэтому момент импульса равен

$$\begin{aligned} \sum_i [\vec{r}_i, \Delta m_i \vec{u}_i] &= \sum_i [\vec{r}_i, \Delta m_i [\vec{\omega}, \vec{r}_i]] = \\ &= \vec{\omega} \sum_i \Delta m_i (\vec{r}_i, \vec{r}_i) - \sum_i \Delta m_i r_i^2 (\vec{r}_i, \vec{\omega}) = \vec{\omega} \sum_i \Delta m_i r_i^2. \end{aligned}$$

Здесь уместно ввести величину $J_0 = \sum_i \Delta m_i r_i^2$, — *момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс.* Тогда уравнение (3) примет вид:

$$J_0 \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_0. \quad (4)$$

Применим полученные результаты к маятнику Максвелла. Маятник Максвелла представляет собой диск, насаженный на ось. На ось намотаны нити, закрепленные в верхней точке. На маятник действует сила тяжести и сила натяжения нитей (рис. 2). Будем считать, что движение нитей и оси происходит без проскальзывания, так что мгновенные скорости поверхности оси и нитей равны.

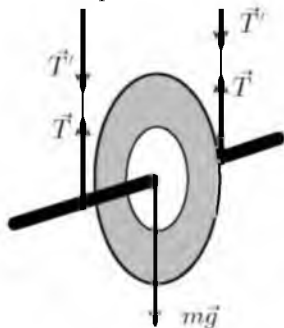


Рис. 2. Силы, действующие на маятник Максвелла.

Уравнения движения маятника Максвелла относительно центра масс можно записать в виде

$$m\vec{a} = m\vec{g} - 2\vec{T} \Leftrightarrow ma = mg - 2T, \quad (5)$$

$$J \frac{d\vec{\omega}}{dt} = 2[\vec{R}, \vec{T}] \Leftrightarrow J \frac{d\omega}{dt} = 2TR, \quad (6)$$

где m — масса всей системы, $\vec{a}$ — ускорение центра масс, $\vec{T}$ — сила натяжения одной нити, J — момент инерции всей системы относительно оси, ω — угловая скорость вращения диска, R — радиус оси маятника. Скорость центра масс связана с угловой скоростью и радиусом оси соотношением

$$v = \omega R \Leftrightarrow a = R \frac{d\omega}{dt}. \quad (7)$$

Решая систему из уравнений (5), (6), (7) найдем ускорение центра масс

$$a = \frac{mg}{m + \frac{J}{R^2}} \quad (8)$$

и силу натяжения нити

$$T = \frac{1}{2} \frac{mg}{1 + m R^2 / J}. \quad (9)$$

Следует отметить, что вектор ускорения маятника всегда направлен вниз, а абсолютная величина ускорения обратно пропорциональна массе и полному моменту инерции системы. Таким образом маятник будет совершать поступательные колебания, двигаясь вверх-вниз. Уравнения (8) и (9) описывают движение маятника вверх, вниз и в верхней точке. В нижней («мертвой») точке эти уравнения не описывают поведение маятника. Здесь величина скорости достигает максимума и происходит изменение ее направления. Поэтому центр масс маятника испытывает большое ускорение в «мертвой» точке.

Экспериментально можно определить ускорение центра масс маятника, как $a = 2h/t^2$, где t — время падения маятника, h — длина маятника, равная высоте, на которую он поднимается. Тогда из формулы (8) можно найти момент инерции относительно оси:

$$J = m R^2 \left(\frac{gt^2}{2h - 1} \right)$$

или, выражая через диаметр стержня D ,

$$J = \frac{1}{4} m D^2 \left(\frac{gt^2}{2h - 1} \right). \quad (10)$$

С другой стороны, зная момент инерции маятника, можно определить ускорение свободного падения. Теоретическое значение момента инерции определяется, как сумма моментов инерции оси маятника J_o , диска J_d и кольца, наложенного на диск, J_k :

$$J = J_o + J_d + J_k. \quad (11)$$

Значения отдельных моментов:

$$\begin{aligned} J_o &= \frac{1}{8} m_o D_o^2, \\ J_d &= \frac{1}{8} m_d (D_d^2 - D_o^2), \\ J_k &= \frac{1}{8} m_k (D_k^2 - D_d^2), \end{aligned} \quad (12)$$

где m_o , m_d , m_k — массы, а D_o , D_d , D_k — внешние диаметры стержня, диска и кольца маятника, соответственно.

Таким образом, ускорение свободного падения находится по следующей формуле:

$$g = \frac{2h}{t^2} \left(1 + \frac{4J}{mD^2} \right). \quad (13)$$

2. Описание установки

Общий вид маятника Максвелла изображен на рис. 3. Основание 1 оснащено регулируемыми ножками 2, которые позволяют произвести выравнивание прибора. В основании закреплена штанга 3, на которой закреплен неподвижный верхний кронштейн 4 и подвижный нижний кронштейн 5.

На верхнем кронштейне находятся электромагнит 6, фотоэлектрический датчик 7 и вороток для закрепления и регулирования длины бифилярной подвески маятника 8.

Нижний кронштейн, вместе с прикрепленным к нему вторым фотоэлектрическим датчиком 9, можно перемещать вдоль штанги и фиксировать на произвольном уровне.

Диск маятника 10 закреплен на оси 11, к которой крепятся с двух сторон нити. На диск накладывается сменное кольцо 12.

Маятник, с намотанной на ось нитью, удерживается в верхнем положении электромагнитом. Длина маятника определяется по линейке на штанге прибора. Для этого нижний кронштейн оснащен указателем, расположенным на уровне оптической оси нижнего фотоэлектрического датчика.

На лицевой панели миллисекундомера находятся управляющие кнопки:

СЕТЬ — включение/выключение сети.

СБРОС — установка нуля миллисекундомера.

ПУСК — выключение электромагнита с одновременным запуском миллисекундомера.

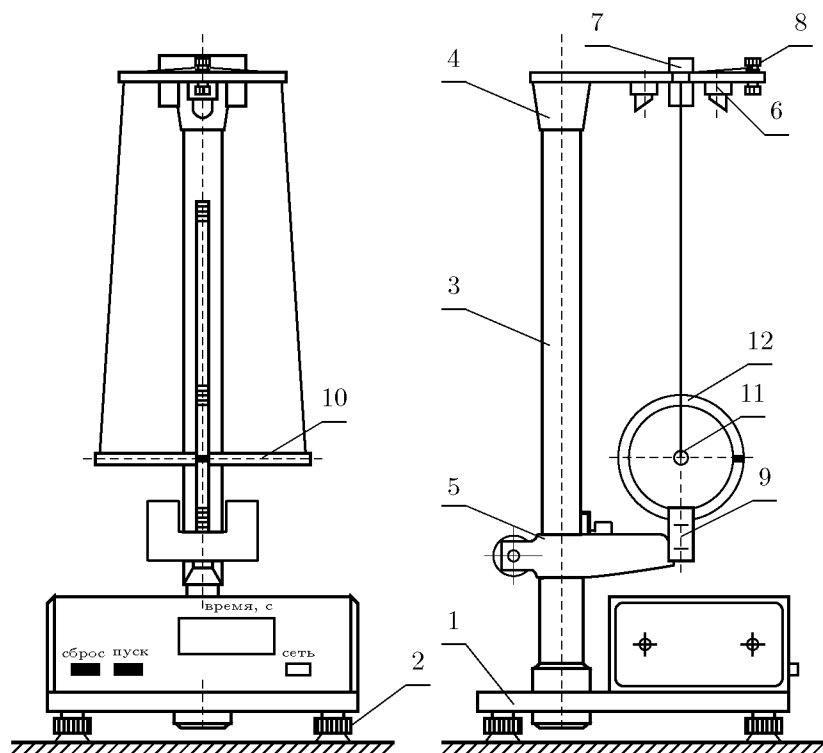


Рис. 3. Маятник Максвелла. 1 — основание, 2 — регулируемые ножки, 3 — штанга, 4 — верхний кронштейн, 5 — нижний кронштейн, 6 — электромагнит, 7, 9 — фотозлектрические датчики, 8 — вороток, 10 — диск, 11 — ось, 12 — сменное кольцо.

3. Порядок выполнения работы

Подготовительные мероприятия.

1. На диск маятника плотно наложить кольцо.
2. Включить миллисекундомер.
3. Проверить, находится ли ось маятника в горизонтальном положении (параллельно основанию прибора), если нет, то отрегулировать с помощью гайки воротка.
4. Проследить за тем, чтобы край стального кольца в нижней точке находился примерно на 2 мм ниже оптической оси нижнего фото-

датчика (тень от кольца полностью закрывает отверстие фотодатчика).

5. На ось маятника намотать нить подвески, обращая внимание на то, чтобы она наматывалась равномерно: виток к витку, без пересечений, и зафиксировать маятник электромагнитом. По линейке на штатге, с помощью угольника, измерить длину маятника.
6. Выключить электромагнит и убедиться в том, что прибор работает.

Определение момента инерции маятника.

1. Определить массу маятника (значения масс отдельных элементов нанесены на них).
2. Определить внешний диаметр оси маятника вместе с намотанной на него нитью подвески и занести в таблицу.
3. Включить электромагнит.
4. Намотать на ось маятника нить подвески и зафиксировать маятник при помощи электромагнита.
5. Повернуть маятник вокруг оси на угол около 5° в сторону движения.
6. Обнулить показания миллисекундомера.
7. Выключить электромагнит и произвести измерение времени.
8. Прodelать измерение 5 раз.
9. Найти среднее время падения маятника.
10. По формуле (10) определить момент инерции маятника.
11. Найти погрешность измерения.
12. Данную методику применить для определения моментов инерции маятника с тремя различными кольцами.
13. Результаты занести в таблицу

№	h	D	m_κ	m	t	$\bar{t}$	J	ΔJ

Определение ускорения свободного падения.

1. Определить теоретическое значение момента инерции для одного из колец, используя формулы (10), (11).
2. Используя результаты, полученные в предыдущем пункте, по формуле (13) определить ускорение свободного падения.
3. Найти погрешность измерения.

4. Результаты занести в таблицу.

№	h	D	m_{κ}	m	J_o	J_{∂}	J_{κ}	J	$\bar{t}$	g	Δg

4. Контрольные вопросы

1. Что вы понимаете под плоским движением? Приведите примеры плоского движения.
2. Из каких соображений выбирается ось моментов?
3. Выведите уравнение (10).
4. Используя теорему Гюйгенса–Штейнера, определите кинетическую энергию тела, совершающего плоское движение.
5. Для какой цели надо поворачивать маятник на угол $\alpha \approx 5^\circ$?
6. Какие систематические ошибки присутствуют в данной работе? Какова их доля в погрешности измерений? Как можно экспериментально убедиться в наличии перечисленных вами ошибок?
7. Оцените силу, возникающую в «мертвой» точке, если в качестве маятника Максвелла используется колесо от железнодорожного вагона.

Список литературы

- [1] *А. Н. Матвеев* Механика и теория относительности. — М.: Высшая школа, 1986. — 320 с.
- [2] *С. П. Стрелков*. Механика. М.: Наука, 1975,— 560 с.
- [3] *С. Э. Хайкин*. Физические основы механики. М.: Наука, 1971,— 752 с.
- [4] Техничко-эксплуатационная документация «Маятник Максвелла», ФРМ-03, №0971-0087-02. — Вроцлав, Польша.: электронный завод «Эльвро», отдел электроники. — 42 с.

Крутильный маятник

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: *изучение крутильных колебаний и определение методом крутильных колебаний моментов инерции твердых тел.*

ОБОРУДОВАНИЕ: лабораторная установка

1. Теоретическое введение

Крутильный маятник представляет собой массивное тело, подвешенное на вертикальном невесомом упругом стержне (нити), верхний конец которого закреплен неподвижно. Крутильные колебания обусловлены упругими силами, возникающими в стержне при его кручении вокруг вертикальной оси.

При повороте маятника на некоторый угол φ начинает действовать момент силы упругости:

$$M_{\text{упр}} = -D \varphi, \quad (1)$$

где D — крутильная жесткость стержня (аналог жесткости пружины k). В случае однородного круглого стержня

$$D = \frac{\pi d^4 G}{32 l}, \quad (2)$$

где d и l — диаметр и длина стержня, G — модуль сдвига материала.

Затухание колебаний определяется моментом сил трения, пропорциональным угловой скорости $\dot{\varphi}$:

$$M_{\text{тр}} = -b \dot{\varphi} \quad (3)$$

Движение маятника описывается уравнением моментов

$$I_M \ddot{\varphi} = M_{\text{тр}} + M_{\text{упр}} \quad (4)$$

где I_M — момент инерции маятника относительно оси вращения.

С учетом (1), (2) и (4) можно получить уравнение осциллятора с вязким трением

$$\ddot{\varphi} + 2\delta \dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad (5)$$

где δ — коэффициент затухания, ω_0 — частота свободных колебаний.

$$\delta = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{I_M}}.$$

Если $\delta \ll \omega_0$, т.е. колебания слабо затухающие, период равен

$$T \approx T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I_M}{D}}. \quad (6)$$

В работе проверяется соотношение

$$I(\vec{n}) = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma \quad (7)$$

для однородных симметричных твердых тел (куб, прямоугольный параллелепипед). Главные оси таких тел являются осями симметрии. Они перпендикулярны граням и проходят через геометрический центр тела (рис.1).

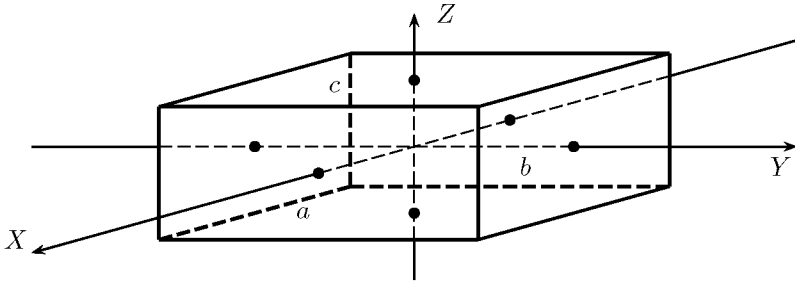


Рис. 1.

Для измерения моментов инерции твердого тела относительно оси, определяемой единичным вектором

$$\vec{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\},$$

$$(\vec{n})^2 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1, \quad (8)$$

где α , β и γ — углы между направлениями вектора $\vec{n}$ и осями координат OX , OY и OZ (рис. 2), применяется метод крутильных колебаний.

Момент инерции маятника равен сумме момента инерции I_0 рамки и моментов инерции I исследуемого тела:

$$I_M = I_0 + I.$$

Поэтому период колебаний маятника, согласно (6)

$$T = 2\pi \sqrt{(I_0 + I)/D}. \quad (9)$$

Если колеблется свободная рамка без тела, то ее период колебаний, очевидно, равен

$$T_0 = 2\pi \sqrt{I_0/D}. \quad (10)$$

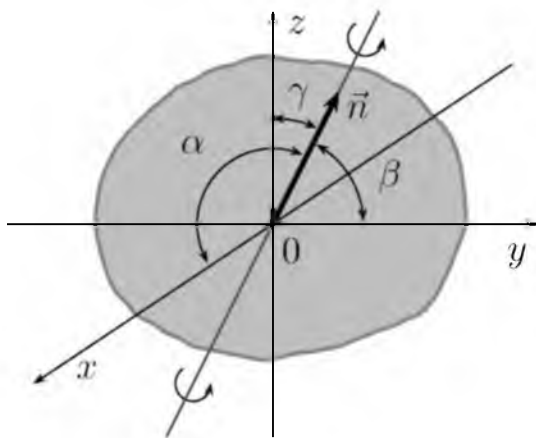


Рис. 2.

Из этих уравнений можно исключить неизвестную величину D . В результате находим

$$I = I_0 \frac{T^2 - T_0^2}{T_0^2}. \quad (11)$$

Соотношение (11) позволяет выразить момент инерции I тела относительно оси маятника через момент инерции I_0 свободной рамки. Для этого нужно измерить периоды колебаний T_0 и T , соответственно, для свободной рамки и для рамки с телом. Период колебаний T , так же как и момент инерции I тела, зависит от ориентации тела по отношению к оси маятника. Запишем (11) в виде

$$I(\vec{n}) = I_0 (T^2(\vec{n}) - T_0^2) / T_0^2, \quad (12)$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор, направленный вдоль оси маятника. В лабораторной установке ось маятника (она же ось вращения тела) направлена по вертикали. Поэтому во всех опытах следует считать, что единичный вектор $\vec{n}$ направлен вертикально вверх. Момент инерции тела относительно вертикальной оси, т. е. $I(\vec{n})$, изменяют, поворачивая тело и закрепляя его в различных положениях по отношению к этой оси (рис. 3).

Направив оси OX , OY и OZ вдоль главных осей тела, мы выбрали систему координат $OXYZ$, жестко связанную с телом. Поворачивая тело, мы изменяем направления вектора $\vec{n}$ в жестко связанной с телом системе координат $OXYZ$.

Закрепим тело в рамке так, чтобы ось вращения $\vec{n}$ совпадала с какой-

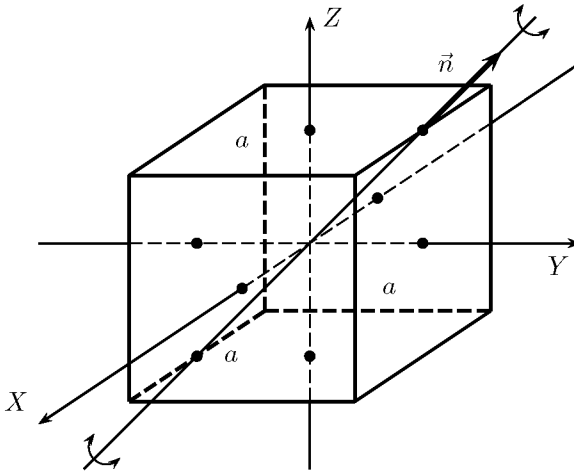


Рис. 3.

либо его главной осью OX , OY или OZ . Тогда из (12) получим

$$I_x = I_0 \frac{T_x^2 - T_0^2}{T_0^2}, \quad I_y = I_0 \frac{T_y^2 - T_0^2}{T_0^2}, \quad I_z = I_0 \frac{T_z^2 - T_0^2}{T_0^2}, \quad (13)$$

где T_x , T_y и T_z — соответственно периоды колебаний маятника, когда ось его вращения $\vec{n}$ совпадает с одной из главных осей OX , OY или OZ .

Подставив (12) и (13) в исходное соотношение (7), получим

$$T^2(\vec{n}) = T_x^2 \cos^2 \alpha + T_y^2 \cos^2 \beta + T_z^2 \cos^2 \gamma. \quad (14)$$

Таким образом, существует простая связь между периодами крутильных колебаний тела T_x , T_y и T_z относительно его осей симметрии OX , OY и OZ и периодом колебаний этого же тела относительно оси $\vec{n}$ с направляющими косинусами $\cos \alpha$, $\cos \beta$ и $\cos \gamma$.

2. Методика измерений

1. Выражение (14), так же как и формула (6) для периода крутильных колебаний, справедливо, если затухание мало.

Обсудим, как можно оценить влияние затухания на период колебаний маятника. Частота затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad (15)$$

а их период

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}. \quad (16)$$

Коэффициент затухания выражается через число колебаний N_e , за которое амплитуда колебаний уменьшится в $e \approx 2.7$ раз

$$\delta = \frac{1}{Q} = \frac{1}{N_e T} \approx \frac{1}{N_e T_0}, \quad (17)$$

где Q — добротность колебаний.

Из соотношений (7) и (9) находим

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4\pi^2 N^2}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{8\pi^2 N^2}\right), \quad (18)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \approx \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 - \frac{1}{8\pi^2 N^2}\right)^{-1} \approx T_0 \left(1 + \frac{1}{8\pi^2 N^2}\right), \quad (19)$$

Таким образом,

$$\frac{\Delta T}{T_0} \approx \frac{1}{8\pi^2 N^2}. \quad (20)$$

2. Будем проверять зависимость (14) для простого случая, когда исследуемое твердое тело имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Обозначим длины ребер параллелепипеда a , b и c . Исследуем три образца: куб ($a = b = c$), симметричный параллелепипед ($b = c$, $a \neq b$) и параллелепипед, у которого длины всех трех ребер различны ($a \neq b \neq c$). Выясним, как можно провести проверку зависимости (14) в этих трех случаях.

3. Однородный куб.

Очевидно, что все три момента инерции куба относительно главных осей OX , OY и OZ одинаковы:

$$I_x = I_y = I_z.$$

Из (7) с учетом второго равенства (8) находим

$$I(\vec{n}) = I_x (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = I_x = \text{const} \quad (21)$$

Таким образом, момент инерции однородного куба относительно любой проходящей через его центр оси одинаков. Ясно, что и период крутильных колебаний куба должен быть одинаковым для любой оси вращения, проходящей через его центр:

$$T(\vec{n}) = T_x = \text{const}. \quad (22)$$

Проверить это можно закрепляя куб в рамке в различных положениях, при которых ось вращения проходит через центр куба, и измеряя соответствующие периоды крутильных колебаний.

4. Симметричный прямоугольный параллелепипед.

Очевидно, что в этом случае моменты инерции параллелепипеда относительно главных осей OX и OY и соответствующие им периоды крутильных колебаний равны между собой:

$$I_y = I_z, \quad T_y = T_z.$$

Из (7) и (14) с учетом равенства

$$\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 - \cos^2 \alpha$$

получаем

$$I(\vec{n}) = I_y(1 - \cos^2 \alpha) + I_x \cos^2 \alpha, \quad (23)$$

$$T^2(\vec{n}) = T_y^2(1 - \cos^2 \alpha) + T_x^2 \cos^2 \alpha. \quad (24)$$

Таким образом, период крутильных колебаний $T(\vec{n})$ зависит только от угла α , который ось вращения $\vec{n}$ образует с осью тела OX . Величина $T(\vec{n})$ не зависит от углов β и γ (при $\alpha = \text{const}$). В частности, должен быть одинаковым период колебаний относительно любой оси, лежащей в плоскости OYZ (т. е. при $\alpha = \pi/2$). В этом случае $\cos \alpha = 0$ и, согласно (24),

$$T(\vec{n}) = T_y = \text{const}(\alpha = \pi/2). \quad (25)$$

Проверить это соотношение можно закрепляя в рамке крутильного маятника симметричный параллелепипед так, чтобы ось вращения была перпендикулярна его большому ребру. Периоды крутильных колебаний при любом таком положении тела должны совпадать.

5. Несимметричный параллелепипед.

Закрепим параллелепипед в рамке так, чтобы ось вращения совпадала с его главной диагональю AB (рис. 4).

Вычислив направляющие косинусы, из (14) находим

$$T_{AB}^2(a^2 + b^2 + c^2) = T_x^2 a^2 + T_y^2 b^2 + T_z^2 c^2. \quad (26)$$

Аналогично, для осей EF , MN и PQ из (14) следует:

$$\begin{aligned} T_{EF}^2(b^2 + c^2) &= T_y^2 b^2 + T_z^2 c^2, \\ T_{MN}^2(a^2 + c^2) &= T_x^2 a^2 + T_z^2 c^2, \\ T_{PQ}^2(a^2 + b^2) &= T_x^2 a^2 + T_y^2 b^2. \end{aligned} \quad (27)$$

Таким образом, для проверки формулы (14) в случае несимметричного параллелепипеда можно выяснить, выполняются ли соотношения (26) и (27) для измеренных значений периодов колебаний.

Обсудим теперь, как можно измерить момент инерции исследуемого тела. В соотношениях (12) и (13) моменты инерции тела выражаются через соответствующие периоды крутильных колебаний и момент инерции I_0

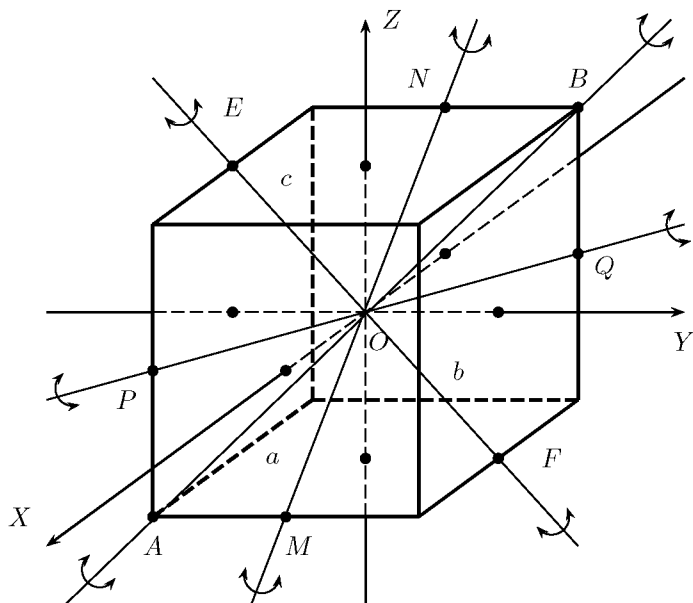


Рис. 4.

свободной рамки. Поэтому, измерив I_0 , мы сможем найти момент инерции $I(\vec{n})$ любого из изучаемых в работе тел.

Для определения момента инерции рамки можно воспользоваться эталонным телом, момент инерции $I_\circ$ которого известен. Тогда, согласно (11), имеем

$$I_0 = I_\circ \frac{T_0^2}{T_\circ^2 - T_0^2}, \quad (28)$$

где $T_\circ$ — период колебаний рамки с закрепленным в ней эталонным телом. В качестве эталонного тела в работе используется однородный куб. Момент инерции такого куба относительно проходящей через его центр оси можно вычислить по формуле

$$I_\circ = \frac{1}{6} m a^2, \quad (29)$$

где m — масса куба, a — сторона куба. Вычислив $I_\circ$ по формуле (29), можно измерить периоды колебаний T_0 и $T_\circ$ свободной рамки и рамки с кубом и затем определить искомую величину I_0 из соотношения (28).

3. Порядок выполнения работы

1. Убедитесь в том, что колебания крутильного маятника яв-

ляются слабо затухающими.

Для этого выведите маятник из положения равновесия и определите приближенно число колебаний N , за которое их амплитуда уменьшается примерно в 2—3 раза. Измерения N проведите для свободной рамки и для рамки с закрепленным в ней кубом. По формуле (9) оцените коэффициент затухания колебаний, по формуле (12) — $\frac{\Delta T}{T}$.

2. Определение периода колебаний куба и его момента инерции.

Определите период колебаний, закрепляя в рамке в различных положениях образец, имеющий форму куба.

Периоды колебаний T_1 , T_2 , T_3 определите для следующих положений куба:

- а) ось вращения проходит через центры двух противоположных граней (T_1);
- б) ось вращения проходит по главной диагонали куба (T_2);
- в) ось вращения проходит через середины противоположащих ребер куба (T_3).

Измерьте длину ребра a куба и по формуле (29) найдите момент инерции I_3 куба относительно проходящей через его центр оси. Результаты измерений занесите в таблицу.

T_1	T_2	T_3	$\bar{T} = T_3$	a	I_3	ΔI_3

3. Определение периода колебаний однородного симметричного прямоугольного параллелепипеда.

Закрепляя прямоугольный параллелепипед в четырех различных положениях, при которых ось вращения перпендикулярна его большому ребру, определите период его колебаний. Результаты измерений занесите в таблицу.

T_1	T_2	T_3	T_4

4. Определение периода колебаний однородного несимметричного прямоугольного параллелепипеда.

Определите период колебаний однородного несимметричного прямоугольного параллелепипеда относительно его главных осей (периоды T_x , T_y и T_z) и относительно осей AB , EF , MN и PQ (рис. 4). Измерьте длину ребер параллелепипеда. Результаты измерений занесите в таблицу.

T_x	T_y	T_z	T_{AB}	T_{EF}	T_{MN}	T_{PQ}	a	b	c

Убедитесь, что для найденных значений этих величин с хорошей точностью выполняются соотношения (26) и (27).

5. Определение моментов инерции однородного несимметричного прямоугольного параллелепипеда.

Измерьте период T_0 крутильных колебаний свободной рамки и по формуле (28) вычислите ее момент инерции I_0 .

Найдите, пользуясь формулами (13), по измеренным значениям периодов колебаний T_x , T_y и T_z моменты инерции несимметричного параллелепипеда I_x , I_y и I_z . Результаты занесите в таблицу.

T_0	I_0	I_x	I_y	I_z	ΔI_0	ΔI_x	ΔI_y	ΔI_z

Оцените погрешность, с которой определены моменты инерции I_0 , I_x , I_y и I_z .

4. Контрольные вопросы

1. Оцените добротность колебаний, используя опытные данные, полученные в работе.
2. Покажите, что момент инерции однородного куба относительно оси, проходящей через его центр, $I = \frac{1}{6} m a^2$ где m — масса, a — ребро куба.
3. Выведите формулу (6) $T = 2\pi\sqrt{\frac{I_M}{D}}$.
4. Оцените крутильную жесткость проволоки D .

Список литературы

- [1] Д.В. Сивухин. Механика. — М.: Наука, 1989. — Т.1. — 576 с.
- [2] С.Г. Стрелков. Механика. — М.: Наука, 1975. — 559 с.
- [3] И.В. Савельев. Механика. Молекулярная физика. — М.: Наука, 1977 — Т.1. — 416 с.
- [4] С.Г. Каленков, Г.И. Соломахо Механика. Практикум по физике. М.: Высш. шк., 1990.—111 с.

Маятник Обербека

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: *изучение динамики вращательного движения, оценка влияния трения на точность результатов проведенных измерений*

ОБОРУДОВАНИЕ: лабораторная установка

1. Теоретическое введение

В работе изучается динамика вращательного движения. В частности, экспериментально проверяется уравнение моментов для вращения вокруг неподвижной оси

$$I \frac{d\omega}{dt} = M_{\text{внеш}}, \quad (1)$$

где I — момент инерции, ω — угловое ускорение, $M_{\text{внеш}}$ — сумма проекций на ось вращения моментов внешних сил.

На рис. 1 схематически показан прибор, с помощью которого удобно исследовать уравнение (1). Он называется маятником Обербека. Четыре спицы укреплены на втулке под прямым углом. На спицах находятся грузы массой $m_{\text{гр}}$ каждый. Втулка и два шкива радиусами r_1 и r_2 насажены на общую ось. Ось закреплена в подшипниках, так что вся система может вращаться вокруг горизонтальной оси. Передвигая грузы по спицам, можно легко изменять момент инерции I тела. На шкив намотана нить, к которой привязана платформа известной массы. На платформу кладется груз, нить натягивается и создает вращающий момент

$$M_{\text{н}} = T r_i, \quad (2)$$

где T — сила натяжения нити, r_i — радиус шкива (r_i равен r_1 или r_2). Силу T можно найти из уравнения движения платформы с грузом:

$$mg - T = ma, \quad (3)$$

где m — масса платформы с грузом, a — ее ускорение. Ускорение a связано с угловым ускорением ε соотношением

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{a}{r}. \quad (4)$$

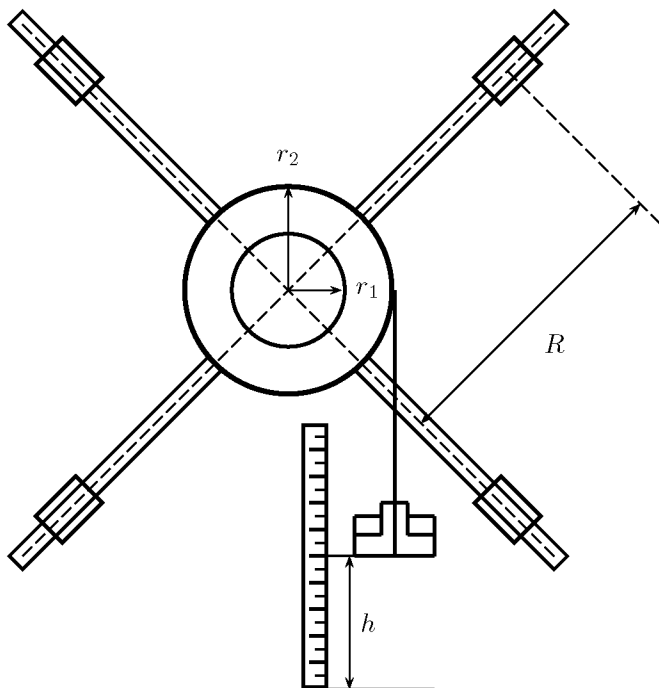


Рис. 1.

Из уравнений (2) и (3) получаем, что момент силы натяжения нити

$$M_{\text{н}} = T r = m(g - a) r. \quad (5)$$

Кроме того, на маятник действует момент силы трения в оси $M_{\text{тр}}$. С учетом уравнений (4) и (5) выражение (1) имеет вид

$$I \frac{a}{r} = M_{\text{н}} - M_{\text{тр}} = m(g - a) r - M_{\text{тр}}. \quad (6)$$

В уравнение (6) входит ускорение a платформы. Это ускорение можно довольно просто определить.

Действительно, измеряя время t , в течение которого платформа с грузом опускается на расстояние h , можно найти ускорение:

$$a = \frac{2h}{t^2}. \quad (7)$$

Тогда

$$a = \frac{g m r^2 / I - M_{\text{тр}} r / I}{1 + m r^2 / I} \quad (8)$$

Формула (8) дает связь между ускорением a , которое можно измерить опытным путем, и моментом инерции I . В формулу (8) входит известная величина — момент силы трения $M_{\text{тр}}$. Хотя интуитивно понятно, что момент силы трения мал, тем не менее он не настолько мал, чтобы им в (8) можно было полностью пренебречь. Если положить $M_{\text{тр}} = 0$, то можно убедиться, что результаты опыта будут отличаться от зависимости (8). Можно по порядку величины экспериментально определить $M_{\text{тр}}$ и это нужно, конечно, сделать в начале работы. Для этого, с помощью нескольких грузов увеличивая силу натяжения T нити, найдите минимальное значение массы, при которой маятник начнет вращаться. Дальнейшие измерения нужно проводить с грузами массой $m > m_0$. На первый взгляд относительную роль момента силы трения можно уменьшить, если взять грузы массой $m \gg m_0$, допустим, груз $m = 10^3 m_0$. Однако это не так по двум причинам. Первая — увеличение массы груза приводит к увеличению силы давления N на ось, а значит, и к росту момента силы трения $M_{\text{тр}} = \mu N r$, где μ — коэффициент трения, r — плечо силы трения. Вторая причина состоит в том, что увеличение m уменьшает время падения t , а значит, ухудшает точность измерения ускорения a (см. (8)).

Момент инерции, входящий в (8), согласно теореме Гюйгенса — Штейнера может быть записан в виде:

$$I = I_0 + 4 m_{\text{гр}} R^2. \quad (9)$$

Здесь R — расстояние центров грузов $m_{\text{гр}}$ от оси вращения, $I_0 = I(R = 0)$, т. е. равен моменту инерции системы при $R = 0$. В (8) входит также соотношение:

$$\frac{m r^2}{I} = \frac{m r^2}{I_0 + 4 m_{\text{гр}} R^2} \quad (10)$$

В условиях опыта оно меньше или порядка 10^{-2} (убедитесь в этом!). Пренебрегая этой величиной в знаменателе выражения (8), получаем формулу, которую можно проверить экспериментально:

$$\varepsilon = \frac{a}{r} = \frac{1}{I} (m g r - M_{\text{тр}}). \quad (11)$$

2. Методика измерений

Представляет интерес экспериментальное исследование двух зависимостей. Первая — зависимость углового ускорения ε от момента внешней силы $M = m g r$ при условии, что момент инерции I останется постоянным. Если на оси ординат откладывать угловое ускорение ε , а на оси абсцисс — $m g r$, то, согласно (11), экспериментальные точки должны ложиться на прямую. Из (11) видно, что наклон этой прямой равен $1/I$, а точка пересечения с осью абсцисс дает $M_{\text{тр}}$.

Если экспериментальные данные подтверждают линейную зависимость ε от $m g r$, то можно приступить к изучению второй зависимости — момента инерции I от расстояния R грузов до оси вращения маятника (рис. 2).

Согласно теореме Гюйгенса - Штейнера,

$$I(R) = I_0 + 4 m_{\text{гр}} R^2.$$

Выясним, как проверить эту зависимость экспериментально. Для этого преобразуем соотношение (11), пренебрегая в нем малой величиной (моментом силы трения $M_{\text{тр}}$) по сравнению с моментом $m g r$. Из (11) имеем

$$\varepsilon = \frac{a}{r} = \frac{1}{I} (m g r - M_{\text{тр}}) \approx \frac{m g r}{I_0 + 4 m_{\text{гр}} R^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{g}{a} = \frac{I_0 + 4 m_{\text{гр}} R^2}{m r^2} = \frac{I_0}{m r^2} + 4 \frac{m_{\text{гр}}}{m} \left(\frac{R}{r} \right)^2. \quad (12)$$

Из (12) понятно, как экспериментально проверить эту зависимость: нужно, выбрав постоянную массу m перегрузка, измерять ускорение a при различных положениях R грузов на спицах. Результаты измерений удобно изобразить в виде точек на координатной плоскости $X O Y$, где $x = (R/r)^2$, $y = g/a$.

Если экспериментальные точки в пределах точности измерений ложатся на прямую, то это подтверждает зависимость (12), а значит, и формулу

$$I(R) = I_0 + 4 m_{\text{гр}} R^2.$$

Отметим, что при выводе формулы (12) мы пренебрегли моментом сил трения, т. е. считали, что $M_{\text{тр}} \ll m g r$. Значение $M_{\text{тр}}$ получено из графика зависимости при $R = \text{const}$. Это и позволяет выбрать массу перегрузка так, чтобы неравенство $m g r \gg M_{\text{тр}}$ заведомо выполнялось.

Роль момента сил трения можно оценить и иначе. Для этого заметим, что если маятник в начальный момент вращается с угловой скоростью ω_0 , то к моменту остановки он повернется на угол φ , определяемый из соотношения

$$\frac{1}{2} I \omega_0^2 = A_{\text{тр}} = M_{\text{тр}} \varphi. \quad (13)$$

где $1/2 I \omega_0^2$ — начальная кинетическая энергия вращающегося маятника, $A_{\text{тр}}$ — работа сил трения. В (13) предполагается, что момент сил трения является постоянной величиной и связан с угловым ускорением соотношением

$$I \varepsilon_0 = M_{\text{тр}}. \quad (14)$$

где ε_0 — ускорение, определяемое только моментом сил трения. Из (13) и (14) находим

$$\omega_0^2 = 2\varepsilon_0 \varphi. \quad (15)$$

Пусть h — полное число оборотов, которое делает маятник до остановки, а T_0 — период вращения маятника в начале движения. Тогда $\varphi = 2\pi n$, $\omega_0^2 = 2\pi/T_0$ и из (15) получаем

$$\varepsilon_0 = \frac{\pi}{n T_0}. \quad (16)$$

Отсюда ясно, как на опыте определить ε_0 : нужно измерить время T_0 , за которое совершается первый оборот, и полное число n оборотов маятника до остановки. Во всех дальнейших измерениях нужно следить, чтобы выполнялось неравенство $\varepsilon_0 \ll \varepsilon$.

3. Порядок выполнения работы

1. Сбалансируйте маятник. Для этого оставьте на крестовине два груза на двух противоположных спицах на равных расстояниях от оси вращения. Спицы, на которых находятся грузы, соединены со втулкой резьбой. Вращая спицы в резьбе, добейтесь равновесия. Затем точно сбалансируйте грузы на второй паре спиц на таком же расстоянии от оси вращения.

Полезно несколько раз привести маятник во вращение, каждый раз давая ему возможность остановиться. Подумайте, как на основании этих опытов определить, хорошо ли сбалансирован маятник.

2. Определите приблизительно минимальную массу m_0 , при которой маятник начинает вращаться, и оцените момент сил трения из соотношения

$$M_{\text{тр}} \approx m_0 g r,$$

где r — радиус шкива, на котором подвешен груз m_0 .

3. Оцените ускорение ε_0 , возникающее под действием момента силы трения. Для этого приведите маятник во вращение, измерьте время T_0 , за которое он совершает первый оборот, и полное число оборотов n маятника до полной остановки. Затем по формуле (16) вычислите ε_0 . Измерения повторите три раза и сравните соответствующие им значения ε_0 .
4. Определите экспериментально зависимость углового ускорения ε маятника от момента приложенной силы $m g r$. В этой серии измерений момент инерции маятника должен оставаться постоянным: $I = \text{const}$.

Для определения зависимости $\varepsilon(m g r)$ измерьте время t , за которое груз m опускается на расстояние h . Измерение времени t для

каждого груза при постоянном значении h повторите три раза. Затем найдите среднее значение времени падения груза $\bar{t}$ и определите среднее ускорение груза из соотношения (7):

$$\bar{a} = \frac{2h}{\bar{t}^2}.$$

По формуле (4) найдите угловое ускорение ε .

Эти измерения и вычисления повторите для пяти значений массы m груза, причем для всех m должно выполняться неравенство $m \gg m_0$, где m_0 — масса перегрузка, страгивающего маятник (см. п. 2). Результаты измерений запишите в таблицу.

№	t_1	t_2	t_3	$\bar{t}$	Δt	$\bar{\varepsilon}$	$\Delta \varepsilon$	$m g r$	$\Delta m g r$
1									
2									
3									
4									
5									

$$r = \dots\dots, \Delta r = \dots\dots, h = \dots\dots, \Delta h = \dots\dots$$

Полученные экспериментально точки нанесите с учетом погрешностей в координатной плоскости $x = m g r$, $y = \varepsilon$, и по ним постройте график зависимости (см. рис. 2 а).

5. Проверьте экспериментально зависимость (12). Для этого, взяв постоянную массу груза $m \gg m_0$, определите ускорение a груза m при пяти различных положениях R на спицах грузов $m_{\text{гр}}$. В каждом положении R измерения времени падения t груза m с высоты h повторите три раза. Результаты измерений занесите в таблицу.

№	m	R	r	$(R/r)^2$	$m_{\text{гр}}$	t_1	t_2	t_3	$\bar{t}$	Δt	$\bar{a}$	$g/\bar{a}$
1												
2												
3												
4												
5												

Полученные экспериментальные точки нанесите с учетом погрешностей в координатной плоскости $x = (R/r)^2$, $y = g/\bar{a}$. Постройте график зависимости $y = y(x)$ (см. рис. 2 б).

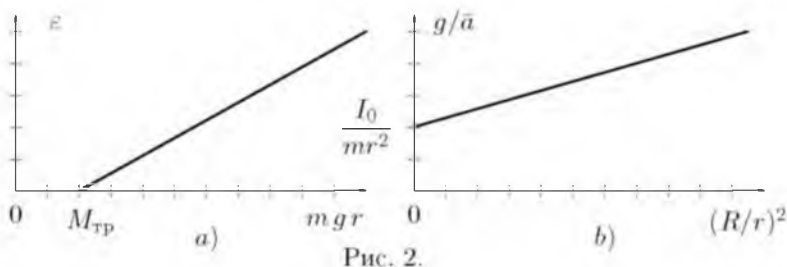


Рис. 2.

4. Контрольные вопросы.

1. Казалось бы, даже большую величину $M_{\text{тр}}$ можно легко учесть с помощью уравнения (6), почему стремятся уменьшать момент сил трения?
2. Какую из величин в данном эксперименте следует измерять с наибольшей точностью?
3. Сформулируйте и докажите теорему Гюйгенса-Штейнера.
4. Как изменится вид графиков, если в эксперименте использовать шкив другого радиуса?

Список литературы

- [1] С. Э. Хайкин. Физические основы механики. М.: Наука, 1971, —752 с.
- [2] И. В. Савельев. Курс физики.— Т.I — М.: Наука, 1989.
- [3] Д. В. Сивухин. Общий курс физики.— Т.I. Механика. — М.: Наука, 1989.
- [4] С. П. Стрелков. Механика. М.: Наука, 1975,—560 с.
- [5] С. Г. Каленков, Г. И. Соломахо. Механика. Практикум по физике. М.: Высш. шк., 1990.—111 с.

Баллистический маятник

Цель работы: *изучение движения крутильного маятника под действием короткого импульса внешней силы и определение скорости пули методом крутильного маятника.*

Оборудование: лабораторная установка.

1. Теоретическое введение

1. *Крутильный маятник* представляет собой массивное тело, подвешенное на тонкой проволоке (нити), верхний конец которой закреплен неподвижно. Крутильные колебания обусловлены упругими силами, возникающими в нити при ее кручении вокруг вертикальной оси, проходящей через точку подвеса.

При повороте маятника из положения равновесия на некоторый угол θ на него со стороны нити действует момент упругих сил:

$$M_{\text{упр}} = -D\theta, \quad (1)$$

где D — постоянная момента упругих сил (аналогична коэффициенту жесткости пружины).

Рассмотрим задачу о движении крутильного маятника под действием внешней силы. Пусть сила имеет "импульсный" характер: она действует в течение короткого промежутка времени Δt , малого по сравнению с периодом колебаний T , т. е. $\Delta t \ll T$. Сила такого типа возникает при соударении пули с маятником.

Итак, пуля массы m , имея скорость v_0 , ударяется о маятник и застревает в нем на расстоянии l от оси. l называют прицельным расстоянием (см. рис 1).

Будем считать, что до удара пули маятник находится в состоянии равновесия

$$\theta(0) = \theta' = 0.$$

По закону сохранения момента импульса:

$$I_{\text{п}} \omega_{\text{п}} = (I + I_{\text{п}}) \omega, \quad (2)$$

где $I_{\text{п}}$ — момент инерции пули; $\omega_{\text{п}} = \frac{v_0}{l}$ — угловая скорость пули в момент удара о маятник; I — момент инерции маятника; ω — угловая скорость маятника с пулей сразу после удара.

После удара маятник будет совершать колебания. Если затухание мало, то полная энергия маятника за один период колебаний почти не изменится, поэтому потенциальная энергия упругости проволоки в момент максимального отклонения маятника с пулей от положения равновесия (амплитуда максимальна)

$$W_{\text{п}} = \frac{1}{2} D \theta_{\text{max}}^2$$

будет равна кинетической энергии системы "пуля-маятник" сразу после удара

$$\frac{1}{2} (I + I_{\text{п}}) \omega^2 = \frac{1}{2} D \theta_{\text{max}}^2.$$

Если учесть, что $I_{\text{п}} = m l^2 \ll I$, то

$$\frac{1}{2} I \omega^2 \cong \frac{1}{2} D \theta_{\text{max}}^2.$$

Отсюда угловая скорость

$$\omega = \theta_{\text{max}} \sqrt{\frac{D}{I}}. \quad (3)$$

Представим закон сохранения момента импульса в виде:

$$m l^2 \frac{v}{l} = (m l^2 + I) \omega. \quad (4)$$

Подставляя (3) в (4) и учитывая, что $m l^2 \ll I$, получим выражение для скорости пули в момент попадания в маятник:

$$v_0 = \frac{\sqrt{I D}}{m l} \theta_{\text{max}}. \quad (5)$$

2. Основным элементом лабораторной установки "баллистический маятник" является крутильный маятник. При попадании в него выпущенной стреляющим устройством "пули" маятник начинает вращаться вокруг вертикальной оси. Максимальный угол отклонения θ_{max} маятника из положения равновесия связан со скоростью v_0 пули соотношением:

$$v_0 = \frac{\sqrt{I D}}{m l} \theta_{\text{max}}, \quad (6)$$

где m — масса пули, l — прицельное расстояние (рис.1), I — момент инерции крутильного маятника, D — постоянная момента упругих сил.

Для экспериментального определения скорости пули удобно преобразовать соотношение (1) так, чтобы в него входили непосредственно измеряемые на опыте величины. Сначала воспользуемся формулой для периода колебаний T слабо затухающего крутильного маятника

$$T = 2\pi \sqrt{I/D}, \quad (7)$$

и исключим неизвестную величину D . В результате получим

$$v_0 = \frac{2\pi}{T} \frac{I}{ml} \theta_{max}, \quad (8)$$

Согласно теореме Гюйгенса–Штейнера, момент инерции маятника

$$I = I_0 + 2MR^2, \quad (9)$$

где $2M$ — масса двух имеющих на маятнике подвижных грузов, R —

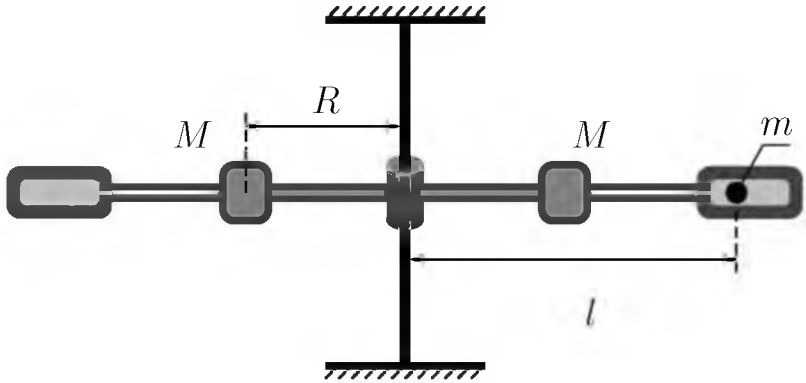


Рис. 1.

расстояние от центра масс каждого из этих грузов до оси вращения.

Подставляя это выражение в (3), получаем следующую формулу для определения скорости пули:

$$v_0 = \frac{2\pi}{T} \frac{I_0 + 2MR^2}{ml} \dot{\theta}_{max}. \quad (10)$$

2. Методика измерений

Соотношение (1), использовавшееся при выводе выражения (5), было получено для идеализированной модели, а именно предполагалось, что выполнены следующие условия:

- 1) колебания маятника являются незатухающими;
- 2) время τ соударения пули с маятником мало по сравнению с периодом колебаний:

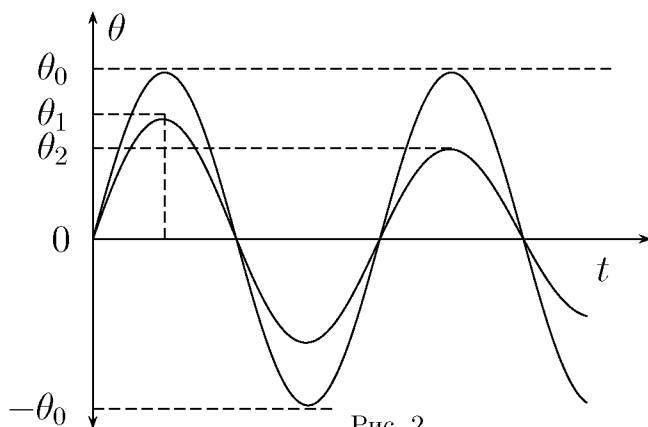
$$\tau \ll T \quad (11)$$

(баллистический режим).

Поэтому прежде всего необходимо выяснить, обеспечивается ли выполнение этих условий для имеющейся лабораторной установки.

Сначала обсудим первое из них. Отклонив маятник из положения равновесия, легко убедиться, что амплитуда его колебаний довольно быстро уменьшается. Следовательно, модель незатухающих колебаний не является точной и применение полученной в рамках этой модели формулы (5) может привести к систематической погрешности в определении скорости пули.

Оценим эту погрешность, для чего сравним графики зависимости амплитуды незатухающих и затухающих колебаний маятника от времени. Будем считать, что в обоих случаях маятник выведен из положения равновесия в момент времени $t = 0$ с одинаковой начальной скоростью (рис. 2).



Как видно из рисунка, пренебрежение затуханием приводит к заниженному значению скорости пули. Действительно, в формулу (5) подставляется измеренная величина $\theta_1 = \theta_{max}$, а она меньше, чем соответствующая той же начальной скорости амплитуда незатухающих колебаний θ_0 . Следовательно, при определении θ_{max} возникает систематическая погрешность, равная $\Delta\theta_{\text{сист}} = \theta_0 - \theta_1$.

Для оценки заметим, что она накапливается за четверть периода колебаний, т. е. за время $T/4$. Уменьшение амплитуды колебаний за полный период T можно измерить непосредственно:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1,$$

где θ_1 и θ_2 — соответственно углы первого и второго максимального отклонения маятника после попадания в него пули. Считая зависимость амплитуды затухающих колебаний от времени приблизительно линейной (для

этого нужно, чтобы затухание за период было мало), находим

$$\frac{\Delta\theta(T/4)}{\Delta\theta(T)} \approx \frac{T/4}{T} = \frac{1}{4}.$$

Следовательно,

$$\Delta\theta_{\text{сист}} = \Delta\theta(T/4) \approx \frac{1}{4} \theta(T) = \frac{1}{4} (\theta_2 - \theta_1)$$

$$\text{т. е.} \quad \Delta\theta_{\text{сист}} = \frac{1}{4} (\theta_2 - \theta_1) \quad (12)$$

Если θ_1 и θ_2 совпадают в пределах точности, с которой измеряется угол отклонения θ маятника, то $\Delta\theta_{\text{сист}}$, очевидно, можно пренебречь и модель незатухающих колебаний справедлива.

Попробуем теперь оценить τ (τ — время соударения пули с маятником). Построим качественно график зависимости скорости пули от времени относительно маятника (рис. 3).

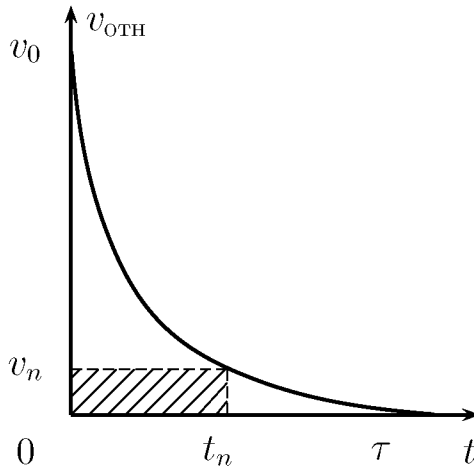


Рис. 3.

Непосредственно перед соударением маятник покоится, а скорость пули равна v_0 : значит, их начальная относительная скорость $v_{\text{отн}}(0) = v_0$. В конце удара, т. е. при $t = \tau$, по определению, $v_{\text{отн}} = 0$.

Естественно считать, что в течение удара скорость v_0 постепенно (монотонно) убывает от v_0 до нуля. Без проведения специальных измерений ничего более определенного сказать о зависимости v_0 от t нельзя: для этого необходимо заранее знать закон взаимодействия между соударяющимися телами. Нам же надо лишь приближенно оценить τ .

Пусть t_n — момент, когда относительная скорость пули уменьшается по сравнению с начальной в n раз:

$$v_{\text{отн}}(t_n) = v_0/n.$$

Из рис. 3 видно, что полное перемещение пули в материале маятника

$$s_0 = \int_0^{\tau} v_{\text{отн}}(t) dt,$$

равное полной площади под кривой $v_{\text{отн}}(t)$ заведомо превышает площадь заштрихованного прямоугольника:

$$s_n = v_n t_n = \frac{v_0}{n} t_n.$$

При достаточно больших значениях n , например при $n > 10$, можно считать, что t_n мало отличается от времени соударения τ , и положить $\tau \approx t_n$. Тогда получаем неравенство

$$s_0 > s_n = \frac{v_0}{n} t_n \approx \frac{v_0}{n} \tau,$$

которое позволяет получить оценку τ :

$$\tau \lesssim n \frac{s_0}{v_0} \quad (13)$$

Величины, стоящие в правой части неравенства (8), определяются на опыте. В лабораторной установке глубина проникновения пули в маятник $s_0 \lesssim 0.5$ см, а скорость пули $v_0 \gtrsim 1$ м/с.

Следовательно, $(s_0/v_0) \lesssim 5 \cdot 10^{-3}$ с и при $n = 10$ получаем для τ оценку сверху:

$$\tau \lesssim 0.05 \text{ с.}$$

Так как период колебаний маятника $T \sim 1$ с, то можно считать, что неравенство (6) в этих условиях выполняется.

Примечание. Выбор величины $T \approx 1$ с может показаться произвольным. Однако при

$$v_n = \frac{v_0}{n} \gtrsim \frac{v_0}{10}$$

практически можно считать, что удар действительно "закончился", так как к этому моменту кинетическая энергия пули

$$\frac{m v_n^2}{2} \gtrsim \frac{1}{10^2} \frac{m v_0^2}{2}.$$

т. е. составляет всего лишь примерно 1% ее первоначальной кинетической энергии.

Выясним теперь, как определить в рабочей формуле неизвестную величину I_0 . Для этого запишем период колебаний маятника в виде

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + 2M R^2}{D}}, \quad (14)$$

Таким образом, T зависит от расстояния R_1 центров подвижных грузов M от оси вращения.

Установив грузы M на некотором расстоянии R от оси вращения, можно определить период колебаний T_1 маятника. Сместим грузы M в другое положение R_2 и снова измерим период колебаний T_2 маятника. Так как (см. (9))

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + 2M R_1^2}{D}} \quad \text{и} \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + 2M R_2^2}{D}}$$

то, исключая из этих равенств D , находим

$$I_0 = 2M \frac{R_2^2 T_1^2 - R_1^2 T_2^2}{T_2^2 - T_1^2}. \quad (15)$$

Для уменьшения погрешности, с которой определяется величина I_0 , расстояния R_1 и R_2 следует взять заметно отличающимися друг от друга. Лучше всего взять R_1 возможно ближе к оси вращения, а R_2 — на максимальном расстоянии от нее.

После того как найдено I_0 , скорость пули может быть определена из формулы (5) по известным значениям массы m пули, масс M грузов и измеряемым на опыте значениям периода колебаний T , прицельного расстояния l , расстояния R и угла отклонения θ_{max} маятника.

Для повышения точности измерений рекомендуется устанавливать грузы M на небольшом расстоянии R от оси маятника, чтобы угол отклонения θ_{max} маятника был как можно больше.

3. Порядок выполнения работы

1. Определение угла отклонения маятника при попадании в него пули.

Установите подвижные грузы M на минимальном расстоянии от оси вращения и, сделав 2–3 выстрела, определите приблизительно угол отклонения θ_1 маятника при попадании в него пули. Результат измерений занесите в таблицу.

Оцените по формуле (7) $\Delta\theta_{\text{сист}}$. Для этого отклоните маятник из положения равновесия на угол θ_1 , отпустите без толчка и измерьте амплитуду θ_2 второго отклонения маятника в ту же сторону. Измерения повторите три раза и найдите среднее арифметическое значение θ_2 . Результаты измерений занесите в таблицу.

θ_1	$\theta_{2,1}$	$\theta_{2,2}$	$\theta_{2,3}$	$\bar{\theta}_2$	$\Delta\theta_{\text{сист}}$	$\Delta\theta_0$

Сравните найденное значение $\Delta\theta_{\text{сист}}$ с погрешностью $\Delta\theta_0$ измерений угла по шкале устройства ($\Delta\theta_0$ равно половине цены деления шкалы). **2. Определение величины I_0 , входящей в момент инерции маятника.**

Для определения I_0 измерьте периоды колебаний маятника T_1 и T_2 при двух различных положениях $R_1 \approx R_{\min}$ и $R_2 \approx R_{\max}$ пар подвижных грузов M . Результаты измерений занесите в таблицу.

R_1	ΔR_1	R_2	ΔR_2	T_1	T_2	M	I_0	ΔI_0

3. Определение скорости пули.

Установив на расстоянии $R \approx R_{\min}$ грузы M , измерьте отклонение маятника $\theta = \theta_{\max}$ и прицельное расстояние l в серии из четырех выстрелов. Результаты измерений занесите в таблицу.

№	l	$\bar{l}$	Δl	θ	$\bar{\theta}$	$\Delta\theta$	R	ΔT	Δv_0
1									
2									
3									
4									

Пользуясь соотношением (5), определите скорость пули.

Можно ли утверждать, что скорость пули в серии выстрелов одинакова в пределах точности измерений или имеется разброс в скорости пули от выстрела к выстрелу?

4. Оценка времени соударения пули с маятником.

Измерьте приближенно глубину s_0 , на которой пуля застревает при попадании в маятник. Оцените по формуле (8) время соударения τ пули с маятником, полагая в (8) $n = 10$. Убедитесь в том, что неравенство (6)

$$\tau \ll T$$

в условиях опыта действительно выполняется.

4. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте законы сохранения, используемые в этой работе. Обсудите допустимость их применения.
2. Выведите формулу (1):

$$v_0 = \frac{\sqrt{ID}}{ml} \theta_{max}.$$

3. На основании полученных вами опытных данных оцените постоянную момента упругих сил D .
4. По экспериментальным результатам оцените кинетическую энергию маятника:

$$W_k \approx W_n = \frac{1}{2} D \theta_{max}^2$$

5. Оцените, какая часть кинетической энергии пули при ударе переходит в теплоту.

Список литературы

- [1] *С. Э. Хайкин*. Физические основы механики. М.: Наука, 1971, 752 с.
- [2] *С. П. Стрелков*. Механика. М.: Наука, 1975, 560 с.
- [3] *И. В. Савельев*. Курс физики.— Т.I — М.: Наука, 1989.
- [4] *Д. В. Сивухин* Общий курс физики.— Т.I. Механика. — М.: Наука, 1989.

Изучение трения качения с помощью наклонного маятника

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: *изучить движение маятника в условиях действия сил трения; определить коэффициент трения при качении шара по поверхности; исследовать характер сил трения, возникающих при качении шара по плоскости.*

ОБОРУДОВАНИЕ: лабораторная установка.

1. Теоретическое введение

1. Определение коэффициента трения качения шара по поверхности.

Сопротивление свободному качению твердого тела по поверхности характеризуют коэффициентом трения качения

$$k = \frac{M}{N}, \quad (1)$$

где M — момент силы сопротивления перекачиванию, N — сила нормального давления. Коэффициент k существенно зависит от природы поверхности тел, пленок, покрывающих места соприкосновения, от скорости движения, от геометрических размеров катящегося тела.

Для определения коэффициента трения качения воспользуемся прибором, схема которого приведена на рис.1. Сила нормального давления шарика на плоскость

$$N = m g \sin \beta. \quad (2)$$

Момент силы сопротивления перекачиванию шарика определим из уравнения, описывающего изменение энергии за n колебательных движений в плоскости, отклоненной от вертикали на угол β .

Пусть начальное отклонение нити маятника от равновесного положения в плоскости колебаний в момент времени $t = 0$ равно α_0 , а через n колебаний по истечении времени t_n равно α_n . Тогда за счет трения потенциальная энергия шарика в поле силы тяжести уменьшится на величину

$$\Delta E = m g (h_0 - h_n), \quad (3)$$

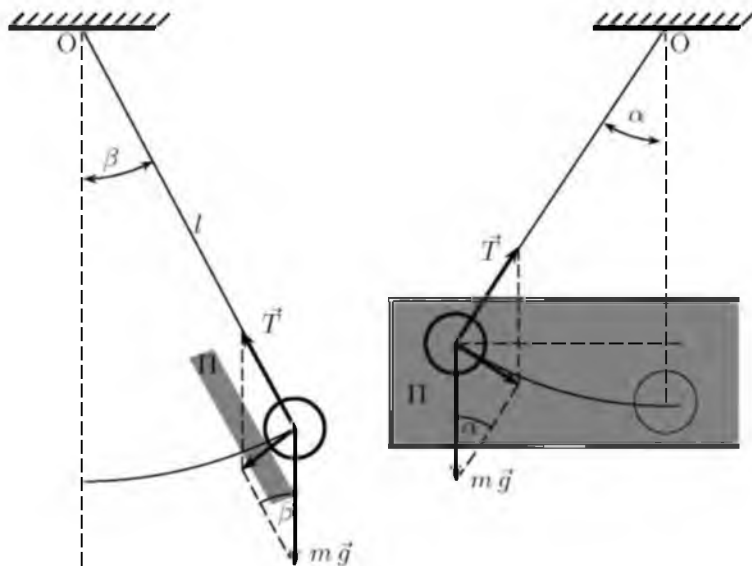


Рис. 1. Наклонный маятник. O — точка подвеса, β — угол наклона плоскости колебаний, α — угол отклонения маятника от равновесного положения, Π — плоскость колебательных движений шарика, T — сила натяжения нити длины l .

где m — масса шарика, g — ускорение свободного падения, h_0 , h_n — высота поднятия шарика в момент времени $t = 0$ и по истечении времени t_n . Если высоту поднятия шарика отсчитывать от его наинизшего положения

$$\text{при } \alpha = 0, \text{ то } h = l \cos \beta (1 - \cos \alpha). \quad (4)$$

$$\text{Следовательно энергия } \Delta E = m g l \cos \beta (\cos \alpha_n - \cos \alpha_0) \quad (5)$$

израсходована на совершение работы против силы трения

$$A = \int F(s) ds, \quad (6)$$

где интегрирование ведется по всему пути s , пройденному шариком за n колебаний в течение времени t_n . Для вычисления интеграла в (6) воспользуемся теоремой о среднем, в соответствии с которой

$$\int F(s) ds = F_0 \int ds = F_0 s. \quad (7)$$

Здесь F_0 — среднее значение $F(s)$ на всем пути s , который складывается из длин дуг n колебательных движений:

$$s = l \frac{\alpha_0 + \alpha_n}{2} \cdot 4n. \quad (8)$$

$$\text{Таким образом, } A = F_0 l (\alpha_0 + \alpha_n) \cdot 2n, \quad (9)$$

и закон изменения энергии можно представить в виде

$$m g l \cos \beta (\cos \alpha_n - \cos \alpha_0) = F_0 l (\alpha_0 + \alpha_n) \cdot 2n. \quad (10)$$

Отсюда

$$F_0 = \frac{m g \cos \beta (\cos \alpha_n - \cos \alpha_0)}{2n (\alpha_0 + \alpha_n)}. \quad (11)$$

Так как момент силы сопротивления перекатыванию шарика радиуса R :

$$M = F_0 R, \quad (12)$$

коэффициент силы трения качения в соответствии с (1), (2), (11) и (12) равен

$$k = \frac{R \cos \beta (\cos \alpha_n - \cos \alpha_0)}{2n \sin \beta (\alpha_0 + \alpha_n)}. \quad (13)$$

В случае малых значений α , когда

$$\cos \alpha \simeq 1 - \frac{\alpha^2}{2}, \quad (14)$$

нетрудно получить, что

$$k = \frac{R}{\operatorname{tg} \beta} \cdot \frac{\alpha_0 - \alpha_n}{4n}. \quad (15)$$

3. Исследование сил трения, возникающих при качении шара на плоскости.

1. Допустим, что качение шара по плоскости проходит без проскальзывания и при наличии лишь силы трения покоя $F_{\text{тр}}$. Эта сила приводит к вращению шара, описываемому уравнением

$$I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}, \quad (16)$$

относительно оси, проходящей через нить. Представим (16) в виде

$$\frac{2}{5} m R^2 \frac{l}{R} \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = +F_{\text{тр}} R. \quad (17)$$

Здесь учтено, что

$$I = \frac{2}{5} m R^2 \quad (18)$$

— момент инерции шара радиуса R относительно оси, проходящей через нить (или точку подвеса),

$$\omega = \frac{l}{R} \frac{d\alpha}{dt} \quad (19)$$

— угловая скорость вращения шара относительно этой же оси,

$$M = F_{\text{тр}} R \quad (20)$$

— момент силы трения покоя.

Шар совершает еще и вращательное движение относительно оси, проходящей через точку подвеса нити. Уравнение моментов для этого движения можно записать в виде

$$m l^2 \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -m g l \cos \beta \sin \alpha - F_{\text{тр}} l. \quad (21)$$

В правой части равенства (21) первое слагаемое представляет собой момент силы тяжести, а второе — момент силы трения. Используя соотношение (17), исключим из (21) величину силы трения. Тогда

$$\frac{7}{5} m l \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -m g \cos \beta \sin \alpha. \quad (22)$$

В случае малых углов отклонения нити от равновесного положения

$$\sin \alpha \simeq \alpha. \quad (23)$$

уравнение (22) представим в виде

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{5g \cos \beta}{7l} \alpha = 0. \quad (24)$$

В качестве решения уравнения (24) выберем функцию

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\Omega_0 t), \quad (25)$$

$$\text{где } \Omega_0 = \sqrt{\frac{5g \cos \beta}{7l}} \quad (26)$$

— частота колебаний маятника.

Выражение (25) показывает, что амплитуда угла не меняется с течением времени.

Действительно, абсолютно упругие деформации, вызванные силами трения покоя при качении шара, не сопровождаются потерями энергии. Следовательно, силы трения качения не сводятся лишь к силам трения покоя. Естественно предположить, что силы трения качения вызваны как упругими, так и неупругими деформациями шара и поверхности качения в области их соприкосновения.

2. Допустим, что неупругие деформации при качении приводят к сухому трению. В этом случае к правой части уравнения (22) необходимо добавить

$$\vec{F}_c = -F_0 \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \quad (27)$$

— силу сухого трения, постоянную по величине и направленную против скорости $\vec{v}$. Тогда

$$\frac{7}{5} m l \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -m g \cos \beta \sin \alpha + F_c. \quad (28)$$

Используя (23) и замену переменных $\alpha' = \alpha - \frac{F_c}{m g \cos \beta}$, нетрудно привести (28) к виду (24) с решением типа (25), характерным для гармонических колебаний.

Таким образом, между моментами времени, при которых скорость

$$v = l \frac{d\alpha}{dt} \quad (29)$$

обращается в нуль, колебание является гармоническим с частотой (26), но происходит оно относительно точки равновесия, смещенной в сторону отклонения на величину

$$\Delta \alpha = \frac{F_0}{m g \cos \beta}. \quad (30)$$

В результате за один период точка максимального отклонения приблизится к равновесной точке на величину $4 \Delta \alpha$. А за любые n колебаний амплитуда угла уменьшится на одну и ту же величину

$$\Delta \alpha_n = \frac{4 F_0 n}{m g \cos \beta} \quad (31)$$

тем большую, чем больше n , следовательно, пропорциональную времени колебаний.

3. Допустим, что неупругие деформации при качении приводят к жидкому трению. В этом случае к правой части уравнения (22) необходимо добавить

$$F_{ж} = -a \frac{d\alpha}{dt} \quad (32)$$

— силу жидкого трения, по величине пропорциональную скорости (29) и противоположную ей по направлению:

$$\frac{7}{5} m l \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -m g \cos \beta \sin \alpha + F_{ж}. \quad (33)$$

Используя формулу (23), приведем уравнение (33) к виду:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{5 a}{7 m l} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{5 g \cos \beta}{7 l} \alpha = 0. \quad (34)$$

В качестве решения уравнения (34) выберем функцию

$$\alpha = \alpha_0 e^{-\delta t} \cos(\Omega t), \quad (35)$$

где $\delta = \frac{5a}{14ml}$ — коэффициент затухания и

$$\Omega = \sqrt{\left(\frac{5g \cos \beta}{7l}\right)^2 - \delta^2} \quad (36)$$

— частота колебаний маятника.

Выражение (35) показывает, что амплитуда угла убывает по экспоненциальному закону. В частности, за время $t_n = n \cdot T$ любых n колебаний амплитуда уменьшится в одно и то же число раз

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_n} = e^{\delta t_n}, \quad (37)$$

или в логарифмическом масштабе

$$\ln\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_n}\right) = \delta \cdot t_n = \delta \cdot T \cdot n. \quad (38)$$

2. Порядок выполнения работы

1. Измерить радиус шара.
2. Установить угол β отклонения плоскости колебаний маятника от вертикали.
3. Отклонить маятник на угол α_0 .
4. Измерить уменьшение амплитуды угла α и время этого уменьшения за выбранное число колебаний.
5. Изменяя β , выполнить измерения в соответствии с выше указанными пунктами 4 и 5.

Результаты измерений удобно занести в таблицу.

№	β	α_0	α_n	t_n	n	$\Delta\alpha_n$	$\ln \frac{\alpha_0}{\alpha_n}$
1							
2							
3							
4							
5							

3. Обработка результатов

1. Вычислить значение коэффициентов трения качения в соответствии с (15). Оценить погрешность измерений. Сравнить полученный результат с известными справочными данными по трению качения.
2. Для каждого фиксированного значения β построить зависимость изменения амплитуды угла $\Delta\alpha_n$ от n — числа колебаний. Оценить погрешность величины $\Delta\alpha_n$ и указать эту погрешность на графике. Если полученные точки ложатся на одну прямую в пределах погрешности измерений, то можно утверждать, что шар испытывает силу сухого трения (см. формулу 31).
3. Для каждого фиксированного значения β построить зависимость $\ln\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_n}\right)$ от времени t_n . Оценить погрешность величины $\ln\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_n}\right)$ и указать эту погрешность на графике. Если полученные точки ложатся на одну прямую в пределах погрешности, то можно утверждать, что шар испытывает силу жидкого трения при качении по плоскости (см. формулу 37).

4. Контрольные вопросы

1. Что такое сухое трение? Какова зависимость силы сухого трения от скорости?
2. Что такое жидкое трение? Какова зависимость силы жидкого трения от скорости?
3. Запишите уравнение движения маятника, предполагая, что он испытывает в процессе движения: а) трение покоя; б) сухое трение; в) жидкое трение.
4. Убедитесь в том, что решением уравнений (24), (34) являются функции (25), (35) соответственно.
5. Используя "энергетический подход", получите закон (31) убывания амплитуды угла, считая, что маятник испытывает при колебаниях сухое трение.
6. Какова природа сухого трения, жидкого трения и трения покоя?

Список литературы

- [1] А. Н. Матвеев. Механика и теория относительности. — М.: "Высшая школа", 1986. — с. 198–209, с. 291–296.
- [2] С. П. Стрелков. Механика. М.: Наука, 1975, с. 257–267.

Гироскоп

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: *изучить движения гироскопа под действием внешних сил.*

ОБОРУДОВАНИЕ: лабораторная установка для изучения прецессии гироскопа.

1. Теоретическое введение

Гироскоп — симметричное, быстро вращающееся твердое тело, ось которого может изменять свое положение в пространстве.

Чтобы ось гироскопа могла поворачиваться в любом направлении, его помещают в карданов подвес. Все три оси подвеса пересекаются в одной точке O — центре карданова подвеса.

Если центр масс гироскопа совпадает с центром карданова подвеса, то гироскоп называют *уравновешенным*.

Движение гироскопа определяется уравнением моментов

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{L}} = \vec{M}_{\text{внеш}}. \quad (1)$$

Пусть гироскоп быстро вращается вокруг оси OY с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Если I — его момент инерции относительно оси OY , то момент импульса гироскопа

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad (2)$$

есть вектор, направленный по оси OY .

Допустим, что мы подвесили к оси гироскопа небольшой груз на расстоянии l от центра O . В этом случае на гироскоп действует момент силы (относительно центра O)

$$\vec{M}_{\text{внеш}} = [\vec{l}, m\vec{g}]. \quad (3)$$

Так как момент внешних сил определяет производную момента импульса $\vec{L}$, то вектор $\vec{L}$ с течением времени будет изменяться как по модулю, так по направлению. Так, за время dt вектор $\vec{L}$ получит приращение

$$d\vec{L} = \vec{M}_{\text{внеш}}dt, \quad (4)$$

а это значит, что за время dt гироскоп повернется вокруг оси на угол $d\theta$.

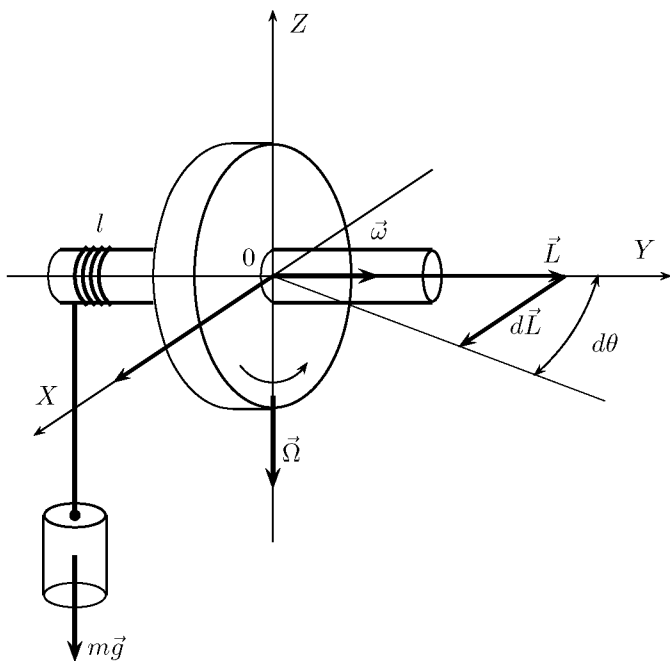


Рис. 1.

Если момент внешних сил достаточно мал, то можно считать, что вектор $\vec{L}$ постоянен по модулю; он изменяется лишь по направлению, поэтому

$$|d\vec{L}| = |\vec{L}| d\theta.$$

Разделим обе части последнего равенства на dt :

$$\left| \frac{d\vec{L}}{dt} \right| = |\vec{L}| \frac{d\theta}{dt},$$

откуда

$$|d\dot{\vec{L}}| = |\vec{L}| |\vec{\Omega}|, \quad (5)$$

где $|\vec{\Omega}| = d\theta/dt$ — угловая скорость вращения гироскопа вокруг оси OZ . Такое движение называется прецессией. В этом случае угловая скорость $\vec{\omega} \neq \vec{\Omega}$ неполная и совпадает с осью вращения гироскопа.

Теперь уточним, что значит достаточно малый момент внешних сил.

Если угловая скорость $\Omega \ll \omega$, то $|\vec{L}|$ определяется в основном значением ω , т. е.

$$|\vec{L}| \approx I |\vec{\Omega}| = I \omega,$$

а это значит, что $|\vec{L}| = const$.

Таким образом, $|\vec{M}_{внеш}|$ должен быть таким, чтобы гироскоп вращался вокруг оси OZ гораздо медленнее, чем вокруг оси OY .

Из уравнения моментов следует, что

$$|\dot{\vec{L}}| = |\vec{M}_{внеш}|.$$

Подставляя это выражение в (5), получаем связь между угловой скоростью Ω и приложенным моментом $|\vec{M}_{внеш}|$:

$$\Omega = \frac{|\vec{M}_{внеш}|}{|\vec{L}|} = \frac{m g l}{I \omega}. \quad (6)$$

2. Методика измерений.

В данной работе в качестве гироскопа используется ротор 1 асинхронного электродвигателя (рис. 2), частота вращения которого может достигать $12 \cdot 10^3$ об/мин. На ось двигателя 5 насажен массивный фигурный стальной маховик 3. С противоположной стороны на статоре двигателя укреплен стержень с делениями 17 и контргрузом 18. Двигатель устанавливается на опорной вилке 16 и может свободно поворачиваться в ней вокруг горизонтальной оси. В свою очередь, опорная вилка вместе с гироскопом устанавливается на основании 13. Гироскоп может вращаться вокруг вертикальной оси. С этой целью ось 15 крепится в двух опорных подшипниках 14. На вертикальной оси на изоляторах укреплены скользящие электроконтакты 6 в виде щеток для подвода электропитания к электродвигателю.

Маховик и вертикальная ось снабжены специальными дисками, в которых по периферии сделаны равномерные прорези-щели, служащие совместно с источниками света 7 и 2 и фотоприемниками 8 и 4 датчиками при измерении угловой скорости вращения гироскопа ω и угловой скорости прецессии Ω .

Электрические сигналы с фотоприемников поступают в измерительное устройство — электронный секундомер 12.

Измерение силы тока в обмотке возбуждения электродвигателя, пропорциональной ω , производится прибором 11, установленным на передней панели электронного секундомера. Питание электродвигателя и электронного секундомера осуществляется от блока питания 10, включаемого в сеть через стабилизатор напряжения 9.

Убедитесь, что гироскоп может вращаться вокруг горизонтальной и вертикальной осей. Для этого, не включая двигатель, покрутите ротор рукой за маховик; затем убедитесь в том, что гироскоп может вращаться вместе с опорной вилкой вокруг вертикальной оси.

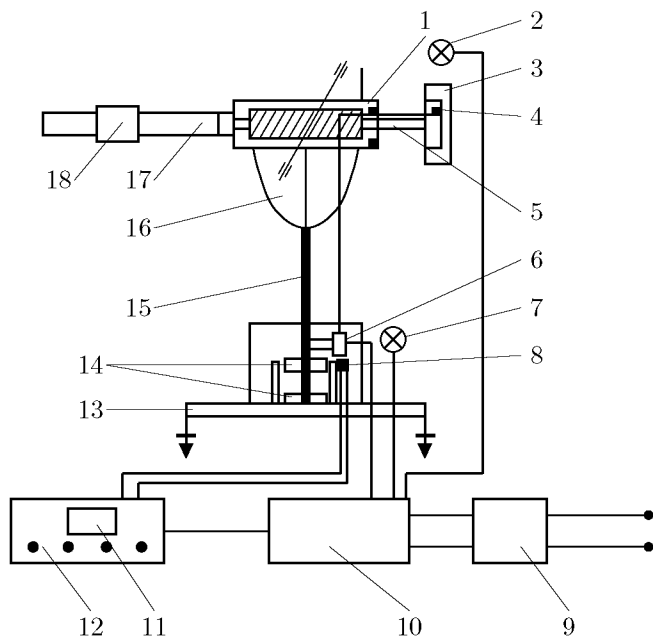


Рис. 2. Схема установки для изучения прецессии гироскопа. 1 — ротор; 2 — источник света; 3 — маховик; 4 — фотоприемник; 5 — ось двигателя; 6 — электроконтакты; 7 — источник света; 8 — фотоприемник; 9 — стабилизатор напряжения; 10 — блок питания; 11 — прибор для измерения силы тока в обмотке возбуждения электродвигателя; 12 — электронный секундомер; 13 — основание; 14 — подшпипники; 15 — ось; 16 — опорная вилка; 17 — стержень с делениями; 18 — контргруз.

Стойку гироскопа с помощью регулировочных винтов установите вертикально. Далее необходимо сбалансировать гироскоп. Это делается путем перемещения груза (противовеса) по стержню. Когда гироскоп сбалансирован, то при легком постукивании по противовесу он не должен вращаться в вертикальной плоскости. Положение груза l_g , при котором гироскоп сбалансирован, следует записать, поскольку именно от этого положения отсчитывается величина l .

Угловая скорость ω вращения ротора двигателя измеряется прибором, расположенным на передней панели установки.

Прибор проградуирован в единицах: об/мин· 10^3 . Так, например, делению $\langle 8 \rangle$ на шкале прибора соответствует частота $\nu = \omega/(2\pi) = 8 \cdot 10^3$ об/мин.

3. Порядок выполнения работы

1. Исследуйте зависимость $\Omega = \Omega(\omega)$. Включите питание гироскопа и немного подождите, чтобы вращение ротора успело стабилизироваться. Сместите противовес на величину $l = 4 \div 6$ мм от положения равновесия. Изменяя частоту вращения ω ротора, исследуйте зависимость Ω от ω при постоянном смещении l . Результаты занесите в таблицу, отметив рядом с ней смещение противовеса из положения равновесия.

$l =$	1	2	3	4	5	6
ω						
Ω						

Постройте график зависимости скорости прецессии $\Omega(\omega)$ от угловой скорости вращения гироскопа.

Сравните построенный график с теоретической зависимостью, предсказываемой соотношением (6).

2. При некотором фиксированном значении ω измерьте зависимость угловой скорости прецессии Ω от смещения l противовеса из положения равновесия.

Результаты занесите в таблицу, указав рядом с ней угловую скорость ω гироскопа, при которой проводились измерения.

$\omega =$	1	2	3	4	5	6
l						
Ω						

По полученным данным постройте график зависимости Ω от l .

3. Из построенных зависимостей $\Omega(\omega)$ и $\Omega(a)$ оцените величину момента инерции I гироскопа [см.(6)].

Поставьте груз в положение равновесия. Поэкспериментируйте с гироскопом, нажимая карандашом на груз так, чтобы гироскоп поворачивался в ту или иную сторону вокруг вертикальной оси. Посмотрите, поднимается или опускается груз. Объясните эти результаты.

4. Контрольные вопросы

1. Выведите уравнение моментов для системы материальных точек.
2. Имеется быстро вращающийся вокруг оси OY гироскоп. К точке A прикладывают силу F вдоль оси OX . При этом ось гироскопа поднимается вверх. Укажите направление угловой скорости вращения ω гироскопа (рис. 3).
3. Обладает ли прецессия свойством "инертности"?

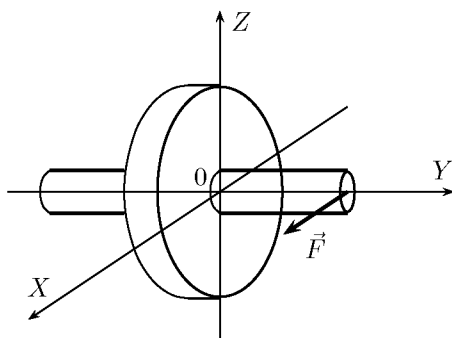


Рис. 3.

Список литературы

- [1] Берклеевский курс физики. Т.I. Механика. М.: Наука, 1983.
- [2] *А. Н. Матвеев*. Механика и теория относительности. М.: Высшая школа, 1986.
- [3] *Д. В. Сивухин* Общий курс физики.— Т.I. Механика. – М.: Наука, 1989.
- [4] *С. П. Стрелков*. Механика. М.: Наука, 1975, 560 с.
- [5] *С. Г. Каленков, Г. И. Соломатов* Механика. Практикум по физике. М.: Высш. шк., 1990.—111 с.

Учебное издание

**ФИЗИЧЕСКИЙ ПРАКТИКУМ:
МЕХАНИКА**

Учебное пособие

Редактор *Е. М. Федяева*

Подготовка оригинал-макета *О. В. Журенков, Н. В. Волков*

Оформление обложки *О. В. Майер*

Издательская лицензия ЛР 020261 от 14.01.1997 г.

Подписано в печать 06.06.2014.

Формат 60х84 1/16. Бумага офсетная. Печать трафаретная.

Усл.-печ. л. 7,7. Тираж 300. Заказ 226.

Типография Алтайского государственного университета:

656049, Барнаул, ул. Димитрова, 66