Библиографический список

1. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория: пер. с англ. / под ред. Г.И. Жуковой, Ф.Я. Кельмана. – М.: Айрис-пресс, 2002. – 576 с.
2. Cournot A. Recherches sur les Principes Mathematiques de la Theorie desRichesses. – 1838.
3. Von Stackelberg, H. Markform und Gleichgewicht.Wien: Springer, 1934.
4. Чемберлин Э. Теория монополистической конкуренции. – М., 1996.
5. Bertrand J. Theorie Mathematique de la Richesse Sociale // Journal des savants. – 1883 – P. 499–508.
6. Beckman M. Edgeworth-Bertrand Duopoly Revisited // Operation Research-Verfahren, III. – Verlag, 1967.
7. Levitan R. Shubik M. Price Duopoly and Capacity Constraints // International Economic Review. – 1972. – V. 13. – P. 111–122.
8. Kreps D. A Course in Micro-economic Theory. New York et al., 1990.

УДК 519.8

Исследование точности интервальных оценок в задачах моделирования процессов

М.Н. Мадияров[1], Н.М. Оскорбин[2], С.И. Суханов[2]
[1]ВКГУ им. С. Аманжолова, г. Усть-Каменогорск;
[2]АлтГУ, г. Барнаул

Ключевые слова: моделирование процессов, интервальные системы линейных алгебраических уравнений, модели прогноза, модели оценки параметров.

В данной работе проводится исследование точности интервальных оценок параметров процессов. Различные аспекты этой задачи и нестатистические методы ее решения рассматривались, например, в работах [1–7]. В данной работе исследование выполняется методами вычислительного эксперимента процесса прогноза прибыли корпорации [8].

Прикладной интервальный анализ в нашем случае линейных моделей детерминированных процессов проводится с использованием множеств решений ИСЛАУ, коэффициенты и правая часть которой записана по результатам интервальных наблюдений. В матричной форме ИСЛАУ записывается интервальной ($N \times n$) матрицей коэффициентов и ($N \times 1$) интервальным вектором правой части в следующем виде:

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b} \tag{1}$$

Интервальное задание СЛАУ (1) понимается так, что элементы матриц $\mathbf{A}, \mathbf{b}$ заданы интервалами: $A^H \leq \mathbf{A} \leq A^V$ и $B^H \leq \mathbf{b} \leq B^V$.

Применительно к задачам анализа данных в литературе [2, 3, 5, 6] рассматриваются три базовых множеств решений ИСЛАУ: объединенное множество решений, $\Xi uni(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ предикатная формула которого записывается так:

$$\Xi uni(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in R^n / (\exists A \in \mathbf{A})(\exists B \in \mathbf{b})(Ax = B)\}; \tag{2}$$

допусковое $\Xi tol(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ и управляемое $\Xi ctl(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ множества решений:

$$\Xi tol(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x / (\forall A \in \mathbf{A})(Ax = B)\}; \ \Xi ctl(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x / (\forall B \in \mathbf{b})(Ax = B)\}. \tag{3}$$

Запишем задачи исследования множеств решений ИСЛАУ, которые возникают при моделировании процессов. Обозначим $X_S \subset R^n$ – одно из трех введенных множеств решения ИСЛАУ в задаче анализа экспериментальных данных. Эти задачи запишем в обозначениях работы [8].

1. **Задача прогноза выходной переменной** моделируемого процесса на период времени (*N+1*). Учитываем при прогнозе только оценки прибыли предприятий: $A_i^{H,N+1}; A_i^{V,N+1}, i = 1,...,n$. Тогда:

$$\begin{aligned} \hat{B}^{H,N+1} &= \min_{x \in X_S}(A_1^{H,N+1}x_1 + ... + A_n^{H,N+1}x_n); \\ \hat{B}^{V,N+1} &= \max_{x \in X_S}(A_1^{V,N+1}x_1^p + ... + A_n^{V,N+1}x_n^p). \end{aligned} \tag{4}$$

Заметим, что прогноз по измеренным значениям $A_i^{N+1}, i = 1,...,n$ не является корректным, поскольку оцениваемый интервал может не содержать истинного значения B'^{N+1} прогнозируемой прибыли.

2. **Задача оценки коэффициентов** линейной зависимости моделируемого процесса (предполагаем для нашего примера, что коэффициенты баланса прибыли корпорации нам неизвестны).

В качестве интервальной оценки этих коэффициентов можно решить *2n* задач линейного программирования. Например, x_1 принадлежит интервалу $[x_1^H, x_1^V]$:

$$x_1^H = \min_{x \in X_S} x_1; \quad x_1^V = \max_{x \in X_S} x_1. \tag{5}$$

Имитация условий анализа прибыли корпорации проводилась в среде Excel при следующих исходных данных: n=3; N=12; истинные значения прибылей A_i' , $i = 1,\ldots,3$ в каждом из (N+1) временных периодов принимались как равномерно распределенные псевдослучайные числа на интервалах [0, 100]; соответствующие значения прибыли корпорации B' определялись на основе балансного уравнения; ошибки измерения (2) и (3) во всех испытаниях принимались равномерно распределенными на одинаковых симметричных относительно нуля интервалах: $[-5, 5]\times[-5, 5]\times[-5, 5]\times[-\varepsilon_B, \varepsilon_B]$. Здесь верхние оценки ошибки выходной переменной задавались переменными для обеспечения условия, при котором исследуемое множество решений ИСЛАУ не пусто и сравнимо с двумя другими. Пример точных значений прибылей корпорации и их оценок представлен в таблицах 1 и 2.

Объединенное множество решений ИСЛАУ содержит точку $x^d = (1, 1, 1)$ по определению этого множества для правильных измерений, что следует и по результатам численного решения задачи (10).

Таблица 1 – Данные без ошибок измерения

	A1	A2	A3	B
1	23,93	19,84	97,14	140,91
2	13,84	91,08	65,11	170,03
3	35,27	18,48	70,67	124,42
4	68,21	39,87	84,02	192,09
5	76,78	22,20	13,35	112,33
6	24,28	88,86	64,10	17 ,23
7	1,60	6 ,28	26,29	99,18
8	12,92	49,01	83,69	145,62
9	91,99	26,19	21,89	140,07
10	29,43	61,70	16,77	107,90
11	58,73	80,64	95,76	235,12
12	83,98	89,17	5,45	178,60
13	**17,01**	**73,08**	**51,91**	**142,00**

Таблица 2 – Данные с ошибок измерения, $\varepsilon_B = 10$

	A1	A2	A3	B
1	26,99	19,99	98,11	149,74
2	17,80	93, 8	68,41	160,7
3	38,41	14,64	67,47	127,32
4	67,48	38,84	88,28	191,76
5	75,53	23,05	11,26	113,07
6	19,37	83,87	64,64	182,70
7	16,57	57,07	30,77	94,54
8	17,00	47,84	79,19	150,69
9	89,93	27,74	22,38	147,71
10	24,47	65,00	18,49	107,10
11	57,86	84,12	95,31	240,01
12	79,54	89,72	4,98	169,15
13	**15,94**	**73,27**	**47,94**	**135,37**

Для данных таблицы 2 решение задач (8) является следующим:

$$\hat{B}^{H,N+1} = 109,7; \quad \hat{B}^{V,N+1} = 160,3; \; B^{C,N+1} = 0.5(\hat{B}^{H,N+1} + \hat{B}^{V,N+1}) = 135; \; \Delta = 17.8\%. \tag{11}$$

Для сравнения приведем значения и погрешности прогноза по оценкам аналитиков. Эти данные в порядке выражения (11) имеют следующие значения: 125,4; 145,4; 135,4; 7,0%. Приведем соответствующие значения, полученные с использование балансового уравнения по нижним и верхним значениям прибылей предприятий: 122,2; 152,2; 137,2; 10,6%. Приведенные числовые данные не противоречат визуальному анализу и свойствам объединенного множества решений. Следует отметить, что использование объединенного множества решений ИСЛАУ в качестве инструмента прогноза прибыли корпорации в рассмотренном случае не позволяет улучшить оценки, полученные визуальным анализом данных.

Допусковое множество решений ИСЛАУ для данных таблицы 2 и заданных предельных значений погрешностей измерения является пустым. Этот результат вполне согласуется с исследованиями С.П. Шарого [3], т.е. в данном случае произведение $\mathbf{A}x$ получает «большой размах» в сравнении с размахом вектора $\mathbf{b}$. В нашем случае для данных таблицы 1 и принятых оценок погрешностей измерения, в которых $\varepsilon_B = 20$ с дополнительным коэффициентом расширения k_B размаха вектора $\mathbf{b}$ равным двум ($k_B = 2$) получена ИСЛАУ с подходящими свойства. Ее исследование для 15 вариантов выборок независимых ошибок измерения показало, что в 5 вариантах допусковое множество не пусто и содержит точку $x^d = (1,1,1)$; в 8 вариантах оно не пусто, но необходимое для корректности модели условие $x^d \in$ не выполнено; в 2 вариантах множество $\Xi tol(\mathbf{A},\mathbf{b})$ оказалось пустым.

Для одного из первой группы вариантов приведем решение задач (8):

$$\begin{aligned} &\hat{B}^{H,N+1} = 121{,}1; \quad \hat{B}^{V,N+1} = 162{,}5; B^{C,N+1} = \\ &= 0.5(\hat{B}^{H,N+1} + \hat{B}^{V,N+1}) = 141{,}8; \Delta = 14.6\% \end{aligned}. \tag{12}$$

Рассмотрим формально по аналогии с вышеизложенным свойства управляемого множество решений ИСЛАУ для данных таблицы 2 и заданных предельных значений погрешностей. Следует отметить, что примеры использования множества $\Xi ctl(\mathbf{A},\mathbf{b})$ в задачах моделирования процессов представлены в работе [8].

Как и следовало ожидать, это множество для рассматриваемой таблицы измерений является пустым. Поступая зеркально схеме исследования множества $\Xi tol(\mathbf{A},\mathbf{b})$зададим $\varepsilon_B = 5$ с дополнительным коэффициентом сжатия размаха вектора $\mathbf{b}$ равным 0,6 ($k_B = 0{,}6$) и получим ИСЛАУ с подходящими свойства. Ее исследование для 15 вариантов выборок независимых ошибок измерения показало, что в 11 вариантах управляемое множество не пусто и содержит точку $x^d = (1,1,1)$; в 4 вариантах оно не пусто, но необходимое для корректности модели условие $x^d \in \Xi ctl(\mathbf{A},\mathbf{b})$ не выполнено.

Для одного из первой группы вариантов приведем решение задач (8):

$$\begin{aligned} &\hat{B}^{H,N+1} = 119{,}1; \quad \hat{B}^{V,N+1} = 160{,}9; B^{C,N+1} = \\ &= 0.5(\hat{B}^{H,N+1} + \hat{B}^{V,N+1}) = 140; \Delta = 14.7\% \end{aligned}. \tag{13}$$

Как видим, эти данные с учетом точности их вычисления совпадают с (12), как и оценки погрешностей с использованием визуальных методов прогнозирования.

Полученные результаты позволяют уточнить методические подходы применения теоретических результатов ИСЛАУ в задачах анализа данных и математического моделирования реальных процессов.

Библиографический список

1. Канторович Л.В. О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений // Сибирский математический журнал. – 1962. – Т. 3, №5. – С. 701–709.

2. Шарый С.П. Решение интервальной линейной задачи о допусках // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 10. – С. 147–162.

3. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. – Новосибирск: Изд-во «XYZ», 2017. – 618 с.

4. Оскорбин Н.М, Жилин С.И., Максимов А.В. Построение и анализ эмпирических зависимостей методом центра неопределенности // Известия АГУ. – 1998. – № 1. – С. 35–38.

5. Жолен Л. и др., Прикладной интервальный анализ. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. – 468 с.

6. Шарый С.П. Сильная согласованность в задаче восстановления зависимостей при интервальной неопределенности данных // Вычислительные технологии. – 2017. – Т. 22, № 2. – С. 150–172.

7. Максимов А.В., Оскорбин Н.М. Многопользовательские информационные системы: основы теории и методы исследования. – 2-е изд. испр. и доп. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2013. – 264 с.

8. Мадияров М.Н., Оскорбин Н.М., Суханов С.И. Примеры интервального анализа данных в задачах моделирования процессов // Известия АГУ. – 2018. – № 1.

УДК 518.868

Исследование применения математической модели линейного программирования для оптимизации транспортного маршрута (на примере автотранспортных грузоперевозок Москва – Калининград)

А.В. Михалева
АлтГУ, г. Барнаул

Ключевые слова: грузоперевозка, линейное программирование, транспортная задача, математическая модель, оптимизация, методы оптимизации

Целью исследования выступает изучение возможности практического применения математической модели линейного программирования для оптимизации процесса транспортировки, то есть составления оптимального её плана.