

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
АЛТАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е.П. Петров

**ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ
И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
ДЛЯ ГУМАНИТАРИЕВ**

Учебно-методическое пособие



Барнаул

Издательство
Алтайского государственного
университета
2018

Автор:
канд. физ.-мат. наук, доцент ***Е.П. Петров***

Пособие рекомендовано студентам 1 курса, обучающимся по направлениям подготовки бакалавров «Реклама и связи с общественностью», «Политология» и «Журналистика» в качестве сопровождения лекционного курса по дисциплине «Математические методы (в профессиональной деятельности)». В данном учебно-методическом издании рассматриваются теоретические вопросы в элементарном изложении комбинаторики и теории вероятностей. Для более подготовленных обучающихся предложены также вывод формул и доказательства некоторых утверждений.

Оглавление

1 ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ.....	4
1.1. Принцип математической индукции.....	4
1.2. Основные комбинаторные понятия.....	7
1.2.1. Правила суммы и произведения.....	7
1.2.2. Слова.....	9
1.2.3. Размещения и перестановки.....	10
1.2.4. Сочетания.....	12
2 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.....	14
2.1. Испытания и события.....	14
2.1.1. Пространство элементарных событий.....	17
2.1.2. Операции над событиями.....	18
2.2. Понятие вероятности.....	20
2.3. Теоремы сложения вероятностей.....	25
2.4. Условная вероятность. Теоремы умножения вероятностей.....	26
2.5. Теорема сложения для совместны событий.....	28
2.6. Формула полной вероятности и формулы Байеса.....	29
2.7. Повторение испытаний.....	31
2.7.1. Формула Бернулли.....	31
2.7.2. Формула Пуассона.....	33
3 СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ.....	36
3.1. Понятие случайной величины.....	36
3.2. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины.....	37
3.3. Функции от дискретных случайных величин.....	38
3.4. Математическое ожидание дискретной случайной величины.....	41
3.5. Дисперсия дискретной случайной величины.....	44
3.6. Некоторые законы распределения вероятностей дискретной случайной величины.....	46
3.7. Функция распределения дискретных и непрерывных случайных величин.....	50
3.8. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины.....	53
3.9. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины, функции от непрерывны случайных величин.....	54
3.10. Виды распределений непрерывной случайной величины.....	55
3.10.1. Равномерное распределение.....	55
3.10.2. Нормальное распределение.....	57
3.10.3. Показательное распределение.....	60
3.11. Двумерные случайные величины.....	62
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА.....	66
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	67

Глава 1

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Комбинаторика изучает совокупности композиций, подчиненных определенным условиям, которые можно составить из частей заданного конечного множества.

1.1. Принцип математической индукции

В повседневной жизни мы часто сталкиваемся с общими и частными утверждениями и при анализе каких-либо ситуаций легко проводим переходы от общего утверждения к частному и наоборот.

Такие переходы имеют свое название: переход от общего к частному называется дедукцией (здесь уместно вспомнить дедуктивный метод Шерлока Холмса), а переход от частного к общему – индукцией.

Надо заметить, что в школьном курсе математики уже использовалась математическая индукция, хотя и косвенно.

Например, при изучении арифметической прогрессии можно было наблюдать следующий переход:

$$a_2 = a_1 + d, \quad a_3 = a_1 + 2d, \quad \dots \dots \dots, \quad a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

В этом параграфе мы изучим математическую индукцию более детально.

Теорема 1 (принцип математической индукции)

Если для некоторого утверждения $P(k)$, зависящего от натурального числа k , выполняются условия:

- (1) утверждение $P(k)$ истинно при $k = 1$,*
- (2) из истинности утверждения для произвольного натурального числа*

k следует его истинность для $(k + 1)$,

то это утверждение истинно для всех натуральных чисел.

△ Доказательство проведем от противного. Предположим, что при выполнении условий (1) и (2) утверждение $P(k)$ не является истинным для некоторых значений числа k .

Пусть m – наименьшее из этих чисел, то есть для $(m - 1)$ утверждение истинно, а для m – уже нет. Заметим, что из условия (1) следует, что $m > 1$.

Тогда по условию (2) из истинности $P(m - 1)$ следует истинность $P(m)$, что приводит к противоречию. ▽

Для решения примеров с использованием математической индукции предложим следующие этапы доказательства по индукции.

ЭТАПЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ПО ИНДУКЦИИ

I. **База индукции:** проверка истинности утверждения $P(n)$ для $n = 1$.

II. **Индукционное предположение** об истинности $P(k)$ для $k \leq n$.

III. **Индукционный шаг:** доказательство истинности $P(n + 1)$.

ПРИМЕРЫ

1. Докажем, что равенство $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ истинно для любого натурального числа n .

△ Проведем доказательство по этапам.

I. База индукции при $n = 1$ очевидна: $1^3 = \left(\frac{1 \cdot (1+1)}{2}\right)^2 = 1$.

II. Сделаем индукционное предположение: предположим, что утверждение $P(k)$ истинно для всех $k \leq n$. В частности, для $k = n$ истинно равенство $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

III. Осталось провести индукционный шаг. Надо показать истинность утверждения $P(n + 1)$, то есть доказать, что

$$1^3 + \dots + n^3 + (n + 1)^3 = \left(\frac{(n + 1)(n + 2)}{2}\right)^2.$$

Заметим, что $(1^3 + \dots + n^3) + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3$ по индукционному предположению.

$$\begin{aligned} \text{Далее имеем, что } \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 &= \frac{(n+1)^2}{4}(n^2 + 4(n+1)) = \\ &= \frac{(n+1)^2}{4}(n^2 + 4n + 4) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, истинность данного утверждения доказана для любого натурального числа n . ∇

2. Докажем, что истинно следующее утверждение: для любого натурального числа n выражение $(7^{n+1} + 8^{2n-1})$ делится без остатка на 19.

$\triangle$ Проведем доказательство по этапам.

I. База индукции при $n = 1$ налицо: число $(7^{1+1} + 8^{2-1}) = 49 + 8 = 57$ делится без остатка на 19.

II. Сделаем индукционное предположение: предположим, что утверждение $P(k)$ истинно для всех $k \leq n$. В частности, для $k = n$ истинно то, что $(7^{n+1} + 8^{2n-1})$ делится без остатка на 19.

III. Проведем индукционный шаг. Надо показать истинность $P(n+1)$, то есть доказать, что $(7^{(n+1)+1} + 8^{2(n+1)-1})$ делится без остатка на 19.

$$\begin{aligned} \text{Имеем, что } 7^{(n+1)+1} + 8^{2+2n-1} &= 7 \cdot 7^{n+1} + 64 \cdot 8^{2n-1} = 7 \cdot 7^{n+1} + 7 \cdot 8^{2n-1} + \\ &+ 57 \cdot 8^{2n-1} = 7(7^{n+1} + 8^{2n-1}) + 57 \cdot 8^{2n-1}. \end{aligned}$$

Это выражение делится без остатка на 19, поскольку первое слагаемое делится без остатка на 19 по индукционному предположению, а второе слагаемое имеет множитель $57 = 19 \cdot 3$.

Таким образом, истинность данного утверждения доказана для любого натурального числа n . ∇

Замечание. В отличие от дедукции выводы, основанные лишь на интуитивной индукции, могут привести к ошибкам. В качестве иллюстрации приведем два примера.

1. Пример Эйлера. Рассмотрим функцию натуральной переменной

$f(n) = n^2 + n + 41$ и вычислим некоторые ее значения:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...	39
$f(n)$	43	47	53	61	71	83	97	113	...	1601

Нетрудно убедиться в том, что все значения функции $f(n)$, представленные в таблице для $n = \overline{1, 39}$, являются простыми числами, то есть не имеют делителей, отличных от 1 и самого числа.

Возникает гипотеза, что вообще все значения функции $f(n)$ являются простыми числами.

Но при $n = 40$ имеем, что $40^2 + 40 + 41 = 40^2 + 2 \cdot 40 + 1 = (40 + 1)^2 = 41^2$. Получили не простое, составное число.

4. Рассмотрим числа 24, 64, 104. Заметим, что все они делятся без остатка на 4.

Возникает гипотеза, что все числа, оканчивающиеся на 4, делятся без остатка на 4.

Это очевидно не верно, поскольку можно рассмотреть числа 14, 34 и так далее.

1.2. Основные комбинаторные понятия

1.2.1. Правила суммы и произведения

Пусть множество A состоит из p элементов, а множество B состоит из q элементов. Составим новое множество $A \times B$, состоящее из всех упорядоченных пар (a, b) , где $a \in A$ и $b \in B$. Множество $A \times B$ называется декартовым произведением множеств A и B .

Очевидно, что декартово произведение множеств A и B , содержащих p и q элементов соответственно, содержит pq элементов.

Правило произведения

Пусть некоторый объект a можно выбрать p способами, а объект b — q способами. Тогда количество способов, которыми можно выбрать упорядо-

ченную пару (a, b) , равно pq .

Правило произведения легко обобщается на большее число объектов.

ПРИМЕРЫ

1. На некотором ареале имеется 14 видов плодовых мушек, 17 видов бабочек и 13 видов комаров. Сколькими способами можно выбрать по одному виду каждого типа?

РЕШЕНИЕ. Согласно правилу произведения имеется $14 \cdot 17 \cdot 13 = 3094$ различных способов выбора по одному виду каждого типа.

2. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску чёрную и белую ладью так, чтобы они не били друг друга?

РЕШЕНИЕ. Чёрную ладью можно поставить на шахматную доску $p = 64$ различными способами. Независимо от выбора поля чёрная ладья бьёт 15 полей, поэтому для второй ладьи остаётся $64 - 15 = 49$ полей, то есть $q = 49$. Всего число возможных способов, по правилу произведения, равно $pq = 64 \cdot 49 = 3136$.

Пусть снова множество A состоит из p элементов, а множество B - из q элементов. Предположим, что множества A и B не пересекаются. В этом случае множество $A \cup B$ состоит из $p + q$ элементов.

Правило суммы

Пусть некоторый объект a можно выбрать p способами, а объект b - q способами. Тогда количество способов, которыми можно выбрать любой из объектов a или b , равно $p + q$.

Правило суммы также легко обобщается на большее число объектов.

ПРИМЕР. Встретились 6 друзей, и каждый пожал руку каждому. Сколько всего было рукопожатий?

РЕШЕНИЕ. Каждый пожал руку каждому, то есть каждый человек сделал 5 рукопожатий. Но общее количество рукопожатий получается по правилу суммы: $n_1 + n_2 + \dots + n_6 = 6 \cdot 5 = 30$. Учтём теперь то, что каждое

рукопожатие мы посчитали дважды, и получим в результате 15 рукопожатий.

1.2.2. Слова

Рассмотрим некоторый набор символов $A = \{a, d, c, *, \#, @, \&, \dots, v\}$.

Будем называть данное множество алфавитом, его элементы – буквами, а количество букв в алфавите – мощностью алфавита (обозначается $|A|$).

Всякие упорядоченные последовательности букв из алфавита A будем называть словами, а количество букв в слове – длиной слова.

ПРИМЕРЫ

1. В алфавите $A = \{a, b, c\}$ можно записать следующие слова:

$a, b, ab, aa, aab, bccc, abc, abba, \dots$

2. В алфавите $A = \{0, 1\}$, можно записать следующие слова:

$0, 00, 1, 001, 10101, \dots$

Возникает естественный вопрос: сколько всевозможных слов заданной длины k можно образовать из алфавита мощности n ?

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Число всевозможных слов длины k , образованных из алфавита мощностью n , равно n^k .*

△ Проведем доказательство индукцией по числу букв в слове.

База индукции налицо, поскольку буквы $a_1, a_2, \dots, a_n$ алфавита A являются словами длины 1.

Предположим, что теорема верна для слов длины $k - 1$, то есть число слов длины $(k - 1)$ равно n^{k-1} .

Покажем, что теорема справедлива для слов длины k .

Чтобы получить все слова длины k , достаточно приписать к каждому слову длины $(k - 1)$ (с какой-то одной стороны) некоторую букву алфавита. А поскольку букв в алфавите в точности n , то количество слов длины k равно $n \cdot n^{k-1} = n^k$. ▽

ПРИМЕРЫ

1. Перечислим в алфавите $A = \{0, 1\}$ все слова длины 2:
00, 01, 10, 11. Их количество $- 2^2 = 4$.

00, 01, 02,

2. В алфавите $A = \{0, 1, 2\}$ все слова длины 2 следующие: 10, 11, 12,
20, 21, 22.

Их в точности $3^2 = 9$.

11, 12, 13, 14,

3. В алфавите $A = \{1, 2, 3, 4\}$ все слова длины 2 следующие: 21, 22, 23, 24,
31, 32, 33, 34,
41, 42, 43, 44.

Их в точности $4^2 = 16$.

Замечание. В двух последних примерах мы умышленно использовали простой комбинаторный прием – перечисление в виде матрицы.

Благодаря этому становится ясным алгоритм перечисления и очевидна законченность этого перечисления.

1.2.3. Размещения и перестановки

Рассмотрим теперь слова без одинаковых букв (без повторений). Такие слова будем называть **размещениями**.

ПРИМЕРЫ

1. В алфавите $A = \{0, 1\}$ размещениями длины 1 являются 0, 1, а размещениями длины 2 – 01, 10.

2. В алфавите $A = \{1, 2, 3\}$ размещениями длины 1 являются 1, 2, 3, размещениями длины 2 – 12, 21, 13, 31, 23, 32, размещениями длины 3 – 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Замечание. Легко видеть, что длина размещения не может превосходить мощности алфавита $|A|$.

Теорема 3. Число различных размещений длины k , образованных из алфавита мощности n , равно $n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$.

△ Проведем доказательство индукцией по длине слова.

Очевидно, что при $k = 1$ теорема верна, поскольку число размещений длины 1 равно n .

Предположим, что теорема верна для размещений длины $(k-1)$, то есть число размещений длины $(k-1)$ равно $n(n-1)\dots(n-k+2)$.

Покажем, что теорема справедлива для размещений длины k .

Чтобы получить все размещения длины k , достаточно к каждому размещению длины $(k-1)$ приписать (с какой-то одной стороны) одну из $n-(k-1)$ букв, не вошедших в это размещение.

Таким образом, любое размещение длины $(k-1)$ порождает $n-(k-1)$ размещений длины k .

Следовательно, всего размещений длины k в точности

$$(n(n-1)\dots(n-k+2)) \cdot (n-(k-1)). \quad \nabla$$

Для обозначения количества различных размещений длины k , образованных из алфавита мощности n , используется символ A_n^k и имеет место следующая формула:

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad (1.1)$$

где A_n^k читается "а из эн по ка", $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ читается "эн факториал".

Частным случаем размещений являются **перестановки** – размещения максимальной длины, равной $|A|$.

ПРИМЕР. В алфавите $A = \{1, 2, 3\}$ перестановками являются следующие слова: 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Теорема 4. Число P_n всех перестановок, образованных из алфавита мощности n , равно $n!$.

△ По теореме 3 при $k = n$ получаем, что

$$P_n = A_n^n = n(n-1)\dots(n-n+2)(n-n+1) = n!. \quad \nabla$$

1.2.4. Сочетания

Обратимся теперь к подмножествам алфавита $A = \{a_1, \dots, a_n\}$.

Определение. Сочетанием из n элементов по k называется любое подмножество в A , содержащее k элементов.

ПРИМЕР. В алфавите $A = \{1, 2, 3\}$ сочетаниями из трех элементов по два являются следующие подмножества: $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$.

Теорема 5. Число всех сочетаний из n элементов по k , где $0 \leq k \leq n$, в точности равно

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (1.2)$$

△ Для доказательства теоремы заметим, что для того, чтобы получить всевозможные размещения длины k из алфавита мощностью n , достаточно взять всевозможные сочетания из n по k , а затем из каждого сочетания образовать $k!$ всевозможных перестановок.

Таким образом $A_n^k = C_n^k \cdot k!$. Следовательно, $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. ▽

В качестве приложения чисел C_n^k рассмотрим бином Ньютона:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{n(n-1)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{n!}x^n.$$

Можно доказать, что все коэффициенты из вышеприведенной формулы соответственно равны C_n^k , $k = \overline{0, n}$ (доказательство опустим).

Таким образом, бином Ньютона представляется в следующем виде:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \dots + C_n^nx^n. \quad (1.3)$$

Кстати, поэтому числа C_n^k часто называют биномиальными коэффициентами.

Из формулы (1.3), в частности, можно получить при $x = 1$ следующее тождество:

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n,$$

смысл которого заключается в том, что число всех подмножеств у множества мощности n равно 2^n .

Замечание. Для нахождения биномиальных коэффициентов C_n^k помимо формулы (1.2) иногда используют так называемый треугольник Паскаля, который строится следующим образом.

В этом треугольнике на вершине и по бокам стоят единицы. Каждое число равно сумме двух расположенных над ним чисел. Продолжать треугольник можно неограниченно. Строки треугольника симметричны относительно вертикальной оси

Треугольник Паскаля имеет следующий вид:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 1 & & 4 & & 6 & & 4 & 1 \\
 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & \\
 \dots & & \dots & & \dots & & \dots & \dots
 \end{array}$$

Нетрудно видеть, что биномиальные коэффициенты для бинома Ньютона 2-ой степени в треугольнике Паскаля записаны в третьей строке, для бинома Ньютона 3-ой степени – в четвертой строке и так далее.

Из вышесказанного мы получаем для сочетаний следующие полезные тождества: $C_n^{k+1} = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k+1}$, $C_n^k = C_{n-k}^{n-k}$.

Глава 2

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Исторически теория вероятностей появилась в связи с попытками подсчета возможности различных исходов в азартных играх. В настоящее же время она применяется в науке, в том числе биологии, для оценки вероятности практически важных событий. От игр остались лишь наглядные примеры, которые удобно использовать для иллюстрации теоретических положений.

В теории вероятностей исследуются закономерности, относящиеся к случайным событиям, величинам, процессам.

2.1. Испытания и события

В жизни мы часто сталкиваемся со случайными явлениями (событиями).

Обычно события рассматривают как результат испытания (опыта, эксперимента, природного действия).

Наблюдая различные события, можно заметить, что существуют два типа связей между испытанием и наступлением или ненаступлением некоторого события A . В одних случаях осуществление испытания непременно вызывает событие A . Так, например, материальная точка массой m_0 под воздействием силы F (испытание) приобретает ускорение $a = F/m_0$ (событие A). В других случаях многократное повторение испытания может привести или не привести к появлению события A . Такие события принято называть **случайными**.

Например, событие "Завтра будет дождь" является случайным событием, а событие "Скоро наступит зима" – нет.

Нас будут интересовать только случайные события.

Замечание. Не следует думать о случайных событиях как о беспричинных, ничем не обусловленных. Известно, что все события связаны между собой, отдельное событие представляет следствие какого-то другого и само служит причиной последующего. Однако проследить количественно эту связь между испытанием и событием часто затруднительно или даже невозможно. Так, при бросании игральной кости (однородный кубик с пронумерованными шестью гранями: 1, 2, 3, 4, 5, 6) окончательное положение кубика зависит от движения руки в момент бросания, сопротивления воздуха, положения кубика при попадании на поверхность, особенности поверхности, на которую упал кубик, и других факторов, которые в отдельности учесть невозможно.

Мы в дальнейшем, рассматривая связь между испытанием и событием, будем всегда считать условия проведения испытания идеальными. Например, при бросании игральной кости ее окончательное положение не будет зависеть ни от каких факторов. Известно будет лишь то, что игральная кость брошена, и она легла на какую-то одну определенную грань (ни в коем случае – на ребро).

Рассмотрим классические в теории вероятностей примеры.

ПРИМЕРЫ

1) "Стрелок-мишень".

Испытанием является выстрел по мишени.

Событием – попадание (или непопадание) стрелком в мишень.

2) В урне находятся цветные шары.

Испытанием является извлечение шара из урны.

Событием – появление шара определенного цвета.

3) Монета.

Испытанием является подбрасывание монеты.

Событием – выпадение "герба"(или "решки").

4) Игральная кость.

Испытанием является подбрасывание игральной кости.

Событием – выпадение определенного числа очков (одного из 1, 2, 3, 4, 5, 6).

Виды случайных событий

I. События называют **несовместными**, если появление одного из них исключает появление другого (других) в одном и том же испытании.

Например, при однократном подбрасывании игральной кости все возможные исходы являются несовместными.

II. События называют **независимыми**, если появление одного из них не влияет на появление другого (других) в одном и том же испытании.

Например, при бросании двух монет исходы на разных монетах являются независимыми.

III. Совокупность событий в одном испытании называют **полной группой событий**, если во время испытания обязательно появляется хотя бы одно из этих событий.

Например, при бросании игральной кости совокупность из пяти событий, состоящих в выпадении одного из чисел 1, 2, 3, 4, 5, не образует полную группу, так как в результате бросания кости может выпасть 6 очков, а это событие не входит в указанную группу.

Вместе с тем, совокупность всех событий, состоящих в выпадении одного из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, образует полную группу.

IV. **Равновозможными** мы назовем события, у которых имеются совершенно одинаковые условия (шансы, обстоятельства) для наступления.

Например, при бросании монеты события $A = \text{"выпал "герб" "}$ и $B = \text{"выпала "решка" "}$ являются равновозможными.

А при бросании игральной кости равновозможными являются все шесть событий $A_k = \text{"выпало } k \text{ очков"}$, $k = \overline{1, 6}$.

2.1.1. Пространство элементарных событий

С целью избежать излишней сложности и громоздкости рассуждений введем понятие пространства элементарных событий при рассмотрении нескольких примеров.

ПРИМЕРЫ

1. Подбрасывание игральной кости.

Пространством элементарных событий назовем следующее множество:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\},$$

где ω_k = "выпало k очков".

События, в этом случае, можно рассматривать как подмножества в множестве Ω .

Например, подмножество $\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ в пространстве Ω в точности является событием A = "выпало четное число очков", а множество $\{\omega_3, \omega_6\}$ является событием B = "выпало число очков, кратное трем".

2. Трехкратное подбрасывание монеты.

Для удобства введем следующие обозначения:

"на монете выпал "герб" " = 1,

"на монете выпала "решка" " = 0.

Пространством элементарных событий в данном случае назовем следующее множество:

$$\Omega = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}.$$

Тогда событиями являются, например, следующие подмножества:

$A = \{100, 101, 110, 111\}$ = "при первом подбрасывании монеты выпал "герб" " ,

$B = \{011, 101, 110\}$ = "в результате трехкратного подбрасывания монеты выпало ровно два "герба" " .

3. Стрельба по плоской мишени размера 10х10.

Элементарным событием в этом случае является попадание в любую точку мишени. Тогда при подходящем выборе системы координат на мишени

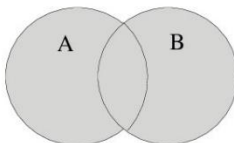
$$\Omega = \{(u, v) : -5 < u < 5, -5 < v < 5\}.$$

Множество точек $\{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1\}$ является событием $A =$ "попадание произошло в круг с радиусом 1".

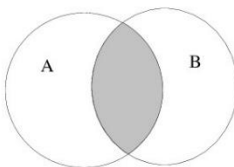
2.1.2. Операции над событиями

Поскольку события мы можем рассматривать как множества, то будет вполне естественным ввести на них следующие операции.

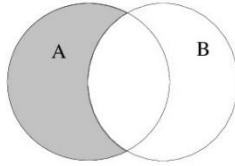
Определение 1. Суммой двух событий $A + B$ (или объединением $A \cup B$) называется событие, состоящее из всех элементарных событий, принадлежащих A или B .



Определение 2. Произведением двух событий AB (или пересечением $A \cap B$) называется событие, состоящее из всех элементарных событий, принадлежащих A и B .



Определение 3. Разностью событий $A \setminus B$ называется событие, состоящее из элементов A , не принадлежащих B .



Определение 4. Пространство Ω называют **достоверным** событием, то есть событием, которое в любом случае наступит.

Символом $\emptyset$ обозначают **невозможное** событие, то есть событие, которое ни при каких обстоятельствах не может наступить.

Через $\bar{A} = \Omega \setminus A$ обозначают событие, **противоположное** событию A .

Замечание.

- 1) Если события A и B несовместны, то $AB = \emptyset$.
- 2) $AA = A$, $A + A = A$, $A\bar{A} = \emptyset$.

ПРИМЕРЫ

1) При подбрасывании игральной кости рассмотрим события $A =$ "выпало четное число очков" $= \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ и $B =$ "выпало число очков, кратное трем" $= \{\omega_3, \omega_6\}$.

Тогда $\bar{A} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\} =$ "выпало нечетное число очков";

$A + B = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_6\} =$ "выпало число очков, кратное двум или трем";

$AB = \{\omega_6\} =$ "выпало число очков, кратное двум и трем" $=$ "выпало число очков, кратное шести";

$A \setminus B = \{\omega_2, \omega_4\} =$ "выпало число очков, кратное двум, но не кратное трем";

$B \setminus A = \{\omega_3\} =$ "выпало число очков, кратное трем, но не кратное двум".

2) При трехкратном подбрасывании монеты рассмотрим события $A = \{100, 101, 110, 111\} =$ "при первом подбрасывании монеты выпал "герб" " и $B = \{011, 101, 110\} =$ "в результате трехкратного подбрасывания монеты выпало ровно два "герба" ".

Тогда $A + B = \{011, 100, 101, 110, 111\}$, $AB = \{101, 110\}$, $A \setminus B = \{100, 111\}$, $B \setminus A = \{011\}$.

2.2. Понятие вероятности

I. Статистическое определение вероятности.

Вероятность $P(A)$ в теории вероятностей выступает как числовая характеристика степени возможности появления какого-либо определенного случайного события A при многократном повторении испытаний.

Допустим, при 1000 бросаний игральной кости цифра 4 выпадает 160 раз. Отношение $160/1000 = 0,16$ показывает относительную частоту выпадения цифры 4 в данной серии испытаний. В более общем случае, когда случайное событие A происходит m раз в серии n независимых испытаний, относительной частотой события в данной серии испытаний или просто частотой события A называют отношение $\frac{m}{n}$. При большом числе испытаний частота событий примерно постоянная; увеличение числа испытаний уменьшает колебание частоты события около постоянной величины.

Вероятностью случайного события назовем предел, к которому стремится частота события при неограниченном увеличении числа испытаний:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}.$$

Это статистическое определение вероятности.

Замечание. Естественно, что никто и никогда не сможет проделать неограниченное число испытаний для того, чтобы определить вероятность. В этом нет и надобности. Практически за вероятность можно принять относительную частоту события при большом числе испытаний. Так, например, из статистических закономерностей рождения, установленных за много лет наблюдений, вероятность того события, что новорожденный будет мальчиком, оценивают в 0,515.

II. Классическое определение вероятности.

Если при испытаниях нет каких-либо причин, вследствие которых одно случайное событие оказывалось бы чаще других (равновозможные события), можно определить вероятность исходя из теоретических соображений.

Например, выясним в случае бросания монеты частоту выпадания "герба"

(событие A). Разными экспериментаторами при нескольких тысячах испытаний было показано, что относительная частота такого события принимает значения, близкие к 0,5. Учитывая, что появление "герба" и "решки" (событие B) являются событиями равновероятными, если монета симметрична, суждение $P(A) = P(B) = 0,5$ можно было бы сделать и без определения частоты этих событий. На основе понятия "равновозможности" событий формулируется другое определение вероятности.

Допустим, что в результате испытания должно произойти только одно из n равновероятных несовместных событий, образующих полную группу.

Пусть рассматриваемое событие A происходит в m случаях (исходах), которые называются благоприятствующими событию A , и не происходит при остальных $(n - m)$ исходах, неблагоприятствующих A . (Под исходами подразумеваются те элементарные события, из которых состоит пространство элементарных событий.)

Определение 5. Вероятностью события A называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов (m) к общему числу всех равновероятных несовместных исходов (n), образующих полную группу, то есть

$$P(A) = \frac{m}{n}. \quad (2.1)$$

Это классическое определение вероятности.

ПРИМЕРЫ

1) В урне находится 40 шаров: 10 черных и 30 белых. Найти вероятность того, что вынутый наугад один шар будет черным (событие A).

РЕШЕНИЕ. Испытание заключается в вынимании одного шара из урны. Количество всех равновероятных исходов этого испытания равно общему числу шаров в урне: $n = 40$.

Число благоприятствующих событию A исходов равно числу черных шаров в урне: $m = 10$. Эти события несовместны, так как вынимается один и только один шар. По формуле (2.1) имеем $P(A) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$.

2) Набирая номер телефона, абонент забыл две цифры и набрал их наудачу.

Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

РЕШЕНИЕ. Обозначим через A событие "набраны нужные цифры".

Общее количество цифр равно 10 (это цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Испытание заключается в подборе двух нужных цифр из имеющихся десяти. Тогда число всех исходов этого испытания равно количеству размещений из десяти по два, то есть $A_{10}^2 = \frac{10!}{(10-2)!} = 9 \cdot 10 = 90$.

Число благоприятствующих исходов равно 1 (это одна интересующая нас пара цифр).

Таким образом, имеем $P(A) = \frac{1}{90}$.

3) При трехкратном подбрасывании монеты найти вероятность события $B =$ "в результате трехкратного подбрасывания монеты выпало ровно два "герба" ".

РЕШЕНИЕ. Учитывая второй пример в п.2.1.1, заметим, что число n всех исходов при трехкратном подбрасывании монеты равно 8, поскольку $\Omega = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$.

Число m благоприятствующих событию B исходов равно 3, поскольку $B = \{011, 101, 110\}$.

Таким образом, имеем $P(B) = \frac{3}{8}$.

Свойства вероятности

1⁰. Вероятность достоверного события равна 1.

2⁰. Вероятность невозможного события равна 0.

3⁰. Для любого события A справедливы неравенства

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Доказательства свойств очевидны.

III. Геометрическая вероятность.

Недостаток классического определения вероятности заключается в невозможности применения его к испытаниям с бесконечным числом исходов.

Решить эту проблему позволяет понятие геометрической вероятности.

Под геометрической вероятностью будем понимать вероятность попадания точки в какую-либо область (отрезок, круг, квадрат, сферу и т.п.).

Таким образом, понятие **геометрической вероятности** можно трактовать следующим образом:

вероятность события A это отношение геометрической меры (длины, площади, объема) области благоприятствующих появлению события A исходов к геометрической мере (длине, площади, объему) области всех исходов испытания.

Рассмотрим геометрическую вероятность на следующих примерах.

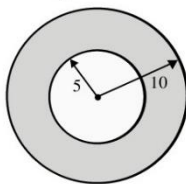
ПРИМЕРЫ

1) На плоскости начерчены две концентрических окружности, радиус которых 5 и 10 см соответственно. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет в кольцо (событие A).

РЕШЕНИЕ. Очевидно, что площадь области благоприятствующих появлению события A исходов равна площади кольца $S_1 = 10^2\pi - 5^2\pi = 75\pi$.

Площадь области всех исходов испытания равна площади большого круга $S_2 = 10^2\pi = 100\pi$.

Тогда вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет в кольцо, равна $P(A) = \frac{S_1}{S_2} = \frac{75\pi}{100\pi} = 0,75$.



2) Задача о встрече.

Два студента условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами. Пришедший первым ждет второго в течении 15 минут, затем уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится?

РЕШЕНИЕ. Обозначим в прямоугольной системе координат через x момент прихода первого студента, а через y – момент прихода второго студента (в часах), тогда $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ (обозначаем, для удобства, время 12.00 через 0, время 13.00 через 1).

Очевидно, что площадь области всех исходов испытания равна площади квадрата $S = 1 \cdot 1 = 1$.

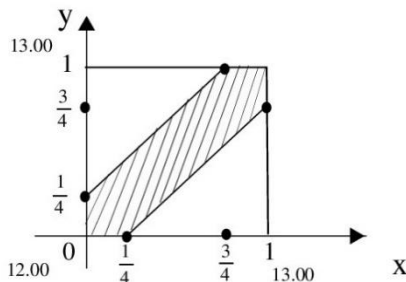
Обозначим через A событие, заключающееся в том, что встреча состоится.

Заметим, что область благоприятствующих появлению события A исходов описывается следующим неравенством:

$$|y - x| < 15 \text{ минут} \quad \text{или} \quad |y - x| < \frac{1}{4} \text{ часа.}$$

Раскрывая модуль, получаем $x - \frac{1}{4} < y < x + \frac{1}{4}$.

Изобразим полученную область на графике и найдем площадь S_0 области благоприятствующих появлению события A исходов.



Искомая площадь равна разности между площадью квадрата 1×1 и площадью квадрата, составленного из двух треугольников, со стороной $\frac{3}{4}$, то есть

$$S_0 = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}.$$

Тогда вероятность того, что встреча состоится равна

$$P(A) = \frac{S_0}{S} = \frac{\frac{7}{16}}{1} = \frac{7}{16}.$$

2.3. Теоремы сложения вероятностей

Пусть события A и B несовместны, причем вероятности этих событий известны. Возникает естественный вопрос: как найти вероятность того, что наступит хотя бы одно из событий A или B (то есть наступит либо событие A , либо событие B)? Ответом на этот вопрос является следующая теорема.

Теорема 1. (теорема сложения для несовместных событий)

Вероятность появления одного из двух несовместных событий A или B в одном испытании равна сумме вероятностей этих событий, то есть

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

$\triangle$ Пусть n – общее число всех исходов испытания, m_1 – число исходов, благоприятствующих A , m_2 – число исходов, благоприятствующих B .

Поскольку события A и B несовместны, то множество исходов, благоприятствующих A , не пересекается с множеством исходов, благоприятствующих событию B .

Поэтому число исходов, благоприятствующих либо событию A , либо событию B , равно $m_1 + m_2$. Следовательно, имеем, что

$$P(A + B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B). \quad \nabla$$

ПРИМЕР. В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Вынимаем их урны один шар. Найти вероятность появления цветного шара.

РЕШЕНИЕ. Пусть A = "появление красного шара", B = "появление синего шара". Тогда $P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$.

Так как A и B несовместны, то $P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

Теорема 2. *Сумма вероятностей противоположных событий равна 1, то есть $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.*

$\triangle$ Поскольку $\bar{A} = \Omega \setminus A$, то $P(A + \bar{A}) = P(\Omega) = 1$.

Так как события A и $\bar{A}$ несовместны, как противоположные события, то по теореме 1 имеем, что $P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$. ∇

Следствие. Вероятность события, противоположного событию A , находится по формуле

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

2.4. Условная вероятность. Теоремы умножения вероятностей

Пусть события A и B зависимы, то есть появление одного из них влияет на появление другого.

Определение. Условной вероятностью $P_A(B)$ называют вероятность события B , вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

ПРИМЕР. В урне 3 белых и 3 черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару. Найти вероятность появления белого шара при втором испытании (событие B), если при первом испытании был известен черный шар (событие A).

РЕШЕНИЕ. Очевидно, что после первого испытания в урне осталось 5 шаров, из них 3 белых. Поэтому искомая условная вероятность равна $P_A(B) = \frac{3}{5}$.

Примем без доказательства следующую теорему.

Теорема 3. $P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}$.

Следствием теоремы 3 является следующее очень важное утверждение.

Теорема 4. (теорема умножения для зависимых событий)

Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, при условии, что первое событие наступило:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B).$$

Эта теорема легко обобщается на случай, когда количество событий более двух.

ПРИМЕР. В урне 5 белых, 4 черных и 3 синих шара. Каждое испытание состоит в том, что наудачу извлекают один шар. Найти вероятность того, что

при первом испытании появится белый шар (A), при втором – черный (B), при третьем – синий (C).

РЕШЕНИЕ. Очевидно, что $P(A) = \frac{5}{12}$, $P_A(B) = \frac{4}{11}$, $P_{AB}(C) = \frac{3}{10}$.

Тогда $P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{22}$.

Если события A и B независимы, то $P_A(B) = P(B)$ и имеет место следующая теорема.

Теорема 5. (теорема умножения для независимых событий)

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

2.5. Теорема сложения для совместных событий

Обратимся теперь к совместным событиям A и B , которые могут одновременно наступить в одном испытании.

Совместными событиями при бросании игральной кости являются, например, события A = "появление 4-х очков" и B = "появление четного числа очков".

Пусть A и B – произвольные совместные события, вероятности которых известны. Как в этом случае вычислить вероятность того, что наступит хотя бы одно из событий A или B ? Ответом на этот вопрос является следующая теорема.

Теорема 6. (теорема сложения для совместных событий)

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

△ Очевидно, что событие $(A + B)$ наступит тогда и только тогда, когда наступит одно из следующих несовместных событий: $A\bar{B}$, $\bar{A}B$ или AB , то есть $A + B = A\bar{B} + \bar{A}B + AB$.

Тогда по теореме 1 для несовместных событий имеем, что

$$P(A + B) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) + P(AB). \quad (2.2)$$

С другой стороны, событие A произойдет тогда и только тогда, когда наступит одно из двух несовместных событий: $A\bar{B}$ или AB .

По теореме 1 имеем, что $P(A) = P(A\bar{B}) + P(AB)$.

Для события $P(B)$ аналогично получим, что $P(B) = P(\bar{A}B) + P(AB)$.

Из двух последних формул следует, что

$$P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB), \quad P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB).$$

Подставляя данные выражения в формулу (2.2), получим окончательную формулу $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. ▽

ПРИМЕР. Вероятности попадания в цель при стрельбе первого и второго орудий соответственно равны 0,7 и 0,8. Найти вероятность попадания в цель хотя бы одного орудия при залпе из обоих орудий.

РЕШЕНИЕ. Введем следующие обозначения: A = "попало в цель первое орудие", B = "попало в цель второе орудие".

Поскольку A и B независимы, то $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56$.

Тогда искомая вероятность равна $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,7 + 0,8 - 0,56 = 0,94$.

2.6. Формула полной вероятности и формулы Байеса

Следствием основных теорем теории вероятностей – теорем сложения и умножения – являются формула полной вероятности и формулы Байеса.

Теорема 7. (Формула полной вероятности).

Вероятность события A , которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $H_1, \dots, H_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A). \quad (2.3)$$

$\triangle$ Легко видеть, что появление события A означает осуществление одного из несовместных событий $H_1A, H_2A, \dots, H_nA$, то есть $A = H_1A + \dots + H_nA$.

Тогда по теореме 1 для несовместных событий имеем, что

$$P(A) = P(H_1A) + \dots + P(H_nA). \quad (2.4)$$

Но по теореме 4 для зависимых событий

$$P(H_1A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A), \dots, P(H_nA) = P(H_n) \cdot P_{H_n}(A).$$

Подставляя данные выражения в формулу (2.4), получим требуемую формулу (2.3). ∇

ПРИМЕР. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартна равна 0,8, второго равна 0,9. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь – стандартная.

РЕШЕНИЕ. Введем следующие обозначения:

A = "извлекается стандартная деталь",

H_1 = "деталь извлекается из первого набора",

H_2 = "деталь извлекается из второго набора".

Очевидно, что $P(H_1) = \frac{1}{2}$, $P(H_2) = \frac{1}{2}$, $P_{H_1}(A) = 0,8$, $P_{H_2}(A) = 0,9$.

Тогда по формуле (2.3) имеем, что

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) = 0,5 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,9 = 0,85.$$

Замечание. События $H_1, \dots, H_n$ в формуле (2.3) называют гипотезами, поскольку заранее не известно, какое из них наступит, а событие A принято называть основным событием.

Предположим, что проведено испытание, в результате которого появилось событие A вместе с одной из гипотез $H_1, \dots, H_n$. Возникает вопрос: как изменились в этом случае вероятности гипотез в связи с тем, что основное событие A уже наступило? То есть нас будут интересовать следующие условные вероятности: $P_A(H_1)$, $P_A(H_2), \dots, P_A(H_n)$.

Заметим, что по теореме 4 справедлива следующая формула:

$$P(AH_i) = P(A)P_A(H_i) = P(H_i)P_{H_i}(A).$$

Откуда следует, что $P_A(H_i) = \frac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{P(A)}$.

Тогда по теореме 7 о полной вероятности имеем, что

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{P(H_1)P_{H_1}(A) + \dots + P(H_n)P_{H_n}(A)}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Полученные формулы называются *формулами Байеса*.

Значение формул Байеса состоит в том, что при наступлении события A (по мере получения новой информации) мы можем проверять и корректировать выдвинутые до испытания гипотезы. Такой подход, называемый *байесовским*, дает возможность корректировать управленческие решения и оценки неизвестных параметров распределения изучаемых признаков в статистическом анализе.

2.7. Повторение испытаний

Предположим, что производится n независимых испытаний, причем:

1) событие A (единственное интересующее нас в серии испытаний) может как появиться, так и не появиться в любом из этих испытаний;

2) вероятность появления события A (вероятность "успеха") в каждом испытании одинакова и равна p (вероятность противоположного события $\bar{A}$ обозначают через

$$q = 1 - p).$$

Описанную ситуацию принято называть *схемой Бернулли*.

Поставим следующую задачу: найти вероятность $P_n(k)$ того, что в n испытаниях событие A наступит ровно k раз.

2.7.1. Формула Бернулли

Рассмотрим сложное событие, состоящее в том, что в n испытаниях событие A наступит k раз и не наступит $(n - k)$ раз.

ПРИМЕР. Пусть событие A появляется три раза в четырех испытаниях. Тогда может произойти одно из следующих сложных событий:

$$AAAA, AA\bar{A}\bar{A}, A\bar{A}AA, \bar{A}AAA.$$

Если событие A появляется два раза в четырех испытаниях, то возможно одно из следующих сложных событий:

$$AA\bar{A}\bar{A}, A\bar{A}A\bar{A}, \bar{A}AA\bar{A}, \bar{A}\bar{A}AA, \bar{A}A\bar{A}A, \bar{A}\bar{A}AA.$$

Очевидно, что вероятность одного сложного события, состоящего в том, что в n испытаниях событие A наступит k раз и не наступит $(n - k)$ раз, по теореме об умножении независимых событий равно $p^k q^{n-k}$.

Но таких сложных событий в точности C_n^k .

А так как эти сложные события несовместны, то по теореме сложения вероятностей несовместимых событий искомая вероятность равна их сумме:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k q^{n-k}. \quad (2.5)$$

Формулу (2.5) называют формулой Бернулли.

ПРИМЕР. Обратимся к предыдущему примеру. Если событие A появляется три раза в четырех испытаниях, то $P_4(3) = C_4^3 \cdot p^3 q = 4 \cdot p^3 q$.

В случае, когда событие A появляется два раза в четырех испытаниях, то $P_4(2) = C_4^2 \cdot p^2 q^2 = 6 \cdot p^2 q^2$.

Определение. Число k_0 наступления события A в n независимых испытаниях называется наивероятнейшим, если вероятность наступления этого события $P_n(k_0)$ по крайней мере не меньше вероятностей других событий $P_n(k)$ при любом k .

Для нахождения k_0 запишем систему неравенств

$$\begin{cases} P_n(k_0) \geq P_n(k_0 + 1), \\ P_n(k_0) \geq P_n(k_0 - 1). \end{cases}$$

Решим первое неравенство системы. Используя формулу Бернулли, имеем

$$\frac{n!}{k_0!(n-k_0)!} \cdot p^{k_0} q^{n-k_0} \geq \frac{n!}{(k_0+1)!(n-k_0-1)!} \cdot p^{k_0+1} q^{n-k_0-1},$$

$$\frac{n!}{k_0!(n-k_0-1)!(n-k_0)} \cdot p^{k_0} q^{n-k_0} \geq \frac{n!}{k_0!(k_0+1)(n-k_0-1)!} \cdot p^{k_0+1} q^{n-k_0-1}.$$

После сокращений получим $\frac{1}{n-k_0} \cdot q \geq \frac{1}{k_0+1} \cdot p$, откуда имеем, что $(k_0+1) \cdot q \geq (n-k_0) \cdot p$, $k_0(p+q) \geq np-q$, а так как $p+q=1$, то $k_0 \geq np-q$.

Решая второе неравенство системы, получим аналогично: $k_0 \leq np+p$.

Объединяя полученные решения двух неравенств, приходим к двойному неравенству:

$$np-q \leq k_0 \leq np+p. \quad (2.6)$$

ПРИМЕРЫ

1) Батарея дала 14 выстрелов по объекту, вероятность попадания в который равна 0,3. Найти наивероятнейшее число попаданий и вероятность этого числа попаданий.

РЕШЕНИЕ. По формуле (2.6) $(14 \cdot 0,3 - 0,7) \leq k_0 \leq (14 \cdot 0,3 + 0,3)$ или $3,5 \leq k_0 \leq 4,5$. Единственное целое число, удовлетворяющее полученному равенству, $k_0 = 4$, а соответствующая ему вероятность равна

$$P_{14}(4) = C_{14}^4 \cdot p^4 q^{10} = \frac{14!}{4!10!} \cdot (0,3)^4 (0,7)^{10} = 1001 \cdot 0,0081 \cdot 0,0282 = 0,229.$$

2) Вероятность попадания в цель при каждом выстреле из орудия равна 0,8. Сколько нужно произвести выстрелов, чтобы наивероятнейшее число попаданий было равно 20.

РЕШЕНИЕ. Согласно неравенству (2.6)

$(n \cdot 0,8 - 0,2) \leq 20 \leq (n \cdot 0,8 + 0,8)$ или $(n - 0,25) \leq 25 \leq (n + 1)$, откуда $24 \leq n \leq 25,25$, то есть необходимо произвести 24 или 25 выстрелов.

Замечание. В случае, когда необходимо вычислить вероятность $P_n(k)$ появления события A при очень большом числе испытаний n , непосредственное вычисление по формуле Бернулли становится весьма затруднительным. Поэтому возникает естественное желание иметь более простые приближенные формулы для вычисления $P_n(k)$ при больших n . Такие формулы, называемые асимптотическими, мы приведем ниже.

2.7.2. Формула Пуассона

Теорема 8. (Пуассона)

Если вероятность p наступления события A в каждом испытании стремится к нулю при неограниченном увеличении числа испытаний n , причем при этом произведение np стремится к постоянному числу ($np \rightarrow \lambda$), то вероятность $P_n(k)$ того, что в n испытаниях событие A наступит ровно k раз, удовлетворяет предельному равенству

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

△ По формуле Бернулли:

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \left(\frac{np}{n}\right)^k \left(1 - \frac{np}{n}\right)^{n-k}.$$

Учитывая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} np = \lambda$ и при достаточно больших n вероятность $p \approx \frac{\lambda}{n}$, имеем, что

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}.$$

Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right) = \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = 1$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-\frac{n}{\lambda}}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right)^{-\lambda} = e^{-\lambda}, \text{ то } \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \quad \nabla$$

Замечание. Вообще говоря, условие теоремы Пуассона $p \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, так что $np \rightarrow \lambda$, противоречит условию схемы Бернулли, что $p = \text{const}$. Однако, если вероятность p постоянна и мала, число испытаний n велико и число $np = \lambda \leq 10$, то из теоремы Пуассона вытекает приближенная формула Пуассона

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \quad (2.7)$$

В приложении приведена таблица значений функции $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

ПРИМЕРЫ

1) На факультете насчитывается 1825 студентов. Какова вероятность того, что 1 сентября является днем рождения одновременно четырех студентов факультета?

РЕШЕНИЕ. Вероятность того, что день рождения студента 1 сентября, равна $p = \frac{1}{365}$. Так как вероятность $p = \frac{1}{365}$ — мала, n — велико и $\lambda = np = 1825 \cdot \frac{1}{365} = 5 \leq 10$, то применяем формулу Пуассона (2.7)

$$P_{1825}(4) \approx \frac{5^4}{4!} e^{-5} = 0,1755.$$

2) В таблице случайных чисел цифры сгруппированы по две. Найти вероятность того, что среди ста случайно выбранных пар пара 00 встретится не более двух раз (событие A).

РЕШЕНИЕ.

Очевидно, что вероятность появления пары 00 равна $p = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$,

тогда $q = \frac{99}{100}$ и $\lambda = np = 100 \cdot \frac{1}{100} = 1 \leq 10$.

По формуле Пуассона

$$\begin{aligned} P(A) &= P_{100}(0) + P_{100}(1) + P_{100}(2) \approx \frac{1^0}{0!}e^{-1} + \frac{1^1}{1!}e^{-1} + \frac{1^2}{2!}e^{-1} = \\ &= 0,3679 + 0,3679 + 0,1839 = 0,9197. \end{aligned}$$

Глава 3

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

3.1. Понятие случайной величины

Определение. Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед не известное и зависящее от случайных причин.

Для обозначения случайных величин будем применять большие латинские буквы $X, Y, Z, \dots$, а для их значений – малые латинские буквы $x, y, z, \dots$.

ПРИМЕРЫ

1) Испытание – бросание игральной кости.

Случайная величина X = "выпадение определенного числа очков".

Значения случайной величины – $\{x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_6 = 6\}$.

2) Испытание – рождение детей.

Случайная величина X = "число родившихся мальчиков среди ста новорожденных". Значения случайной величины – $\{x_1 = 0, x_2 = 1, \dots, x_{101} = 100\}$.

3) Испытание – стрельба из орудия.

Случайная величина X = "расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле из орудия". Значения случайной величины – все точки некоторого интервала числовой прямой.

Определение. Случайная величина называется *дискретной*, если она принимает отдельные, изолированные друг от друга числовые значения (см. примеры 1, 2).

Случайная величина называется *непрерывной*, если она может принимать

любые значения из некоторого интервала числовой прямой (см. пример 3).

3.2. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины

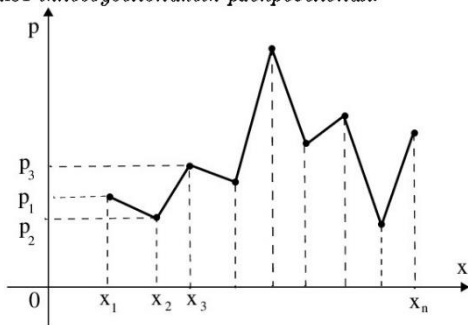
Определение. Законом распределения вероятностей дискретной случайной величины называется соответствие между возможными значениями случайной величины и вероятностями их появления.

Его можно задать в виде таблицы, в виде формулы или графически. Мы в дальнейшем будем в основном использовать графический способ.

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Замечание 1. События $X = x_1, X = x_2, \dots, X = x_n$ образуют полную группу, то есть $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. Если же число значений x_i бесконечно, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} p_i$ должен сходиться и его сумма равна 1.

Замечание 2. Если закон распределения вероятностей дискретной случайной величины задан графически (см. рис.), то полученную фигуру называют *многоугольником распределения*.



ПРИМЕР. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается

один выигрыш в 5000 руб. и десять выигрышей по 1000 руб.

Очевидно, закон распределения вероятностей случайной величины X – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета – имеет следующий вид:

X	$x_1 = 5000$	$x_2 = 1000$	$x_3 = 0$
P	$p_1 = 0,01$	$p_2 = 0,1$	$p_3 = 0,89$

В соответствии с замечанием 1 проведем контроль:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 0,01 + 0,1 + 0,89 = 1.$$

Сумма вероятностей равна 1, то есть вычисления проведены верно.

3.3. Функции от дискретных случайных величин

От случайной величины X можно рассматривать любую функцию, например, $\sin X, \ln X$. Мы же ограничимся суммой случайных величин $X + Y$ и произведением случайных величин $X \cdot Y$ (в частности, возведением в степень случайной величины и произведением случайной величины на константу).

Рассмотрим указанные операции над дискретными случайными величинами на следующих примерах.

ПРИМЕРЫ

1) Рассмотрим случайную величину X , закон распределения вероятностей которой имеет следующий вид:

X	3	5
P	0,3	0,7

Покажем, что закон распределения вероятностей случайной величины $6X$ имеет вид

6X	18	30
P	0,3	0,7

Действительно, вероятности значений случайной величины $6X$ равны $P(6X = 18 = 6 \cdot 3) = P(X = 3) = 0,3$ и $P(6X = 30 = 6 \cdot 5) = P(X = 5) = 0,7$.

2) Построим закон распределения вероятностей случайной величины $X \cdot Y$, где X, Y – независимые случайные величины.

Заметим, что под независимыми случайными величинами X и Y мы понимаем величины, для которых события $X = x_i$ и $Y = y_j$ независимы.

Пусть законы распределения вероятностей случайных величин X и Y имеют следующий вид:

X	1	2
P	0,1	0,9

,

Y	2	4
P	0,3	0,7

Рассмотрим произведения всех значений случайных величин X и Y :

$$x_1 \cdot y_1 = 1 \cdot 2 = 2, \quad x_1 \cdot y_2 = 1 \cdot 4 = 4, \quad x_2 \cdot y_1 = 2 \cdot 2 = 4, \quad x_2 \cdot y_2 = 2 \cdot 4 = 8.$$

Очевидно, что

$$P(X \cdot Y = 2 = 1 \cdot 2) = P(X = 1 \text{ и } Y = 2) = P((X = 1) \cdot (Y = 2)).$$

Но $P((X = 1) \cdot (Y = 2)) = P(X = 1) \cdot P(Y = 2)$, так как X и Y — независимы. Поэтому $P(X \cdot Y = 2) = P(X = 1) \cdot P(Y = 2) = 0,1 \cdot 0,3 = 0,03$.

$$\text{Аналогично, } P(X \cdot Y = 8 = 2 \cdot 4) = P(X = 2 \text{ и } Y = 4) = \\ = P((X = 2) \cdot (Y = 4)) = P(X = 2) \cdot P(Y = 4) = 0,9 \cdot 0,7 = 0,63.$$

И, наконец, $P(X \cdot Y = 4) = P((X \cdot Y = 1 \cdot 4) \text{ или } (X \cdot Y = 2 \cdot 2)) = \\ = P(X \cdot Y = 1 \cdot 4) + P(X \cdot Y = 2 \cdot 2)$, так как события $(X \cdot Y = 1 \cdot 4)$ и $(X \cdot Y = 2 \cdot 2)$ несовместны.

$$\text{Далее имеем, что } P(X \cdot Y = 4) = P(X \cdot Y = 1 \cdot 4) + P(X \cdot Y = 2 \cdot 2) = \\ = P(X = 1) \cdot P(Y = 4) + P(X = 2) \cdot P(Y = 2) = 0,1 \cdot 0,7 + 0,9 \cdot 0,3 = 0,34.$$

Таким образом, закон распределения вероятностей случайной величины $X \cdot Y$ имеет следующий вид:

X · Y	2	4	8
P	0,03	0,63	0,34

3) Построим закон распределения вероятностей случайной величины X^2 , если закон распределения вероятностей случайной величины X имеет следующий вид:

X	2	3
P	0,6	0,4

Рассмотрим произведения всех значений случайной величины X :

$$x_1 \cdot x_1 = 2 \cdot 2 = 4, \quad x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot 3 = 6, \quad x_2 \cdot x_2 = 3 \cdot 3 = 9.$$

$$\text{Тогда } P(X \cdot X = 4 = 2 \cdot 2) = P(X = 2 \text{ и } X = 2) = P(X = 2) = 0,6,$$

$P(X \cdot X = 6 = 2 \cdot 3) = P(X = 2 \text{ и } X = 3) = 0$, так как события $(X = 2)$ и $(X = 3)$ несовместны, и $P(X \cdot X = 9 = 3 \cdot 3) = P(X = 3 \text{ и } X = 3) =$

$$= P(X = 3) = 0,4.$$

Таким образом, закон распределения вероятностей случайной величины

$$X^2 \text{ имеет следующий вид:}$$

X²	4	9
P	0,6	0,4

4) Построим закон распределения вероятностей случайной величины X^2 , если закон распределения вероятностей случайной величины X имеет следующий вид:

X	-2	2	3
P	0,4	0,5	0,1

Рассмотрим произведение всех значений случайной величины X :

$$x_1 \cdot x_1 = (-2) \cdot (-2) = 4, \quad x_1 \cdot x_2 = (-2) \cdot 2 = -4, \quad x_1 \cdot x_3 = (-2) \cdot 3 = -6, \\ x_2 \cdot x_2 = 2 \cdot 2 = 4, \quad x_2 \cdot x_3 = 2 \cdot 3 = 6, \quad x_3 \cdot x_3 = 3 \cdot 3 = 9.$$

Тогда $P(X \cdot X = 4) = P((X \cdot X = (-2) \cdot (-2)) \text{ или } (X \cdot X = 2 \cdot 2)) =$
 $= P(X \cdot X = (-2) \cdot (-2)) + P(X \cdot X = 2 \cdot 2),$ так как события $(X \cdot X = (-2) \cdot (-2))$
и $(X \cdot X = 2 \cdot 2)$ несовместны.

$$\text{Далее имеем, что } P(X \cdot X = 4) = P(X \cdot X = (-2) \cdot (-2)) + P(X \cdot X = 2 \cdot 2) = \\ = P((X = -2) \cdot (X = -2)) + P((X = 2) \cdot (X = 2)) = \\ = P(X = -2) + P(X = 2) = 0,4 + 0,5 = 0,9.$$

Вероятности $P(X \cdot X = (-2) \cdot 2) = P((X = -2) \text{ и } (X = 2)),$ $P(X \cdot X =$
 $(-2) \cdot 3) = P((X = -2) \text{ и } (X = 3)),$ $P(X \cdot X = 2 \cdot 3) = P((X = 2) \text{ и } (X = 3))$
равны нулю, так как соответствующие пары событий несовместны.

$$P(X \cdot X = 9 = 3 \cdot 3) = P(X = 3 \text{ и } X = 3) = P(X = 3) = 0,1.$$

Таким образом, закон распределения вероятностей случайной величины

$$X^2 \text{ имеет следующий вид:}$$

X²	4	9
P	0,9	0,1

5) Построим закон распределения вероятностей случайной величины $X + Y$, где X, Y – независимые случайные величины, если законы распределения вероятностей этих случайных величин имеют следующий вид:

X	1	2
P	0,4	0,6

,

Y	3	4
P	0,2	0,8

.

Рассмотрим суммы всех значений случайных величин X и Y :

$$x_1 + y_1 = 1 + 3 = 4, \quad x_1 + y_2 = 1 + 4 = 5, \quad x_2 + y_1 = 2 + 3 = 5, \quad x_2 + y_2 = 2 + 4 = 6.$$

Очевидно, что

$$P(X + Y = 4 = 1 + 3) = P(X = 1 \text{ и } Y = 3) = P((X = 1) \cdot (Y = 3)).$$

Но $P((X = 1) \cdot (Y = 3)) = P(X = 1) \cdot P(Y = 3)$, так как X и Y — независимы. Поэтому $P(X + Y = 4) = P(X = 1) \cdot P(Y = 3) = 0,4 \cdot 0,2 = 0,08$.

$$\begin{aligned} \text{Аналогично, } P(X + Y = 6 = 2 + 4) &= P(X = 2 \text{ и } Y = 4) = \\ &= P((X = 2) \cdot (Y = 4)) = P(X = 2) \cdot P(Y = 4) = 0,6 \cdot 0,8 = 0,48. \end{aligned}$$

И, наконец, $P(X + Y = 5) = P((X + Y = 1 \cdot 4) \text{ или } (X + Y = 2 \cdot 3)) =$
 $= P(X + Y = 1 \cdot 4) + P(X + Y = 2 \cdot 3)$, так как события $(X + Y = 1 + 4)$ и $(X + Y = 2 + 3)$ несовместны.

$$\begin{aligned} \text{Далее имеем, что } P(X + Y = 5) &= P(X + Y = 1 + 4) + P(X + Y = 2 + 3) = \\ &= P(X = 1) \cdot P(Y = 4) + P(X = 2) \cdot P(Y = 3) = 0,4 \cdot 0,8 + 0,6 \cdot 0,2 = 0,44. \end{aligned}$$

Таким образом, закон распределения вероятностей случайной величины $X + Y$ имеет следующий вид:

$\mathbf{X + Y}$	4	5	6
$\mathbf{P}$	0,08	0,44	0,48

Теперь, опираясь на приведенные примеры, можно легко построить закон распределения вероятностей любой функции от наперед заданной дискретной случайной величины.

3.4. Математическое ожидание дискретной случайной величины

Характеристикой среднего значения случайной величины служит математическое ожидание.

Определение. Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности, то есть число $M(X) = x_1 \cdot p_1 + \dots + x_n \cdot p_n$, если X принимает конечное число значений, и $M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$, если X принимает бесконечное (счетное) множество значений.

Замечания

1) Покажем что $M(X)$ приблизительно равно среднему арифметическому всех значений случайной величины X .

Пусть случайная величина X значение x_1 принимает m_1 раз, значение x_2 принимает m_2 раз, и так далее, значение x_n принимает m_n раз.

Подсчитаем среднее арифметическое всех значений, получим, что

$$\bar{x} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n}{n} = x_1 \frac{m_1}{n} + x_2 \frac{m_2}{n} + \dots + x_n \frac{m_n}{n} \approx$$

$$\approx x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = M(X), \text{ где относительная частота } \frac{m_i}{n} \text{ тем ближе}$$

к вероятности p_i , чем больше n .

Как видим, $M(X)$ действительно приблизительно равно среднему арифметическому всех значений случайной величины X .

2) Физический смысл математического ожидания.

Пусть массы $p_1, p_2, \dots, p_n$ расположены на числовой прямой в точках с абсциссами $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Как известно из курса физики, абсцисса центра тяжести всей системы точек вычисляется по формуле $x_c = \frac{\sum x_i p_i}{\sum p_i}$.

Можно подобрать такую систему измерения, чтобы сумма масс была равна единице, то есть $\sum p_i = 1$.

Тогда, используя обозначение для математического ожидания, получим, что $x_c = \frac{\sum x_i p_i}{\sum p_i} = \frac{M(X)}{1} = M(X)$.

Отсюда можно сделать вывод, что математическое ожидание можно воспринимать как "центр тяжести системы точек", если абсциссы точек рассматривать в качестве значений случайной величины, а вместо масс рассматривать вероятности этих значений.

Именно поэтому математическое ожидание случайной величины часто называют центром распределения вероятностей.

Допустим, что в результате какого-то испытания наступило событие A .

Утверждение. Математическое ожидание числа появлений события A в испытании равно $P(A)$.

$\triangle$ Рассмотрим случайную величину X – число появлений события A в испытании. Очевидно, что X принимает только два значения 0 и 1, и закон

распределения вероятностей случайной величины X имеет следующий вид:

X	0	1
P	$1 - P(A)$	$P(A)$

Тогда по формуле математического ожидания

$$M(X) = 0 \cdot (1 - P(A)) + 1 \cdot P(A) = P(A). \triangle$$

Свойства математического ожидания

I. $M(C) = C$, где C – константа – случайная величина со следующим законом распределения вероятностей

X	C
P	1

$$\text{II. } M(C \cdot X) = C \cdot M(X).$$

$\triangle$ Рассмотрим законы распределения

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

C X	Cx_1	Cx_2	$\dots$	Cx_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Очевидно, что

$$M(C \cdot X) = (Cx_1)p_1 + \dots + (Cx_n)p_n = C \cdot (x_1p_1 + \dots + x_np_n) = C \cdot M(X). \triangle$$

III. $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$, если X, Y – независимые случайные величины.

$\triangle$ Рассмотрим для наглядности частный случай, когда законы распределения вероятностей случайных величин имеют вид

X	x_1	x_2
P	p_1	p_2

Y	y_1	y_2
P	q_1	q_2

X · Y	x_1y_1	x_1y_2	x_2y_1	x_2y_2
P	p_1q_1	p_1q_2	p_2q_1	p_2q_2

Тогда, получим, что

$$\begin{aligned} M(X \cdot Y) &= (x_1y_1)(p_1q_1) + (x_1y_2)(p_1q_2) + (x_2y_1)(p_2q_1) + (x_2y_2)(p_2q_2) = \\ &= x_1p_1(y_1q_1 + y_2q_2) + x_2p_2(y_1q_1 + y_2q_2) = (x_1p_1 + x_2p_2)(y_1q_1 + y_2q_2) = \\ &= M(X) \cdot M(Y). \triangle \end{aligned}$$

IV. $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$. (без доказательства).

3.5. Дисперсия дискретной случайной величины

Может так случиться, что для двух случайных величин их законы распределения вероятностей различны, а математические ожидания равны.

Например,

X	-0,01	0,01
P	0,5	0,5

,

Y	-100	100
P	0,5	0,5

,

$$M(X) = -0,01 \cdot 0,5 + 0,01 \cdot 0,5 = 0, \quad M(Y) = -100 \cdot 0,5 + 100 \cdot 0,5 = 0.$$

Поэтому одного математического ожидания недостаточно для характеристики случайной величины и неплохо было бы знать о том, как все значения случайной величины рассеяны вокруг математического ожидания (центра распределения).

С этой целью, попробуем ввести новую случайную величину $X - M(X)$ – отклонение случайной величины X от $M(X)$.

В предположении, что закон распределения вероятностей случайной величины X имеет вид

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

, и учитывая принципы, изложенные в п.3.3., получаем для отклонения $X - M(X)$ следующий закон распределения вероятностей:

X - M(X)	$x_1 - M(X)$	$x_2 - M(X)$	$\dots$	$x_n - M(X)$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Однако ожидаемое значение отклонения будет равно нулю. Действительно, $M(X - M(X)) = M(X) - M(M(X)) = M(X) - M(X) = 0$.

То есть, отклонение не подходит для оценки рассеяния значений случайной величины. Как мы видели на примере, это можно объяснить тем, что некоторые значения – положительные, другие – отрицательны. Для того, чтобы избавиться от "минусов", необходимо рассмотреть *квадратичное* отклонение.

Определение. Дисперсией (рассеянием) случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от математического ожидания $M(X)$, то есть число

$$D(X) = M((X - M(X))^2).$$

Для вычисления дисперсии более удобна формула, приведенная в следующей теореме:

Теорема. $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$.

$$\begin{aligned} \triangle D(X) &= M(X - M(X))^2 = M(X^2 - 2M(X) \cdot X + M^2(X)) = \\ &= M(X^2) - 2M(X) \cdot M(X) + M^2(X) = M(X^2) - 2M^2(X) + M^2(X) = \\ &= M(X^2) - M^2(X). \quad \nabla \end{aligned}$$

ПРИМЕР. Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины X , которая распределена по закону:

X	2	3	5
P	0,1	0,6	0,3

Очевидно, что $M(X) = 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,6 + 5 \cdot 0,3 = 3,5$.

Далее построим следующий закон распределения:

X²	4	9	25
P	0,1	0,6	0,3

Откуда имеем, что $M(X^2) = 4 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,6 + 25 \cdot 0,3 = 13,3$.

Окончательно получаем, что

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 13,3 - (3,5)^2 = 1,05.$$

Свойства дисперсии

I. $D(C) = 0$.

$$\triangle D(C) = M\{(C - M(C))^2\} = M[(C - C)^2] = M(0) = 0. \quad \nabla$$

II. $D(CX) = C^2 D(X)$.

$$\begin{aligned} \triangle D(CX) &= M\{[CX - M(CX)]^2\} = M\{[CX - CM(X)]^2\} = \\ &= M\{C^2[X - M(X)]^2\} = C^2 M\{[X - M(X)]^2\} = C^2 D(X). \quad \nabla \end{aligned}$$

III. $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$, если X, Y — независимы.

$$\begin{aligned} \triangle D(X + Y) &= M(X^2 + 2XY + Y^2) - (M(X) + M(Y))^2 = \\ &= M(X^2) + 2M(X)M(Y) + M(Y^2) - M^2(X) - 2M(X) \cdot M(Y) - M^2(Y) = \\ &= [M(X^2) - M^2(X)] + [M(Y^2) - M^2(Y)] = D(X) + D(Y). \quad \nabla \end{aligned}$$

Следствие. $D(C + X) = D(X)$.

$$\text{IV. } D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

$$\triangle D(X - Y) = D(X + (-Y)) = D(X) + D(-Y) = D(X) + (-1)^2 D(Y) = D(X) + D(Y). \quad \nabla$$

Характеристикой рассеяния возможных значений случайной величины X служит также среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Его основное преимущество в сравнении с дисперсией в том, что эта характеристика имеет одинаковые со случайной величиной X единицы измерения, в том время как дисперсия измеряется в квадратных по отношению к X единицах.

3.6. Некоторые законы распределения вероятностей дискретной случайной величины

I. Биномиальное распределение.

Рассмотрим в схеме Бернулли случайную величину X – число появлений события A в n испытаниях. Очевидно, что данная случайная величина принимает следующие значения: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, \dots, x_{n+1} = n$, а вероятности принятия этих значений p_i вычисляются по формуле Бернулли: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, k = \overline{0, n}$.

Таким образом, закон распределения этой случайной величины X имеет следующий вид:

X	0	1	2	...	n
P	q^n	$C_n^1 p q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	p^n

Такое распределение называется *биномиальным*.

Это название легко объясняется, если провести контроль для суммы вероятностей данного распределения, которая должна быть равной 1.

Действительно,

$$q^n + C_n^1 p q^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \dots + p^n = (\text{по биному Ньютона}) = (q + p)^n = 1.$$

ПРИМЕР. Монета брошена два раза. Построить закон распределения случайной величины X – число выпадений герба.

РЕШЕНИЕ. Очевидно, что данная случайная величина распределена по

биномиальному закону ($p = q = \frac{1}{2}$), величина принимает следующие значения: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, а вероятности принятия этих значений p_i вычисляются по формуле Бернулли: $P_2(2) = C_2^2 \cdot p^2 q^0 = (\frac{1}{2})^2 = 0,25$, $P_2(1) = C_2^1 \cdot p \cdot q = 2 \cdot (\frac{1}{2}) \cdot (\frac{1}{2}) = 0,5$, $P_2(0) = C_2^0 \cdot p^0 q^2 = (\frac{1}{2})^2 = 0,25$.

Таким образом, закон распределения этой случайной величины X имеет следующий вид:

X	2	1	0
P	0,25	0,5	0,25

Утверждение 1. Математическое ожидание и дисперсия биномиального распределения с параметрами n и p равны np и npq соответственно.

△ Рассмотрим случайную величину X – число появлений события A в n испытаниях. Легко проверить, что $X = X_1 + \dots + X_n$, где X_i – число появлений события A в i -ом испытании.

По свойству (IV) математического ожидания имеем, что $M(X) = M(X_1 + \dots + X_n) = M(X_1) + \dots + M(X_n)$. Согласно утверждению п.3.4 имеем, что $M(X_1) = \dots = M(X_n) = p = P(A)$. Тогда получаем, что $M(X) = np$.

Легко видеть, что для $i = \overline{1, n}$

$$D(X_i) = M(X_i^2) - M^2(X_i) = (1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q) - p^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq.$$

По свойству (III) дисперсии имеем, что

$$D(X) = D(X_1 + \dots + X_n) = D(X_1) + \dots + D(X_n). \text{ Откуда получим, что } D(X) = npq. \quad \nabla$$

Замечание. Последнее утверждение значительно облегчает вычисление математического ожидания и дисперсии биномиального распределения, поскольку, как легко видеть, вычисление $M(X)$ и $D(X)$ по их определяющих формулам весьма затруднителен, особенно для больших n .

ПРИМЕР. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия равна $p = 0,6$. Найти математическое ожидание и дисперсию общего числа попаданий, если будет произведено 10 выстрелов.

РЕШЕНИЕ. Очевидно, здесь мы имеем биномиальное распределение.

Тогда согласно утверждению $M(X) = np = 10 \cdot 0,6 = 6$, $D(X) = npq = 10 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 0,24$.

С помощью биномиального распределения описываются многие генетические эксперименты и наблюдения, например, частота больных потомков у родителей с фиксированными генотипами, частота рекомбинантных гамет у дигетерозиготного родителя и т.д.

Замечание. Если значения n велики, то непосредственное вычисление вероятностей событий, связанных с данной случайной величиной, технически затруднительно. В этих случаях можно использовать приближения биномиального распределения распределением Пуассона и нормальным распределением (приближение Муавра-Лапласа) (см. п. 2.7.2 и п. 2.7.3).

II. Распределение Пуассона.

Рассмотрим в схеме Бернулли случайную величину X – число появлений события A в n испытаниях, когда значения n большие, а значения p близки к нулю. Очевидно, что данная случайная величина принимает следующие значения: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, \dots, x_{n+1} = n$, а вероятности принятия этих значений p_i вычисляются по формуле Пуассона: $P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, где $\lambda = np, k = \overline{0, n}$.

Таким образом, закон распределения вероятностей Пуассона имеет следующий вид:

X	0	1	...	n
P	$\frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$

Проведем контроль для суммы вероятностей данного распределения, которая должна быть равной 1.

$$\frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} + \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} + \dots + \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \left(\frac{\lambda^0}{0!} + \frac{\lambda^1}{1!} + \dots + \frac{\lambda^n}{n!} \right) e^{-\lambda} \approx e^{\lambda} \cdot e^{-\lambda} = e^0 = 1.$$

Утверждение 2. Математическое ожидание и дисперсия распределения Пуассона с параметром λ равны λ .

Δ Рассмотрим распределение Пуассона с параметром λ . Тогда

$$M(X) = \sum_{k=0}^n k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \left(\sum_{k=1}^n k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \right) = e^{-\lambda} \cdot \lambda \left(\sum_{k=1}^n \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right) = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda,$$

$$M(X^2) = \sum_{k=0}^n k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \left(\sum_{k=1}^n k \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right) = e^{-\lambda} \cdot \lambda \left(\sum_{k=1}^n (k-1) \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^n \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right) = e^{-\lambda} \cdot \lambda \left(\lambda \cdot \sum_{k=2}^n \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + e^{\lambda} \right) = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} (\lambda^2 + \lambda) = \lambda^2 + \lambda,$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda. \quad \nabla$$

Пуассоновское распределение может описывать вероятность реализации k событий на фиксированном пространстве в единицу времени, если эти события равномерно распределены в пространстве и времени. Например, – число капель дождя, попавших на отрезок линейки за одну минуту.

Пуассоновское распределение используется при построении генетических карт, устанавливая соответствие между числом рекомбинантных событий и расстоянием между генами.

III. Геометрическое распределение.

Рассмотрим схему Бернулли, но с тем отличием, что испытания заканчиваются, как только наступает событие A , то есть событие A не появилось в первых $(k-1)$ испытаниях и появилось в последнем k -ом испытании. Обозначим через X – число испытаний, которые нужно провести до появления события A . Очевидно, что случайная величина X принимает следующие значения: $x_1 = 1, x_2 = 2, \dots$, а вероятности принятия этих значений p_i вычисляются по формуле $P(X = k) = q^{k-1}p, \quad k = \overline{1, \infty}$.

X	1	2	...	k	...
P	p	qp	...	$q^{k-1}p$	...

Для проверки того, что сумма вероятностей данного распределения равна единице, заметим, что числовой ряд $p + qp + \dots + q^{k-1}p + \dots$ сходящийся, поскольку является бесконечно убывающей геометрической прогрессией, его сумма равна $\frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1$.

ПРИМЕР. Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель равна $p = 0,6$. Найти вероятность того, что попадание произойдет при третьем выстреле.

РЕШЕНИЕ. Очевидно, мы имеем дело с геометрическим распределением, причем $p = 0,6, \quad q = 0,4, \quad k = 3$.

Применяя формулу $P(X = k) = q^{k-1}p$, получим, что $P(X = 3) = 0,4^2 \cdot 0,6 = 0,096$.

Утверждение 3. Математическое ожидание и дисперсия геометриче-

ского распределения с параметром p равны $\frac{1}{p}$ и $\frac{q}{p^2}$ соответственно.

△ Рассмотрим геометрическое распределение с параметром p . Тогда

$$M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} p = p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} = p \cdot \frac{d}{dq} \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k \right).$$

Поскольку ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ сходится, как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, то далее имеем, что

$$p \cdot \frac{d}{dq} \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k \right) = p \cdot \frac{d}{dq} \left(\frac{q}{1-q} \right) = p \cdot \frac{q'(1-q) - q(1-q)'}{(1-q)^2} = p \cdot \frac{1-q+q}{(1-q)^2} = p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p},$$

$$\begin{aligned} M(X^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot q^{k-1} p = p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot q^{k-1} = p \cdot \frac{d}{dq} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^k \right) = \\ &= p \cdot \frac{d}{dq} \left(q \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} \right) = p \cdot \frac{d}{dq} \left(q \cdot \frac{1}{(1-q)^2} \right) = p \cdot \frac{q'(1-q)^2 - q((1-q)^2)'}{(1-q)^4} = \\ &= p \cdot \frac{(1-q)^2 + 2q(1-q)}{(1-q)^4} = p \cdot \frac{(1-q) + 2q}{(1-q)^3} = \frac{p(1+q)}{p^3} = \frac{1+q}{p^2}, \\ D(X) &= M(X^2) - M^2(X) = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}. \quad \nabla \end{aligned}$$

3.7. Функция распределения дискретных и непрерывных случайных величин

Определение. Функцией распределения $F(x)$ случайной величины X называют вероятность того, что случайная величина X примет значение, строго меньшее значения x , то есть $F(x) = P(X < x)$.

Замечание. Случайную величину иногда называют непрерывной, когда ее функция распределения непрерывна вместе со своей производной.

Свойства функции распределения

1. Справедливо следующее неравенство: $0 \leq F(x) \leq 1$.

△ Данное неравенство автоматически следует из определения $F(x)$. ▽

2. Функция распределения $F(x)$ является неубывающей функцией.

△ Для доказательства достаточно доказать, что из условия $x_2 > x_1$ следует $F(x_2) \geq F(x_1)$.

Пусть $x_2 > x_1$. Очевидно, что имеет место равенство

$$P(X < x_2) = P(X < x_1 \text{ или } x_1 \leq X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \leq X < x_2).$$

Откуда имеем, что $P(x_1 \leq X < x_2) = P(X < x_2) - P(X < x_1)$, и справедлива следующая формула:

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) \geq 0, \quad (3.1)$$

так как вероятность любого события неотрицательна. ∇

Утверждение 1. Вероятность того, что случайная величина X примет значения, принадлежащие интервалу (a, b) , равна

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – функция распределения случайной величины X .

$\triangle$ Доказательство непосредственно следует из формулы (3.1). ∇

Утверждение 2. Вероятность того, что **непрерывная** случайная величина X примет одно определенное значение, равна 0.

$\triangle$ Положим в формуле (3.1) $x_2 = x_1 + \Delta x$. Тогда формула (3.1) примет следующий вид: $P(x_1 \leq X < x_1 + \Delta x) = F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)$.

Предположим, что $\Delta x \rightarrow 0$. Поскольку X является непрерывной случайной величиной, то $F(x)$ – также непрерывна. Поэтому получаем, что

$$P(X = x_1) = P(x_1 \leq X < x_1 + 0) = F(x_1) - F(x_1) = 0. \quad \nabla$$

Следствие. Для произвольной непрерывной случайной величины X справедливы следующие равенства:

$$P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b).$$

Замечание. Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу (a, b) , то

$$1) \text{ при } x \leq a : F(x) = 0,$$

$$2) \text{ при } x \geq b : F(x) = 1.$$

Доказательство очевидно.

ПРИМЕРЫ

1) Рассмотрим дискретную случайную величину X , имеющую следующий закон распределения вероятностей:

X	1	4	8
P	0,3	0,1	0,6

Найти функцию распределения данной случайной величины и построить ее график.

РЕШЕНИЕ. Используя определение функции распределения, имеем, что при $x \leq 1$ функция распределения равна $F(x) = P(X < x) = 0$, так как подходящих значений случайной величины X нет;

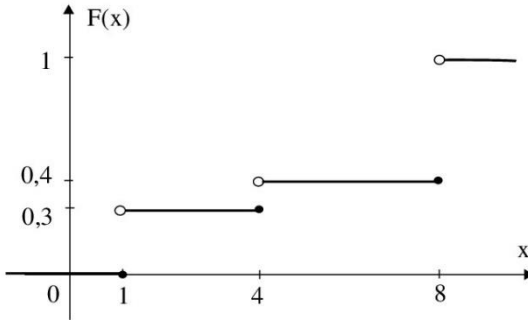
при $1 < x \leq 4$ функция распределения равна $F(x) = P(X < x) = P(X = 1) = 0,3$;

при $4 < x \leq 8$ функция распределения равна $F(x) = P(X < x) = P(X = 1 \text{ или } X = 4) = P(X = 1) + P(X = 4) = 0,3 + 0,1 = 0,4$;

при $x > 8$ функция распределения равна $F(x) = P(X < x) = P(X = 1 \text{ или } X = 4 \text{ или } X = 8) = P(X = 1) + P(X = 4) + P(X = 8) = 0,3 + 0,1 + 0,6 = 1$.

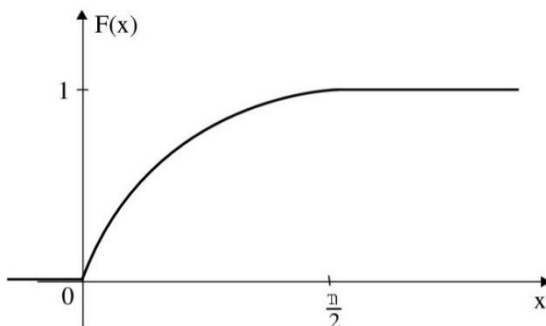
Таким образом получаем, что
$$F(x) = \begin{cases} 0; & \text{если } x \leq 1, \\ 0,3; & \text{если } 1 < x \leq 4, \\ 0,4; & \text{если } 4 < x \leq 8, \\ 1; & \text{если } x > 8, \end{cases}$$

и график функции распределения имеет следующий вид:



2) Рассмотрим непрерывную случайную величину X с функцией распределения
$$F(x) = \begin{cases} 0; & \text{если } x \leq 0, \\ \sin x; & \text{если } 0 < x \leq \pi/2, \\ 1; & \text{если } x > \pi/2. \end{cases}$$

Тогда график функции распределения имеет следующий вид:



3.8. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины

Определение. Плотностью распределения вероятностей $f(x)$ непрерывной случайной величины X называют производную от функции распределения $F(x)$, то есть $f(x) = F'(x)$.

Замечание. Для описания распределения вероятностей дискретной случайной величины плотность распределения неприменима.

Утверждение. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет все значения, принадлежащие интервалу (a, b) , равна

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx.$$

△ Доказательство непосредственно следует из утверждения 1 предыдущего параграфа 3.7 и формулы Ньютона-Лейбница. ▽

Следствие. $F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$.

Замечание. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет все значения, принадлежащие интервалу (a, b) , численно равна площади соответствующей криволинейной трапеции, что следует из геометрического смысла определенного интеграла.

ПРИМЕР. Плотность распределения вероятностей случайной величины

$$X \text{ имеет следующий вид: } f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 2x, & 0 < x \leq 1. \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Найти вероятность того, что случайная величина X примет примет все значения, принадлежащие интервалу $(0, 5 ; 1)$.

РЕШЕНИЕ. $P(0, 5 < x < 1) = \int_{0,5}^1 2x \, dx = x^2 \Big|_{0,5}^1 = 1 - 0,25 = 0,75.$

Свойства плотности распределения.

1. Плотность распределения вероятностей $f(x)$ является неотрицательной функцией, то есть $f(x) \geq 0$.

$\triangle$ Поскольку функция распределения $F(x)$ является неубывающей функцией, то ее производная $F'(x) = f(x) \geq 0$. ∇

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = 1.$

$\triangle$ Очевидно, что $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = P(-\infty < X < +\infty) = 1$, как вероятность достоверного события. ∇

3.9. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины, функции от непрерывных случайных величин

Пусть X – непрерывная случайная величина, принимающая значения на интервале (a, b) , с плотностью распределения вероятностей $f(x)$.

Определение. Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X называют число $M(X) = \int_a^b x f(x) \, dx$.

Дисперсией непрерывной случайной величины X называют число

$$D(X) = \int_a^b [x - M(X)]^2 f(x) \, dx.$$

Средним квадратическим отклонением непрерывной случайной величины X называют число $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

$$\begin{aligned} \text{Замечание. } D(X) &= \int_a^b [x - M(X)]^2 f(x) \, dx = \int_a^b [x^2 - 2xM(X) + \\ &M(X)^2] f(x) \, dx = \int_a^b x^2 f(x) \, dx - 2M(X) \int_a^b x f(x) \, dx + M(X)^2 \int_a^b f(x) \, dx = \\ &\int_a^b x^2 f(x) \, dx - 2M(X) \cdot M(X) + M(X)^2 \cdot 1 = \int_a^b x^2 f(x) \, dx - (M(X))^2. \end{aligned}$$

Формулу $D(X) = \int_a^b x^2 f(x) \, dx - (M(X))^2$ чаще всего используют для расчетов.

3.10. Виды распределений непрерывной случайной величины

При решении практических задач чаще всего встречаются со следующими распределениями непрерывных случайных величин:

- 1) равномерное распределение,
- 2) нормальное распределение,
- 3) показательное распределение.

3.10.1. Равномерное распределение

Пусть X – непрерывная случайная величина, принимающая значения на интервале (a, b) .

Определение. Распределение вероятностей случайной величины X называют равномерным на интервале (a, b) , если на этом интервале плотность распределения вероятностей $f(x)$ – постоянна ($f(x) = C$).

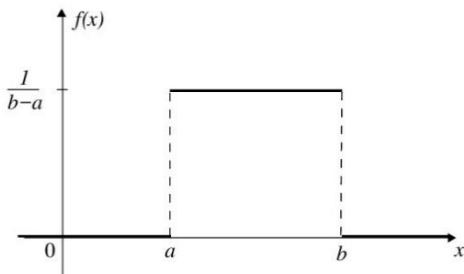
Найдем явную формулу для плотности равномерного распределения, считая, что все значения случайной величины X принадлежат интервалу (a, b) .

Очевидно, что $f(x) = 0$, если $x \leq a$ или $x > b$.

По свойству плотности имеем, что при $a < x \leq b$ имеет место равенство $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b C \, dx = 1$, следовательно, $C = \frac{1}{\int_a^b dx} = \frac{1}{b-a}$.

$$\text{Отсюда получаем, что } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq a, \\ \frac{1}{b-a}, & \text{если } a < x \leq b, \\ 0, & \text{если } x > b. \end{cases}$$

График функции плотности равномерного распределения случайной величины X имеет следующий вид:



Найдем формулу для функции равномерного распределения на интервале (a, b) .

Очевидно, что $F(x) = 0$, если $x \leq a$, и $F(x) = 1$, если $x > b$.

Из параграфа 3.8 функция распределения находится по формуле

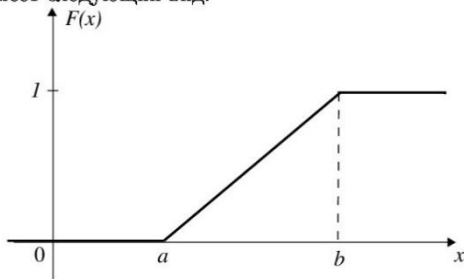
$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx.$$

Поэтому при $a < x \leq b$ имеет место следующее равенство:

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} x \Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}.$$

Отсюда получаем, что $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } a < x \leq b, \\ 1, & \text{если } x > b. \end{cases}$

График функции равномерного распределения случайной величины X имеет следующий вид:



Утверждение Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины X , распределенной равномерно в интервале (a, b) , соот-

ветственно равны $\frac{a+b}{2}$ и $\frac{(b-a)^2}{12}$.

$$\triangle M(X) = \int_a^b x f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{1}{b-a} x^2 \Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_a^b x^2 f(x) dx - (M(X))^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_a^b - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^3-a^3}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{(b-a)(b^2+ba+a^2)}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \\ &= \frac{b^2+ba+a^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{4b^2+4ba+4a^2}{12} - \frac{3a^2+6ab+3b^2}{12} = \frac{b^2-2ba+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}. \quad \nabla \end{aligned}$$

Замечание. С равномерным распределением можно столкнуться при рассмотрении шкалы измерительного прибора, если в качестве случайной величины X взять ошибку при округлении до ближайшего деления. Очевидно, что плотность в этом случае будет постоянной величиной.

3.10.2. Нормальное распределение

Нормальное распределение (также называемое распределением Гаусса) играет важнейшую роль во многих областях знаний, особенно в физике. Физическая величина подчиняется нормальному распределению, когда она подвержена влиянию огромного числа случайных помех. Ясно, что такая ситуация крайне распространена, поэтому можно сказать, что из всех распределений в природе чаще всего встречается именно нормальное распределение — отсюда и произошло его название.

Определение. Нормальным распределением называют распределение, которое описывается плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

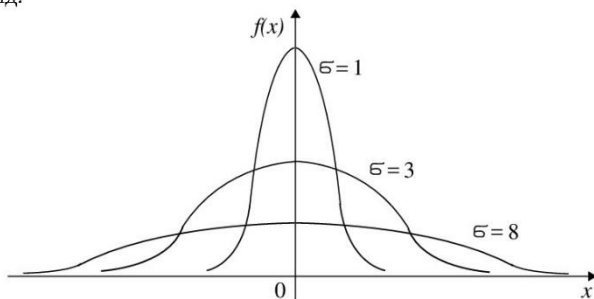
Нормальное распределение, как видно из определения, зависит от двух параметров a и σ — смещения и масштаба, то есть является с математической точки зрения не одним распределением, а целым их семейством.

Свойства параметров.

1) $a = M(X)$ — математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X .

2) $\sigma = \sigma(X) = \sqrt{D(x)}$ – среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X .

График плотности нормального распределения с $a = 0$ имеет следующий вид:



Основные свойства нормального распределения

- распределение симметрично;
- максимальная плотность распределения находится в точке a ;
- ширина в точке перегиба составляет 2σ , и в этот интервал попадает примерно 68% наблюдений;
- в интервал шириной 4σ попадает около 95% наблюдений;
- в интервал шириной 6σ попадает приблизительно 98% наблюдений.

Стандартным (нормированным) нормальным распределением называется нормальное распределение с математическим ожиданием $a = 0$ и стандартным отклонением $\sigma = 1$. Плотность стандартного распределения соответственно задается формулой

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Утверждение Вероятность того, что значения нормально распределенной случайной величины X принадлежат интервалу (α, β) , равна

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ — функция Лапласа, значения которой находятся по таблице (см. Приложение).

△ Согласно утверждению параграфа 3.8 вероятность того, что значения нормально распределенной случайной величины X принадлежат интервалу (α, β) , равна $P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$.

Сделаем замену переменной $z = \frac{x-a}{\sigma}$.

$$\text{Тогда } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} (\sigma dz) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \\ \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \quad \nabla$$

Нормальное распределение вероятностей имеет в теории вероятностей большое значение. Нормальному закону подчиняются вероятности отклонений при стрельбе по цели, ошибок при измерениях, роста человека, животного и т.п. В частности, оказывается, что закон распределения суммы достаточно большого числа независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, близок к нормальному распределению. Этот факт, называемый центральной предельной теоремой, был доказан выдающимся русским математиком А.М. Ляпуновым (1857 - 1918).

Замечание. На практике часто используется приближение биномиального распределения нормальным распределением.

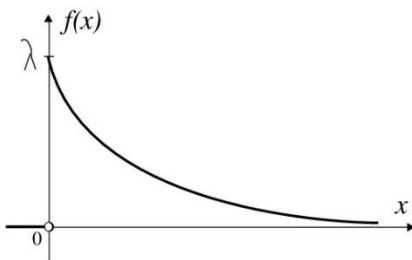
Это приближение используется в ситуациях, когда $n \rightarrow \infty$, а p фиксировано. Его можно рассматривать как частный случай центральной предельной теоремы, применение которой основано на представлении X в виде суммы n слагаемых. Приближение основано на том, что при указанных условиях распределение нормированной величины $X' = \frac{X - M(X)}{\sqrt{D(X)}} = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$ близко к стандартному нормальному.

3.10.3. Показательное распределение

Определение. Показательным (экспоненциальным) называют распределение непрерывной случайной величины X с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geq 0, \end{cases} \quad \text{где } \lambda - \text{положительная постоянная.}$$

График плотности показательного распределения имеет следующий вид:



Найдем формулу для функции показательного распределения.

Из параграфа 3.8 функция распределения находится по формуле

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx.$$

Если $x < 0$, то $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0$.

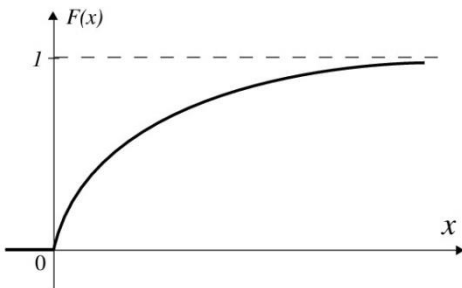
При $x \geq 0$ имеет место следующее равенство:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 \cdot dx + \lambda \int_0^x e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Таким образом, получаем, что

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

График функции показательного распределения имеет следующий вид:



Утверждение

1) Вероятность того, что значения показательной распределенной случайной величины X принадлежат интервалу (a, b) , равна $P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$;

2) математическое ожидание показательной распределенной случайной величины X равно $M(X) = \frac{1}{\lambda}$;

3) дисперсия показательной распределенной случайной величины X равна $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$, среднее квадратическое отклонение показательной распределенной случайной величины X равно $\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$.

$$\triangle 1) P(a < X < b) = F(b) - F(a) = (1 - e^{-\lambda b}) - (1 - e^{-\lambda a}) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

$$2) M(X) = \int_0^{\infty} x f(x) dx = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \text{ (интегрируем по частям).}$$

$$3) D(X) = \int_0^{\infty} x^2 f(x) dx - (M(X))^2 = \lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \text{ (интегрируем по частям). } \sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda}. \quad \nabla$$

ПРИМЕР. Время безотказной работы элемента распределено по показательному закону (очень часто!) $f(t) = 0,02 - e^{-0,02t}$. Найти вероятность того, что элемент проработает безотказно 100 часов.

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим случайную величину T – длительность времени безотказной работы элемента.

$$\text{Тогда } P(T > 100) = 1 - P(T < 100) = 1 - F(100) = 1 - (1 - e^{-0,02 \cdot 100}) = e^{-0,02 \cdot 100} = e^{-2} = 0,13534.$$

3.11. Двумерные случайные величины

В различных задачах практики встречаются случайные величины, возможные значения которых определяются не одним числом, а несколькими. Так, при исследовании некоторой популяции можно рассматривать вес и возраст особи одновременно, которые являются случайными величинами. Таким образом, здесь мы имеем дело с совокупностью двух случайных величин. Заметим, кстати, что можно рассматривать совокупности трех и более случайных величин.

Определение. Совокупность двух случайных величин (X, Y) , возникающая в одном испытании, принято называть *двумерной случайной величиной* (или системой двух случайных величин).

До сих пор, рассматривая одновременно несколько случайных величин, мы считали их независимыми.

В случае двумерной случайной величины (X, Y) обычно имеют дело с зависимыми случайными величинами X и Y .

ПРИМЕРЫ

1) Рассмотрим следующие случайные величины: X – возраст растения и Y – высота растения.

Очевидно, указанные случайные величины являются зависимыми случайными величинами. Чем старше растение, тем оно, в большинстве случаев, выше (*прямая зависимость*).

2) Рассмотрим в торговом центре следующие случайные величины: X – количество покупателей и Y – количество товаров в торговом центре.

Эти случайные величины также являются зависимыми. Чем больше покупателей, тем меньше остается товаров в торговом центре (*обратная зависимость*).

Определение. Законом распределения дискретной двумерной случайной величины (X, Y) называют следующую таблицу:

Y	X				P
	x_1	x_2	$\dots$	x_n	
y_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_2, y_1)$	$\dots$	$p(x_n, y_1)$	$p(y_1)$
y_2	$p(x_1, y_2)$	$p(x_2, y_2)$	$\dots$	$p(x_n, y_2)$	$p(y_2)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_m	$p(x_1, y_m)$	$p(x_2, y_m)$	$\dots$	$p(x_n, y_m)$	$p(y_m)$
P	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$\dots$	$p(x_n)$	1

где $p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$ – вероятность того, что двумерная величина (X, Y) примет значение (x_i, y_j) ,

$$p(x_i) = P(X = x_i) = p(x_i, y_1) + p(x_i, y_2) + \dots + p(x_i, y_m),$$

$$p(y_j) = P(Y = y_j) = p(x_1, y_j) + p(x_2, y_j) + \dots + p(x_n, y_j).$$

Замечания

1) Функцией распределения двумерной случайной величины (X, Y) является функция двух переменных $F(x, y) = P(X < x, Y < y)$, которая определена в некоторой области на плоскости xOy .

2) Плотностью совместного распределения вероятностей непрерывной двумерной случайной величины (X, Y) является функция $f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$, где $F = F(x, y)$ – функция распределения случайной величины (X, Y) .

График функции $f(x, y)$ принято называть поверхностью распределения.

В случае, когда плотность $f(x, y)$ известна, функцию распределения находят по формуле $F(x, y) = \int_{-\infty}^y \left(\int_{-\infty}^x f(x, y) dx \right) dy$.

3) Для дискретной двумерной случайной величины (X, Y) математическое ожидание случайной величины Y при условии, что $X = x_i$, находят по формуле

$$M(Y | X = x_i) = \sum_{j=1}^m y_j \cdot p(y_j | x_i) = \sum_{j=1}^m y_j \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)},$$

где $p(y_j | x_i)$ – условная вероятность того, что случайная величина Y примет значение y_j при условии, что величина X примет значение x_i .

Аналогично, математическое ожидание случайной величины X при усло-

вии, что $Y = y_j$ находят по формуле

$$M(X | Y = y_j) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p(x_i | y_j) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}.$$

4) Для непрерывной двумерной случайной величины (X, Y) математическое ожидание случайной величины Y при условии, что $X = x$, находят по формуле

$$M(Y | X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \varphi(y|x) dy = \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy} dy,$$

где $\varphi(y|x)$ – условная плотность распределения составляющей Y при заданном значении $X = x$.

Аналогично, математическое ожидание случайной величины X при условии, что $Y = y$, находят по формуле

$$M(X | Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \psi(x|y) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx} dx,$$

где $\psi(x|y)$ – условная плотность распределения составляющей X при заданном значении $Y = y$.

Функцию $f(x) = M(Y | X = x)$ принято называть *регрессией* случайной величины Y на X , а функцию $g(y) = M(X | Y = y)$ – *регрессией* случайной величины X на Y .

То есть, под *регрессией* понимают зависимость математического ожидания (например, среднего значения) случайной величины от одной или нескольких других случайных величин.

Под *регрессионным анализом* понимают поиск такой функции, которая описывает эту зависимость.

Заметим, что при регрессионной связи одному и тому же значению x величины X (в отличие от функциональной связи) могут соответствовать разные случайные значения величины Y .

Естественно возникает вопрос: как измерить зависимость двух случайных величин. Частично на этот вопрос отвечает следующее определение.

Определение. *Корреляционным моментом* (или *ковариацией* соч (X, Y))

двух случайных величин X и Y называют число

$$\mu_{XY} = M((X - M(X)) \cdot (Y - M(Y))).$$

Теорема. Если X , Y независимые случайные величины, то $\mu_{XY} = 0$.

△ Из независимости случайных величин X и Y следует, что

$$M((X - M(X)) \cdot (Y - M(Y))) = M(X - M(X)) \cdot M(Y - M(Y)), \text{ поэтому} \\ \mu_{XY} = M((X - M(X)) \cdot (Y - M(Y))) = M(X - M(X)) \cdot M(Y - M(Y)) = 0 \cdot 0 = 0. \quad \nabla$$

Обратное неверно, что подтверждает следующий пример.

ПРИМЕР. Рассмотрим случайные величины X и Y со следующими законами распределения вероятностей:

X	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

,

Y	1/3	-2/3	1/3
P	1/3	1/3	1/3

.

Очевидно, имеется связь $Y = -2/3 + X^2$, то есть X и Y – зависимые случайные величины.

Однако, учитывая, что $M(X) = -1 \cdot 1/3 + 0 \cdot 1/3 + 1 \cdot 1/3 = 0$ и

$M(Y) = 1/3 \cdot 1/3 + (-2/3) \cdot 1/3 + 1/3 \cdot 1/3 = 0$, имеем, что

$$\mu_{XY} = M((X - M(X)) \cdot (Y - M(Y))) = 0.$$

Определение. Коррелированными называют две случайные величины, если их корреляционный момент отличен от нуля. Некоррелированными – если он равен нулю.

Замечание. Из теоремы 5 и предыдущего примера видно, что коррелированные величины также и зависимы; если две величины зависимы, то они могут быть как коррелированными, так и некоррелированными.

Из независимости двух величин следует их некоррелированность, но из некоррелированности еще нельзя сделать вывод о независимости этих величин.

Однако бывают и исключения: для нормально распределенных случайных величин из некоррелированности этих величин вытекает их независимость.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

I. Учебники:

1. В.Е. Гмурман. Теория вероятностей и математическая статистика. М. Высшая школа, 1977.
2. В. К. Захаров. Теория вероятностей. М. Наука, 1983.

II. Задачники:

3. Г.И. Агапов. Задачник по теории вероятностей. М. Высшая школа, 1986.
4. В.Е. Гмурман. Руководство к решению задач по теории вероятности и математической статистике. М. Высшая школа, 1979.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица значений функции Пуассона $P_n(k) = \frac{(\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda}$

k	λ								
	0, 1	0, 2	0, 3	0, 4	0, 5	0, 6	0, 7	0, 8	0, 9
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066
1	0,0905	0,1638	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3596	0,3696
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494
4	—	—	0,0002	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111
5	—	—	—	0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020
6	—	—	—	—	—	—	0,0001	0,0002	0,0003

k	λ								
	1, 0	2, 0	3, 0	4, 0	5, 0	6, 0	7, 0	8, 0	9, 0
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,00014
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0055
3	0,0313	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337
5	0,0081	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911
7	0,0001	0,0034	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1318
8	—	0,0009	0,0081	0,0298	0,0655	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318
9	—	0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,0318
10	—	—	0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1180
11	—	—	0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970
12	—	—	0,0001	0,0006	0,0034	0,0113	0,0264	0,0481	0,0728
13	—	—	—	0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504
14	—	—	—	0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324
15	—	—	—	—	0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194
16	—	—	—	—	—	0,0003	0,0014	0,0045	0,0109
17	—	—	—	—	—	0,0001	0,0006	0,0021	0,0058
18	—	—	—	—	—	—	0,0002	0,0009	0,0029
19	—	—	—	—	—	—	0,0001	0,0004	0,0014
20	—	—	—	—	—	—	—	0,0002	0,0006
21	—	—	—	—	—	—	—	0,0001	0,0003
22	—	—	—	—	—	—	—	—	0,0001

Таблица значений интегральной функции Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,50	0,1915	1,00	0,3413	1,50	0,4332	2,00	0,4772	3,00	0,49865
0,01	0,0040	0,51	0,1950	1,01	0,3438	1,51	0,4345	2,02	0,4783	3,20	0,49931
0,02	0,0080	0,52	0,1985	1,02	0,3461	1,52	0,4357	2,04	0,4793	3,40	0,49966
0,03	0,0120	0,53	0,2019	1,03	0,3485	1,53	0,4370	2,06	0,4803	3,60	0,499841
0,04	0,0160	0,54	0,2054	1,04	0,3508	1,54	0,4382	2,08	0,4812	3,80	0,499928
0,05	0,0199	0,55	0,2088	1,05	0,3531	1,55	0,4394	2,10	0,4821	4,00	0,499968
0,06	0,0239	0,56	0,2123	1,06	0,3554	1,56	0,4406	2,12	0,4830	4,50	0,499997
0,07	0,0279	0,57	0,2157	1,07	0,3577	1,57	0,4418	2,14	0,4838	5,00	0,499997
0,08	0,0319	0,58	0,2190	1,08	0,3599	1,58	0,4429	2,16	0,4846		
0,09	0,0359	0,59	0,2224	1,09	0,3621	1,59	0,4441	2,18	0,4854		
0,10	0,0398	0,60	0,2257	1,10	0,3643	1,60	0,4452	2,20	0,4861		
0,11	0,0438	0,61	0,2291	1,11	0,3665	1,61	0,4463	2,22	0,4868		
0,12	0,0478	0,62	0,2324	1,12	0,3686	1,62	0,4474	2,24	0,4875		
0,13	0,0517	0,63	0,2357	1,13	0,3708	1,63	0,4484	2,26	0,4881		
0,14	0,0557	0,64	0,2389	1,14	0,3729	1,64	0,4495	2,28	0,4887		
0,15	0,0596	0,65	0,2422	1,15	0,3749	1,65	0,4505	2,30	0,4893		
0,16	0,0636	0,66	0,2454	1,16	0,3770	1,66	0,4515	2,32	0,4898		
0,17	0,0675	0,67	0,2486	1,17	0,3790	1,67	0,4525	2,34	0,4904		
0,18	0,0714	0,68	0,2517	1,18	0,3810	1,68	0,4535	2,36	0,4909		
0,19	0,0753	0,69	0,2549	1,19	0,3830	1,69	0,4545	2,38	0,4913		
0,20	0,0793	0,70	0,2580	1,20	0,3849	1,70	0,4554	2,40	0,4918		
0,21	0,0832	0,71	0,2611	1,21	0,3869	1,71	0,4564	2,42	0,4922		
0,22	0,0871	0,72	0,2642	1,22	0,3883	1,72	0,4573	2,44	0,4927		
0,23	0,0910	0,73	0,2673	1,23	0,3907	1,73	0,4582	2,46	0,4931		
0,24	0,0948	0,74	0,2703	1,24	0,3925	1,74	0,4591	2,48	0,4934		
0,25	0,0987	0,75	0,2734	1,25	0,3944	1,75	0,4599	2,50	0,4938		
0,26	0,1026	0,76	0,2764	1,26	0,3962	1,76	0,4608	2,52	0,4941		
0,27	0,1064	0,77	0,2794	1,27	0,3980	1,77	0,4616	2,54	0,4945		
0,28	0,1103	0,78	0,2823	1,28	0,3997	1,78	0,4625	2,56	0,4948		
0,29	0,1141	0,79	0,2852	1,29	0,4015	1,79	0,4633	2,58	0,4951		
0,30	0,1179	0,80	0,2881	1,30	0,4032	1,80	0,4641	2,60	0,4953		
0,31	0,1217	0,81	0,2910	1,31	0,4049	1,81	0,4649	2,62	0,4956		
0,32	0,1255	0,82	0,2939	1,32	0,4066	1,82	0,4656	2,64	0,4959		
0,33	0,1293	0,83	0,2967	1,33	0,4082	1,83	0,4664	2,66	0,4961		
0,34	0,1331	0,84	0,2995	1,34	0,4099	1,84	0,4671	2,68	0,4963		
0,35	0,1368	0,85	0,3023	1,35	0,4115	1,85	0,4678	2,70	0,4965		
0,36	0,1406	0,86	0,3051	1,36	0,4131	1,86	0,4686	2,72	0,4967		
0,37	0,1443	0,87	0,3078	1,37	0,4147	1,87	0,4693	2,74	0,4969		
0,38	0,1480	0,88	0,3106	1,38	0,4162	1,88	0,4699	2,76	0,4971		

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0, 39	0, 1517	0, 89	0, 3133	1, 39	0, 4177	1, 89	0, 4706	2, 78	0, 4973		
0, 40	0, 1554	0, 90	0, 3159	1, 40	0, 4192	1, 90	0, 4713	2, 80	0, 4974		
0, 41	0, 1591	0, 91	0, 3186	1, 41	0, 4207	1, 91	0, 4719	2, 82	0, 4976		
0, 42	0, 1628	0, 92	0, 3212	1, 42	0, 4222	1, 92	0, 4726	2, 84	0, 4977		
0, 43	0, 1664	0, 93	0, 3238	1, 43	0, 4236	1, 93	0, 4732	2, 86	0, 4979		
0, 44	0, 1700	0, 94	0, 3264	1, 44	0, 4251	1, 94	0, 4738	2, 88	0, 4980		
0, 45	0, 1736	0, 95	0, 3289	1, 45	0, 4265	1, 95	0, 4744	2, 90	0, 4981		
0, 46	0, 1772	0, 96	0, 3315	1, 46	0, 4279	1, 96	0, 4750	2, 92	0, 4982		
0, 47	0, 1808	0, 97	0, 3340	1, 47	0, 4292	1, 97	0, 4756	2, 94	0, 4984		
0, 48	0, 1844	0, 98	0, 3365	1, 48	0, 4306	1, 98	0, 4761	2, 96	0, 4985		
0, 49	0, 1879	0, 99	0, 3389	1, 49	0, 4319	1, 99	0, 4767	2, 98	0, 4986		

Подписано в печать 28.05.2018. Формат 60х84/16
Усл.-печ. л. 4. Тираж 100 экз. Заказ № 282
Типография Алтайского государственного университета:
656099, Барнаул, ул. Димитрова, 66