УДК 519.6

Каскадные коды

А.Н. Гамова, А.А. Ефремова
Саратовский государственный университет
им. Н.Г. Чернышевского, г. Саратов

Каскадирование. Разные способы последовательного соединения кодов породили интересные подклассы линейных блоковых кодов [1]. Рассматриваемые здесь каскадные схемы обеспечивают эффективное декодирование при меньших затратах в сравнении с обыкновенными кодами. На рисунке 1 представлена модель каскадного кодирования. Внешний код C_2 является линейным недвоичным блоковым (N,K) кодом над $GF(2^m)$. Внутренний код C_1 может быть блоковым или сверточным и, в случае блокового, это двоичный (n,k) код.

Схема кодирования каскадным кодом изображена на рисунке 1. Информационное сообщение, последовательность двоичных символов, разбивается на K k-элементных блоков. Каждый из этих блоков рассматривается как символ нового (q-ичного) алфавита, который кодируется (N,K) q-ичным кодом C_2, где N – длина внешнего кода, K – длина входной информационной последовательности кода C_2. В результате применения процедуры кодирования (N,K) кодом к k-элементным блокам добавляется $N-K$ избыточных k-элементных блоков, или символов q-ичного алфавита. Далее каждый из N k-элементных символов этого кода кодируется двоичным (n,k) кодом C_1 , что приводит к еще большей избыточности по сравнению с первым этапом, после чего сообщение направляется в канал. Перемежитель, устанавливаемый между внешним и внутренним кодером, может выполнять разные функции: преобразовывать блоки размера k' в векторы, размерность которых соответствует размерности внутреннего кода, или, в случае внутреннего сверточного кода, разбивать пакеты ошибок. Перемежитель добавляет лишь несколько простых операций и несущественно увеличивает сложность каскадного кода.

На приемном конце последовательно работают декодеры внутреннего кода D_1, а затем внешнего кода D_2. Важным преимуществом каскадных кодов является то, что декодирование производится посредством отдельных компонентных кодов, что существенно снижает сложность по сравнению с декодированием полного кода.

Рисунок 1 – Процедура кодирования каскадным кодом

На рисунке 2 [2] приведены экспериментальные исследования вероятности ошибки декодирования для обыкновенного кода C_0 того же класса, что и D_1, с параметрами (n_0,k_0) при кодовой скорости $R_0 = k_0/n_0$, вероятность ошибки декодирования которого определяется кривой 1 на рисунке 2.

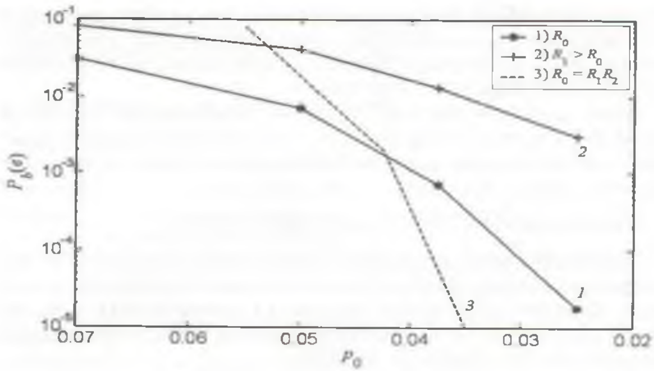

Рисунок 2 – Иллюстрация преимуществ каскадных схем перед обычными алгоритмами

Каскадный код имеет компонентные коды: внутренний код C_1 с параметрами (n_1,k_1), алгоритмом декодирования D_1, кодовой скоростью $R_1 > R_0$, и внешний код C_2 с параметрами (n_2,k_2), кодовой скоростью R_2.Одношаговая процедура кодирования заменяется двумя независимыми последовательными процедурами, причем, суммарная кодовая скорость остается неизменной $R_0 = R_1 R_2$.

Код C_1 может быть выбран существенно короче C_0 с процедурой декодирования D_1=D_0. Результирующая вероятность ошибки декодирования (на бит) P_b(е) в силу условия $R_1 > R_0$ и выбора более простого кода C_1 будет соответствовать кривой 2 на рисунке 2. Далее, применяя к символам кода C_1 процедуру декодирования кода C_2 со сложностью T_2, получаем результирующую вероятность ошибки декодирования, представленную кривой 3 на рисунке 2.

При сложности $T_1 + T_2 < T_0$ и малом шуме кривая 3 лежит ниже кривой 1. Таким образом, каскадные схемы обеспечивают лучшее декодирование при меньших затратах по сравнению с обыкновенным кодом. Как видно на рисунке 2, при большом шуме существует узкая полоса входных значений P_0, где код C_0 может быть эффективнее каскадного, но это имеет место при больших вероятностях ошибки декодирования P_b(е) обеих кодовых систем, где применение кодирования вообще неэффективно.

Как правило, в качестве внешнего недвоичного кода выбирается код Рида-Соломона (РС). До недавнего времени этот выбор был единственным, хотя его характеристика далека от шенноновской границы хороших корректирующих возможностей R=C. Главная проблема в том, что коды РС, будучи алгебраическоми, имеют длину, не более основания q. И даже для больших значений q=256 при любой избыточности и всех допустимых длинах кода n его эффективность далека от границы R=C. Использование эффективных декодеров, например алгоритма Витерби, приводит к сложности вычислений, которая будет экспоненциально расти по мере увеличения n. Таким образом, очевидна необходимость применения недвоичных многопороговых декодеров (МПД).

Метод многопорогового декодирования [2]. Итеративные мажоритарные декодеры привлекли внимание тем, что выполняли требования эффективности к алгоритму декодера. Хотя эти процедуры не являлись оптимальными, но были существенно проще оптимальных и мало отличались от них по эффективности, но накапливали пакеты ошибок на выходе декодеров. Проблема была решена в декодерах многопорогового кодирования МПД.

Теорема [2]. Если на j-ом шаге декодирования МПД изменяет информационный символ i_j, то:

1) МПД находит новое кодовое слово A_2, более близкое к принятому Q, чем то кодовое слово A_1, которому соответствовало значение i_j перед j-ым шагом декодирования:

$$|B_1| = |A_1 + Q| > |A_2 + Q| = |B_2|;$$

2) после окончания j-го шага возможно декодирование любого очередного символа i_k, $k \neq j$, так что при его изменении будет осуществлено дальнейшее приближение к принятому сообщению.

Из теоремы следует, что МПД при каждом изменении декодируемых символов приближается к принятому вектору Q, отыскивая все более правдоподобные векторы-гипотезы A_i. При этом просматривается не экспоненциальное количество кодовых слов, а лишь пары, отличающиеся между собой только в одном информационном символе, причем одно из сравниваемых слов находится в декодере. В случае, если второе кодовое слово окажется ближе к вектору Q, чем то, информационные символы которого находятся в соответствующих регистрах памяти МПД, сравнения производятся уже с новым промежуточным вектором A_i и т.д. Тем самым осуществляется движение МПД к решению оптимального декодера (ОД).

Следствие [2]**.** МПД не изменит решения ОД.

Главные особенности новых декодеров:

– малое число операций на пороговом элементе такого декодера требовало небольшого объема вычислений;

– способность самого мажоритарного алгоритма исправлять во многих случаях даже больше ошибок, чем это гарантируется кодовым расстоянием;

– рост правдоподобия решений в течение всего процесса исправления ошибок, а при достижении МПД декодером самого правдоподобного решения оно оказывается оптимальным;

– сложность МПД в отличие, например, от декодера Витерби остается линейно растущей функцией независимо от длины кодового вектора.

Разработаны также недвоичные декодеры многопорогового типа [2], обладающие теми же достоинствами, что двоичные декодеры. Так что проблема замены РС кодов в каскадных кодах решена.

Библиографический список

1. Волкова Т.В., Гамова А.Н. Помехоустойчивое кодирование как метод обеспечения высокого уровня надежности передачи дискрет ной информации // МАК–2016 : сб. трудов всероссийской конференции по математике, Барнаул, 1-5 июля 2016 г. – Барнаул: Изд-во Алт.ун-та, 2016. – С. 93–94.

2. Золотарев В.В. Теория и алгоритмы многопорогового декодирования. – М.: Радио и связь, 2006. – 266 с.