$$\int_0^1 (|y^{i+1}|^2 + |y_x^{i+1}|^2)dx \le c_5 \int_0^1 |\omega^i|^2\, dx. \tag{11}$$

Из (9) следует $\max_x |\omega^{i+1}| \le \int_0^t \max_x |y^{i+1}|\, d\tau$. Т.о. $\max_x |y^{i+1}|^2 \le 2c_5 t \int_0^1 |\omega^i|^2\, dx$, а значит $z^{i+1} \le 2c_5 t \int_0^t z^i d\tau$. Откуда следует, что $z^i \to 0, \omega^i \to 0$ [5, с. 27]. Т.о. теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ «Расчет физических характеристик почвогрунтов в процессе внутренней эрозии и прогноз их разрушения» №17-41-220314, «Гидроупругие и термодинамические эффекты при взаимодействии пороупругого снежно-ледового покрова с конструкциями» №16-08-00291.

Библиографический список

1. Папин А.А., Токарева М.А. О разрешимости в целом начально-краевой задачи для системы уравнений, описывающей движение магмы // Известия Алтайского государственного университета. – 2017. – №1(93). – С. 115–119.
2. Tokareva M.A. Solvability of initial boundary value problem for the equations of filtration in poroelastic media // Journal of Physics: Conference Series. – 2016. – Т. 722, №1. – С. 012–037.
3. Папин А.А., Токарева М.А. Модельная задача о движении сжимаемой жидкости в вязкоупругои горной породе // Известия Алтайского государственного университета. – 2010. – №1-1. – С. 35–37.
4. Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. – М.: Наука, 1981. – 383 с.
5. Папин А.А. Краевые задачи двухфазной фильтрации. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2009. – 220 с.

УДК 532.546 + 544.344.015.4

Математическое моделирование процесса сублимации снега

А.А. Папин, Е.С. Юст
АлтГУ, г. Барнаул

Постановка задачи

В работе рассматривается математическая модель движения воды и воздуха в снеге с учетом сублимации. Снег представляет собой пористую среду, твердый каркас которой составляют неподвижные частицы льда. Для моделирования процесса сублимации льда в снеге используется следующая система уравнений:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + div(\rho_i \vec{u}_i) = \sum_{j=1}^{4} I_{ij}, \quad i = 1,2,3,4,$$
$$I_{ij} = -I_{ji}, \quad \sum_{j=1}^{4} I_{ij} = 0 \tag{1}$$

$$\vec{v}_i = -K_0 \frac{k_{0i}}{\mu_i}(\nabla p_i + \rho_i^0 \vec{g}), \quad i = 1,2,$$
$$p_2 - p_1 = p_c(s_1, \theta), \quad s_1 + s_2 + s_4 = 1, \tag{2}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{4} \rho_i^0 c_i \alpha_i\right)\frac{\partial \theta}{\partial t} + \left(\sum_{i=1}^{2} \rho_i^0 c_i \vec{v}_i\right)\nabla\theta =$$
$$= div(\lambda_c \nabla\theta) - \mu \frac{\partial \rho_3^0 \phi}{\partial t}. \tag{3}$$

Здесь t – время; ϕ – пористость; $\vec{u}_i$ – истинные скорости фаз; $\rho_i^0, \vec{v}_i = \phi s_i \vec{u}_i$ – соответственно истинные плотности воды, воздуха, льда, пара и скорости фильтрации воды и воздуха, s_1, s_2, s_4 – насыщенности воды, воздуха и пара; ρ_i – приведенная плотность, α_i – концентрация, $\rho_i = \alpha_i \rho_i^0$ $(\alpha_i = \phi s_i,\ i = 1,2,4,\ \alpha_3 = 1 - \phi)$; I_{ij} – интенсивность перехода массы из i-ой в j-ю составляющую в единице объема и в единицу времени; K_0 – тензор фильтрации; k_{0i} – относительные фазовые проницаемости ($k_{0i} = k_{0i}(s_i) \geq 0$, $k_{0i}|_{s_i=0} = 0$); μ_i – коэффициенты динамической вязкости; p_i – давления фаз; p_c – капиллярное давление; $\vec{g}$ – вектор ускорения силы тяжести; θ – температура среды ($\theta_i = \theta$, $i = 1,2,3,4$); $c_i = const > 0$ – теплоемкость i-й фазы при постоянном давлении; $\mu = const > 0$ – удельная теплота сублимации льда; λ_c – коэффициент теплопроводности снега.

Система замыкается гипотезами:

$$I_{34} = I_{34}(\theta), \qquad I_{12} = I_{32} = I_{31} = I_{24} = I_{14} = 0, \quad \vec{u}_3 = \vec{u}_4 = 0,$$
$$\phi = \phi(\theta), \quad s_4 = s_4(\theta).$$

Похожие по тематике задачи рассмотрены в [1–3]. В [4] получено автомодельное решение данной задачи и доказан физический принцип максимума для насыщенности водной фазы. Математические модели процесса сублимации изложены в [5–7].

Определение. Слабым решением задачи (1)–(3) в области $R^- = (-\infty, 0)$ называются функции $\theta(\xi)$, $s_1(\xi)$, $v_i(\xi)$, $p_i(\xi)$ и параметр c, если:

1) $\theta(\xi)$ имеет непрерывную производную, удовлетворяет уравнению $\lambda_c \frac{d\theta}{d\xi} = f_1(\theta)$, и условиям $\theta(0) = \theta^+$, $\theta|_{\xi\to-\infty} = \theta^-$, $\frac{\partial\theta}{\partial\xi}|_{\xi\to-\infty} = 0$;

2) $s(\xi)$ имеет непрерывную производную с весом $a(s)$, удовлетворяет уравнению $a_0(s_1)\frac{ds_1}{d\xi} = f_2(s_1, \theta)$ и условиям $s_1(0) = s_1^+$, $s_1|_{\xi\to-\infty} = 0$;

3) $v_i(\xi)$ удовлетворяют равенствам $v_1 = c\phi s_1 + c\frac{\rho_3^0}{\rho_1^0}(\phi^- - \phi) + c\frac{\rho_4^0}{\rho_1^0}\phi s_4, v_2 = c\phi s_2 - c\phi^-$ и условиям $v_i(0) = v_i^+$, $v_i|_{\xi\to-\infty} = 0$;

4) $p_i(\xi)$ удовлетворяют равенствам

$$p(\xi) = p^+ - p_0(\theta^+)b(s_1^+) - \int_\xi^0 f_3\left(s_1(x), \theta(x)\right)dx,\ \ p_2(\xi) = p(\xi) + p_0(\theta)b(s_1),$$

$$p_1(\xi) = p_2(\xi) - p_c\left(s_1(\xi), \theta(\xi)\right)$$

и условию $p_2(0) = p_2^+$.

Теорема. Пусть положительные числа a_c, b_c, μ, ϕ^-, K_0, θ^-, θ_1, θ^+, ρ_i^0, c_i, α_4^*, $(i = 1,2,3,4)$, $s_1^+ \in (0,1]$ и непрерывные по $s_1 \in [0,1]$ и $\theta \in [\theta^-, \theta^+]$ функции $\phi(\theta)$, $s_4(\theta)$, $k_{0i} = \overline{k}_{0i}(s_1, \theta)s_i^{n_i}$, $n_i > 1$, $\mu_i(s_1, \theta)$, $(i = 1,2)$, $p_c(s_1, \theta) = p_0(\theta)\gamma(s_1)$, $\lambda_c = a_c + b_c\rho_c^2$, $\rho_c = \rho_1^0 s_1\phi + \rho_2^0 s_2\phi + \rho_3^0(1 - \phi) + \rho_4^0 s_4\phi$ удовлетворяют условиям:

1. $\rho_2^0 < \rho_4^0 < \rho_3^0 < \rho_1^0$, $c_4 < c_3 < c_1 < c_2$, $\alpha_4^* < \frac{\rho_3^0(c_1-c_3)}{\rho_4^0(c_1-c_4)}(1 - \phi^-)$;

2. $s_4(\theta) < (\frac{\mu_1}{\mu_2})^{1/n_2}$;

3. $0 < (a = -k_{01}k_{02}\frac{d\gamma}{ds_1}, k_{01}, k_{02})$ при $s_1 \in (0,1)$,

$$a|_{s_1=0,1} = k_{01}|_{s_1=0} = k_{02}|_{s_1=1} = 0, \quad \frac{1}{s_1}k_{01}k_{02}\gamma|_{s_1=0} = 0,$$

$\frac{d\gamma}{ds_1} < 0$, $a_0 \geq \nu_0(s_1(1 - s_1))^\kappa$, $\kappa > 1$, $\frac{a_0(s_1)}{s_1}|_{s_1=0} = 0$,

$(||\frac{d\gamma}{ds_1}||_{C[0,1]},\ \ ||\frac{dp_0}{d\theta}||_{C[\theta^-,\theta^+]}) \leq \nu_0$,

$0 < \nu_0^{-1} < < (\mu_i(s_1, \theta), \overline{k}_{0i}(s_1, \theta), p_0(\theta), \left|\frac{d\gamma(s_1)}{ds_1}\right|) \leq \nu_0$.

Тогда существует по крайней мере одно слабое решение задачи (1)–(3), обладающее свойствами:

$$0 \le s_1(\xi) \le 1, \quad \theta^- \le \theta(\xi) \le \theta^+,$$

$$c = \frac{(1+\lambda)v_2^+}{(1-\phi^-)(1-\rho_3^0/\rho_1^0)} < 0.$$

Кроме того, существует точка $\xi_* \in (-\infty, \xi_1]$ такая, что $s_1(\xi) = 0$ для всех $\xi \le \xi_*$. Теорема доказывается аналогично [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ «Расчет физических характеристик почвогрунтов в процессе внутренней эрозии и прогноз их разрушения» №17-41-220314; «Гидроупругие и термодинамические эффекты при взаимодействиипороупругого снежно-ледового покрова с конструкциями» №16-08-00291.

Библиографический список

1. Папин А.А. Разрешимость модельной задачи тепломассопереноса в тающем снеге // Прикладная механика и техническая физика. – 2008. – Т. 49, №4 (290). – С. 13–24.

2. Папин А.А., Токарева М.А. Динамика тающего деформированного снежно-ледового покрова // Сибирский журнал чистой и прикладной математики. – 2012. – Т. 12, №4. – С. 107–113.

3. Папин А.А. Краевые задачи двухфазной фильтрации. – Барнаул, 2009. – 220 с.

4. Юст Е.С. Модельная задача тепломассопереноса в тающем снеге с учетом сублимации // Материалы Межд. школы-семинара «Ломоносовские чтения на Алтае – 2015». Барнаул, 20-25 октября. – 2015. – С. 780–789.

5. Fowler A.C., and Yang X. Pressure solution and viscous compaction in sedimentary basins // J. Geophys. Res. 104, 12,989-12,997, 1999.

6. Groot C. D., Zwaaftink H. Lowe, R. Mott, M. Bavay, and M. Lehnin. Drifting snow sublimation : Ahigh-resolution 3-D model with temperature and moisture feedbacks, 2011.

7. Xioqing Dai, Ning Huang Numerical simulation of drifting snow sublimation in the saltation layer, 2014.