УДК 517.9

Управление решениями симметрической системы

С.С. Кузиков
АлтГУ, г. Барнаул

В работе предлагается метод решения задачи управления для симметрической системы двух дифференциальных уравнений первого порядка смешанного типа. В качестве управления выбираются граничные условия задачи, функционал представляет собой норму отклонения решения системы от некоторой заданной вектор-функции. Исследование краевых задач для симметрических систем имеет самостоятельный интерес. Для некоторых классов краевых задач, как правило, с однородными или периодическими краевыми условиями, получен ряд глубоких результатов [1–9] и др. Однако для задач управления характерны неоднородные граничные условия, т. к., как правило, недостаточная гладкость функций, являющихся управлениями, или нецелесообразность зачастую не позволяет свести их к однородным. В связи с этим следует отметить работы С.М. Шугрина [10,11], в которых исследована корректность некоторых задач для симметрических систем с неоднородными краевыми условиями.

В данной работе рассматриваемая система является линейным аналогом квазилинейной системы уравнений, описывающей плоское установившееся безвихревое течение невязкого газа [12]. Для прямой и сопряженной задач устанавливаются априорные оценки, которые позволяют доказать существование и единственность решений, что, в свою очередь, дает возможность установить дифференцируемость функционала и найти явный вид его градиента.

В области $\Omega = (-1,1) \times (0,1)$ пространства R^2 рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$Lu = Au_x + Bu_y + Du = f, \tag{1}$$

где $u = (u_1(x,y), u_2(x,y)), f = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ – вещественные вектор-функции; *A, B, D* – заданные матрицы. Предполагаются выполненными следующие условия.

$$A = \begin{pmatrix} k(x) & a(x,y) \\ a(x,y) & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & b(x,y) \\ b(x,y) & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} d_{11}(x,y) & d_{12}(x,y) \\ d_{21}(x,y) & d_{22}(x,y) \end{pmatrix},$$

А. $A, B \in C^1(\Omega), D \in C(\Omega)$.

Б. $k_x \geq \delta = const > 0, k(0) = 0, |b(x,y)| \geq \delta$.

В. $2D \pm (A_x + B_y) \geq \delta E$, E – единичная матрица.

Г. $A|_{x=1} \geq \delta E$.

Здесь $C(\Omega), C^1(\Omega)$ – пространства непрерывных и непрерывно дифференцируемых в $\overline{\Omega}$ функций.

Замечание 1. Отметим, что из условия (А) следует равномерная ограниченность евклидовых норм матриц A, B, D, а так же норм производных матриц A и B с некоторой постоянной $M > 0$. Условие (Б) дает неравенство $|k(-1)| \geq \delta$. Тип системы (1) определяется знаком коэффициента $k(x)$. При $x < 0$ система имеет эллиптический тип, при $x > 0$ – гиперболический.

Будем рассматривать граничные условия вида

$$u_2(x,0) = u_2(-1,y) = 0, u_2(x,1) = \varphi(x), -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \quad (2)$$

где $\varphi(x)$ играет роль управления.

Далее рассмотрим задачу, которую назовем формально сопряженной к задаче (1, 2)

$$L^*v = -(Av)_x - (Bv)_y + D^*v = g, \quad (3)$$

где $v = (v_1, v_2), g = (g_1, g_2)$, а D^* – транспонированная матрица D.

Граничные условия имеют вид:

$$v_2(x,0) = v_2(x,1) = (kv_1 + av_2)|_{x=-1} = 0 \quad (4)$$

$$v|_{x=1} = r(y) = (r_1(y), r_2(y)), -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1.$$

Далее, по стандартной схеме, определяются слабые и сильные расширения операторов исходной и сопряженной задач при выбранных граничных условиях. Априорные оценки полученные для этих задач гарантируют существования хотя бы одного слабого решения из H [7] каждой из задач. Далее показано, что полученные решения краевых задач определяются однозначно, т.е. имеет место

Теорема. При выполнении условий (А) – (Г), для любых $f, g \in H_\Omega$, $\varphi \in L_2(-1,1)$, $r_1, r_2 \in L_2(0,1)$ задачи (1), (2) и (3), (4) имеют единственное решение из H. Теперь рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J(\varphi) = \int_{-1}^{1} \left(\left(u_1(x,0) - p(x) \right)^2 \right) dx, \quad (5)$$

где $u = (u_1, u_2)$ – решение задачи (1), (2), в которой $\varphi(x)$ является управлением, а $p = p(x) \in L_2(0,1)$ – заданная функция. Доказанная разрешимость задачи (1), (2), свойства решения, позволяют утверждать, что если последовательность $\{\varphi_k\}$ сходится слабо в $L_2(-1,1)$ к φ, то $J(\varphi_k) \to J(\varphi)$, т.е. функция (5) слабо непрерывна на $L_2(-1,1)$. Из [13] следует, что в задаче (1), (2), (5) множество U_* оптимальных управлений не пусто. Показано, что функция (5) дифференцируема в $L_2(-1,1)$ и получен явный вид градиента $J(\varphi)$:

$$J'(\varphi) = b(x,1)v_1(x,1). \quad (6)$$

Для численного решения краевых задач (1)–(4) можно использовать разностные схемы приведенные и исследованные в [12, 14, 15]. Для построения минимизирующей последовательности $\{\varphi_k\}$ можно применить один из градиентных методов [13].

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ «Расчет физических характеристик почвогрунтов в процессе внутренней эрозии и прогноз их разрушения» №17-41-220314.

Библиографический список

1. Friedrichs K. O. The identity of weak and strong extensions of differential operators // Trans. Amer. Math. – 1944. – S. 55. – P. 132–151.

2. Friedrichs K. O. Symmetric hyperbolic linear differential equations // Comm. Pure Appl. Math. – 1954. – V. 11. – P. 345–392.

3. Friedrichs K.O. Symmetrical positive linear differential equations // Comm. Pure Appl. Math. – 1958. – V. 11. – P. 333–418.

4. Агранович М.С. О положительных граничных задачах для некоторых систем первого порядка // Тр. Моск. матем. Общества. – 1967. – Т. 16. – С. 2–24.

5. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наукова думка, 1965.

6. Дезин А.А. Теоремы существования и единственности решений граничных задач для уравнений с частными производными в функциональных пространствах // УМН. – 1959. – Вып. 3, т. 14. – С. 21–73.

7. Дезин А.А. Граничные задачи для некоторых симметричных линейных систем первого порядка // Мат. сборник. – 1959. – Т. 49, №4. – С. 459–484.

8. Мозер Ю. Быстросходящийся метод итераций и нелинейные дифференциальные уравнения // УМН. – 1968. – Вып. 4, т. 23. – С. 179–238.

9. Peyser G. Symmetric positive system in corner domains // Journal of Differential Equations. – 1975. – V. 18. – P. 135–157.

10. Шугрин С.М. Симметричные дифференциальные уравнения // Сиб. мат. журн. – 1970. – Т. 11, №3. – С. 677–696.

10. Шугрин С.М. Сильное и слабое расширение дифференциальных операторов // ДУ. – 1975. – Т. 11, № 11. – С. 2067–2082.

12. Кузиков С.С. Об одном методе расчета околозвуковых течений в плоских соплах // Динамика сплошной среды: сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. – 1976. – Вып. 25. – С. 143–153.

13. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1981.

14. Воеводин А.Ф., Шугрин С.М. Методы решения одномерных эволюционных систем. – Новосибирск: Наука, 1993.

15. Кузиков С.С. К методам решения обратных задач трансзвуковой газовой динамики // Известия АлтГУ. – 2010. – №1(65).

УДК 517.95, 532.51

Точные решения нестационарных уравнений вязкоупругой жидкости Максвелла

***С.В. Мелешко*[1], *Н.П. Мошкин*[2,3], *В.В. Пухначев*[2,3]**
[1]*ТУ Суранари, г. Накхон-Ратчасима, Таиланд;*
[2]*ИГ им. М.А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск;*
[3]*НГУ, г. Новосибирск*

В докладе представлены точные решения нестационарных двумерных уравнений несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла. Среда характеризуется постоянными временем релаксации τ, плотностью ρ и вязкостью μ. В качестве объективной производной в реологическом соотношении выбирается верхняя конвективная производная [1]. Уравнения записаны в лагранжевых переменных и найдено точное решения задачи около критической точки встречных потоков.

Система уравнений движения состоит из шести квазилинейных дифференциальных уравнений 1-го порядка, имеющей как вещественные, так и комплексные характеристики [2]. Неизвестными функциями являются горизонтальная u и вертикальная v компоненты скорости, давление p и элементы тензора вязкоупругих напряжений $S_{xx} = A$, $S_{xy} = S_{yx} = B$, $S_{yy} = C$.

$$\rho\left(u_t + uu_x + uu_y\right) = -p_x + A_x + B_y,$$

$$\rho\left(v_t + uv_x + vv_y\right) = -p_y + B_x + C_y,\ u_x + v_y = 0,$$

$$A_t + uA_x + vA_y - 2\left(Au_x + Bu_y\right) + \tau^{-1}A = 2\mu\tau^{-1}u_x, \tag{1}$$

$$B_t + uB_x + vB_y - Av_x - Cu_y + \tau^{-1}B = 2\mu\tau^{-1}\left(u_y + v_x\right),$$

$$C_t + uC_x + vC_y - 2\left(Bv_x + Cv_y\right) + \tau^{-1}C = 2\mu\tau^{-1}v_y.$$

На основе теоретико-группового анализа в работе [3] выписаны гиперболические подмодели несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла (1). С их помощью изучена задача о слоистом течении между