4. Воеводин А.Ф., Гранкина Т.Б. Численное моделирование роста ледяного покрова в водоеме // Сиб. журн. индустр. математики. – 2006. – Т. 9, №1 (25).

УДК 517.958 + 631.459.26

Обоснование одной задачи внутренней эрозии грунта

С.В. Алексеева, А.А. Папин
АлтГУ, г. Барнаул

Постановка задачи

В работе рассматривается математическая модель изотермической внутренней эрозии без учета деформации пористой среды. Фильтрация подземных вод происходит в водоносном горизонте. При достижении определенной величины скорости фильтрации происходит вынос частиц грунта из области течения и образование подземных полостей. В результате увеличения и достижения критических размеров этих полостей происходит обрушение свода пород.

В работе изучается следующая система уравнений составного типа:

$$\frac{\partial s\phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\big(K_0(\phi)a(s)\nabla s - b(s)v(t) + F(s,\phi)\big), \tag{1}$$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} = -I(s,\phi), \tag{2}$$

решаемая в области $(x,t) \in Q_T = Q \times (0,T), Q = (0,1)$,
при краевых и начальных условиях

$$s(0,t) = s_0(t), \quad s(1,t) = s_1(t),$$

$$s(x,0) = s^0(x), \quad \phi(x,0) = \phi^0(x). \tag{3}$$

Данная начально-краевая задача описывает одномерное движение двухфазной смеси в неподвижной пористой среде, состоящей из твердых частиц и жидкости [1]. Здесь ϕ – пористость, s – насыщенность воды, I – интенсивность перехода массы из твердого скелета; кроме того $K_0(\phi)$, $a(s)$, $b(s)$, $F(s,\phi)$ – заданные функции. Задача записана в эйлеровых координатах x,t. Искомыми являются величины s и ϕ. Обзор математических моделей процесса суффозии дан в работе [1]. Математическое обоснование, как правило, отсутствует, за исключением рассмотрения частных решений [3–5]. Вывод уравнений (1), (2) дан в работе [6]. Система уравнений близка по структуре уравнениям двухфазной фильтрации несмешивающихся жидкостей в случае известной пористости [7–9]. Особенностью данной задачи является необходимость обоснования физического принципа максимума для пористости ϕ и насыщенности s вида $0 \le \phi \le 1$,

$0 \le s \le 1$. Кроме того коэффициент $a(s)$ в общем случае обладает свойствами $a(0) = a(1) = 0, a(s) > 0$ при $s \in (0,1)$, то есть уравнение (1) является вырождающимся на решении, а переменная неизвестная пористость существенно усложняет структуру системы (1), (2).

Поэтому на первом этапе исследования задачи (1)–к(3) рассматривается случай невырождающегося уравнения (1) ($a(s) > 0$ при $s \in [0,1]$, $0 < \phi \le 1$). Целью работы является доказательство разрешимости задачи (1) – (3).

Для интенсивности фазовых переходов принимается следующая модельная зависимость [1]:

$$I = \delta(s)R(\phi)\max\{|v(t)| - v_k, 0\},$$

$$\delta(s) = \begin{cases} 0, & s \ge 1; \\ 1 - s, & 0 < s < 1; \\ 1, & s \le 0. \end{cases} \quad R(\phi) = \begin{cases} 0, & \phi \ge 1; \\ \phi(1 - \phi), & 0 < \phi < 1; \\ 0, & \phi \le 0. \end{cases}$$

где $v(t)$ – суммарная скорость фильтрации (заданная функция), v_k – предельное значение скорости фильтрации при превышении которой «запускается» процесс суффозии.

Определение 1. Решением задачи (1)–(3) в цилиндре Q_T будем называть пару функций $\phi(x,t) \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)$, $s(x,t) \in C^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(Q_T)$, удовлетворяющую уравнениям (1), (2) и условиям (3) в обычном смысле. Причем $0 \le s \le 1$, $0 < \phi \le 1$.

В дальнейшем, будем придерживаться обозначений принятых в [10].

Теорема. Пусть данные задачи (1)–(3) подчиняются условиям:

1. Функции $K_0(\phi), a(s), b(s), F(s,\phi)$ и их производные до второго порядка непрерывны для $s \in [0,1]$, $\phi \in [0,1]$ и удовлетворяют условиям

$$0 < m \le K_0(\phi), a(s) \le M < \infty,$$

$$F(s,\phi) = 0 \text{ при } s < 0, s > 1.$$

2. Функции $v(t)$, $s_0(t)$, $s_1(t)$, $s^0(x)$, $\phi^0(x)$ удовлетворяют следующим условиям гладкости

$$v(t),\ \ s_0(t),\ \ s_1(t) \in C^{2+\alpha}[0,T]; \quad s^0(x), \phi^0(x) \in C^{2+\alpha}(\overline{Q})$$

и условиям согласования

$$s_0(0) = s^0(0), \quad s_1(0) = s^0(1),$$

а также удовлетворяют неравенствам

$$0 \le s^0(x) \le 1, \quad 0 < m_0 \le \phi^0 \le M_0 < 1, \quad |v_k(t)| < \infty,$$
$$0 \le s_0(t) \le 1, \quad 0 \le s_1(t) \le 1$$

где m_0, m, M, v_k, M_0 – известные положительные постоянные.

Тогда для любого конечного интервала $(0,T]$ задача (1)–(3) имеет единственное решение:

$$\phi(x,t) \in C^{2+\alpha,1}(Q_T), \quad s(x,t) \in C^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(Q_T).$$

Более того

$$0 \le s(x,t) \le 1, \quad 0 < \phi(x,t) < 1, \quad (x,t) \in Q_T.$$

Схема доказательства

Доказательство следует работе [2] и [6]. Основными являются следующие моменты: 1) доказательство принципа максимума для s и ϕ; 2) доказательство гельдеровской непрерывности пористости ϕ и насыщенности s без предположения о дифференцируемости суммарной скорости фильтрации по времени; 3) построение вполне непрерывного оператора и проверка условий теоремы Шаудера.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ «Расчет физических характеристик почвогрунтов в процессе внутренней эрозии и прогноз их разрушения» №17-41-220314.

Библиографический список

1. Vardoulakis I. Sand-production and sand internal erosion: Continuum modeling // Alert School: Geomechanical and Structural Issues in Energy Production. – 2006.

2. Папин А.А., Сибин А.Н. О разрешимости первой краевой задачи для одномерных уравнений внутренней эрозии // Известия АлтГУ, Барнаул, 2015. Т. 2, №1. – С. 136–140.

3. Кузиков С.С., Папин А.А., Сибин А.Н. Численное моделирование процесса суффозионного выноса грунта // МАК-2014 : сборник трудов 17 региональной конференции по математике. – Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2014.

4. Кузиков С.С., Папин А.А., Сибин А.Н. Численное исследование профильной задачи внутренней эрозии в межмерзлотном водоносном слое // Известия АлтГУ. – Барнаул, 2014. Вып. 1/2 (85).

5. Папин А.А., Гагарин Л.А., Шепелев В.В., Сибин А.Н., Хворых Д.П. Математическая модель фильтрации грунтовых вод, контактирующих с многолетнемерзлыми породами // Известия АлтГУ, Барнаул, 2013. Вып. 1/2 (77).

6. Папин А.А., Вайгант В.А., Сибин А.Н. Математическая модель изотермической внутренней эрозии // Известия АлтГУ. – Барнаул, 2015. – Вып. 1/1 (85). – С. 89–93.

7. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск, 1983.

8. Ахмерова И.Г., Папин А.А. Разрешимость краевой задачи для уравнений одномерного движения двухфазной смеси // Математические заметки. – 2014. – Т. 96, №2. – С. 170–185.

9. Папин А.А. Существование решения «в целом» уравнений одномерного неизотермического движения двухфазной смеси. 1. Постановка задачи и вспомогательные утверждения // Сиб. журн. индустр. математики. – Новосибирск, 2006. – Т. 9, №2 (26). – С. 116–136.

10. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М., 1967.

11. Кружков С.Н., Сукорянский С.М. Краевые задачи для систем уравнений типа двухфазной фильтрации; постановка задач, вопросы разрешимости, обоснование приближенных методов // Матем. сб. – 1977. – Т. 104(146), №1(9). – С. 69–88.

УДК 517.95 + 631.459.26

Математическая модель абляции льда

Н.Ю. Глебова, А.А. Папин
АлтГУ, г. Барнаул

Постановка задачи

В работе изучается модель, описывающая процесс сублимации льда. Лёд рассматривается как деформируемая пористая среда, в порах которой движется влажный воздух. В основе рассматриваемой модели лежат уравнения сохранения масс с учётом фазового перехода, закон Дарси для влажного воздуха, учитывающий движение пористого скелета, реологическое уравнение для пористости, уравнения равновесия и сохранения энергии для системы лёд-воздух [1–3]

$$\frac{\partial \phi\rho_f}{\partial t} + div(\phi\rho_f\vec{u}_f) = S, \tag{1}$$

$$\frac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t} + div((1-\phi)\rho_s\vec{u}_s) = -S, \tag{2}$$

$$\phi(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) = -K_0\frac{k}{\mu}(\nabla p_f + \rho_f\vec{g}), \tag{3}$$

$$\left(\rho_f\phi + \rho_s(1-\phi)\right)\frac{\partial\theta}{\partial t} + \left(\rho_f\phi\vec{u}_f + \rho_s(1-\phi)\vec{u}_s\right)\nabla\theta = div(\lambda_c\nabla\theta) - \mu\frac{\partial\rho_f\phi}{\partial t}, \tag{4}$$

$$p_{tot} = \phi p_f + (1-\phi)p_s, \quad p_e = (1-\phi)(p_s - p_f),$$
$$\rho_{tot} = \phi\rho_f + (1-\phi)\rho_s, \tag{5}$$

$$p_f = \rho_f R\theta, \quad \nabla\cdot\vec{u}_s = -a(\phi)p_e, \quad \nabla p_{tot} = \rho_{tot}\vec{g}. \tag{6}$$