

УДК 514.75

**Поверхности переноса и торы
в евклидовом пространстве E^3**

М.А. Чешкова
АлтГУ, г. Барнаул

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим поверхность переноса M [1, с. 315], [2, с. 130], [3]

$$r(u, v) = U(u) + V(v), u \in [-\pi, \pi], v \in [-\pi, \pi], \quad (1)$$

где $U(u), V(v)$ 2π – периодические вектор-функции.

Формула (1) определяет [4, с. 75] модель тора.

Действительно,

$$r(-\pi, v) = U(-\pi) + V(v) = U(-\pi + 2\pi) + V(v) = r(\pi, v),$$

$$r(u, -\pi) = U(u) + V(-\pi) = U(u) + V(-\pi + 2\pi) = r(u, \pi).$$

Имеем склейку противоположных сторон прямоугольника $u \in [-\pi, \pi], v \in [-\pi, \pi]$ по точкам, лежащим на общей горизонтали, и одновременно склейку по точкам, лежащим на общей вертикали [4, с. 75].

Рассмотрим вектор-функцию

$$r(v) = U(kv) + V(v), v \in [-\pi, \pi].$$

Ищем обмотку тора. Если обмотка тора замкнутая кривая [3], то k рациональное число.

Действительно,

$$\begin{aligned} r(v + 2\pi n_1) &= U(k(v + 2\pi n_1)) + V(v + 2\pi n_1) = r(v) = \\ &= U(kv + 2\pi n_2) + V(v), k = \frac{n_2}{n_1}, n_1, n_2 \in N. \end{aligned}$$

Если k иррациональное число, то кривая, определяемая вектор-функцией $r = r(v)$, незамкнутая кривая, сколько бы мы не накручивали кривую на тор.

Пример модели тора

Рассмотрим поверхность переноса M

$$r(u, v) = (\cos(v), \sin(v) + \cos(u), \sin(u)), u \in [-\pi, \pi], v \in [-\pi, \pi].$$

В нашем случае

$$U(u) = (0, \cos(u), \sin(u)), V(v) = (\cos(v), \sin(v), 0). \quad (2)$$

Кривые (2) есть окружности.

Построим поверхность переноса M (рисунок 1).

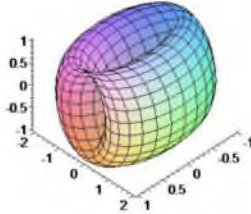


Рисунок 1 – Поверхность переноса M

Рассмотрим некоторые свойства этой поверхности.

Обмотка тора M

Ищем рациональную обмотку тора M .

Рассмотрим на торе кривую $v = \frac{1}{2}u, u \in [-2\pi, 2\pi]$.

Построим ее (рисунок 2).

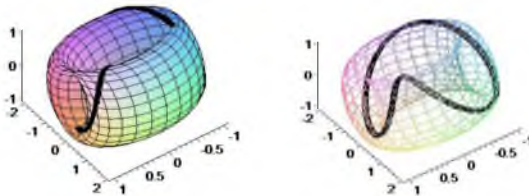


Рисунок 2 – Рациональная обмотка тора $M, v = \frac{1}{2}u$

Ищем иррациональную обмотку тора M .

Построим на торе кривую $v = \sqrt{2}u, u \in [-2\pi, 2\pi]$ (рисунок 3).

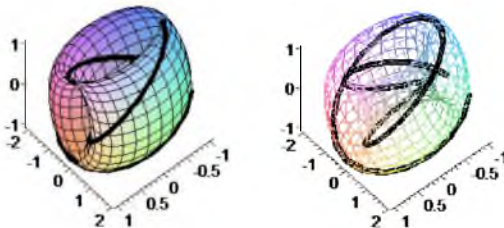


Рисунок 3 – Иррациональная обмотка тора $M, v = \sqrt{2}u$

Характер точек на торе M

Обычным способом определим гауссову кривизну K поверхности. Имеем

$$K = \frac{b}{g}, \text{ где } b = \det(b_{ij}), g = \det(g_{ij}), ij = 1, 2,$$

$$g_{ij} = \langle r_i, r_j \rangle, r_1 = r_u, r_2 = r_v, b_{ij} = \langle r_{ij}, [r_1, r_2] \rangle > \frac{1}{\sqrt{g}}.$$

$$g_{11} = 1, g_{22} = 1, g_{12} = -\sin(u) \cos(v), b_{11} = \sin(v) \frac{1}{\sqrt{g}}, b_{22} = \cos(u) \frac{1}{\sqrt{g}}, b_{12} = 0,$$

$$K = \frac{\sin(v) \cos(u)}{g^2}. \quad (3)$$

Для параболических точек

$$\sin(v) \cos(u) = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) определяет четыре окружности

$$S_1 : r = r(u, 0) = (1, \cos(u), \sin(u)), S_2 : r = r(u, \pi) = (-1, \cos(u), \sin(u)),$$

$$S_3 : r = r(\pi/2, v) = (\cos(v), \sin(v), 1), S_4 : r = r(-\pi/2, v) = (\cos(v), \sin(v), -1).$$

Точки касания этих окружностей

$$P1(\pi/2, 0) = (1, 0, 1), P2(-\pi/2, 0) = (1, 0, -1), P3(\pi/2, \pi) = \\ = (-1, 0, -1), P4(\pi/2, \pi) = (-1, 0, 1).$$

есть особые точки. Для них $g_{12} = \pm 1, g = 0$.

Замечаем, что

$$P_1 \in S_1, P_1 \in S_3; P_2 \in S_1, P_2 \in S_4; P_3 \in S_4, P_3 \in S_2; P_4 \in S_3, P_4 \in S_2.$$

Построим эти окружности (рисунок 4).

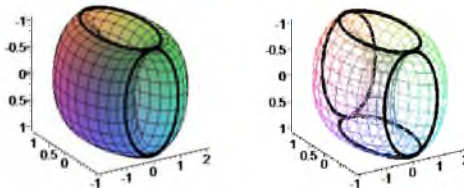


Рисунок 4 – Параболические точки на торе M

Для гиперболических точек

$$\sin(v) \cos(u) < 0. \quad (5)$$

Имеем три куска поверхности

$$MG1: u \in (\pi/2, \pi), v \in (0, \pi), \quad MG2: u \in (-\pi, -\pi/2), v \in (0, \pi),$$

$$MG3: u \in (-\pi/2, \pi/2), v \in (-\pi, 0).$$

Построим их (рисунок 5).

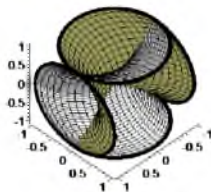


Рисунок 5 – Гиперболические и параболические точки тора

Для эллиптических точек

$$\sin(v)\cos(u) > 0 \quad (6)$$

Имеем три куска поверхности

$$ME1: u \in (-\pi/2, \pi/2), v \in (0, \pi), \quad ME2: u \in (-\pi, -\pi/2), v \in (-\pi, 0),$$

$$ME3: u \in (\pi/2, \pi), v \in (-\pi, 0).$$

Построим их (рисунок 6).

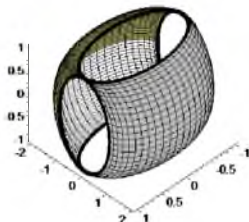


Рисунок 6 – Эллиптические и параболические точки тора

На гиперболической части тора M определяются две «диагональные» прямые $l_{13} = (P1, P3), l_{24} = (P2, P4): r = (\pm \sin(u), 0, \sin(u))$ ($v = u - \pi/2, v = -u - \pi/2$).

Плоскость, проходящая через l_{13} ортогонально l_{24} и плоскость, проходящая через l_{24} ортогонально l_{13} , на параболической части тора M определяют два «диагональных» эллипса $r = (\pm \sin(u), 2 \cos(u), \sin(u))$ ($v = u + \pi/2, v = -u + \pi/2$) (рисунок 7, 8).

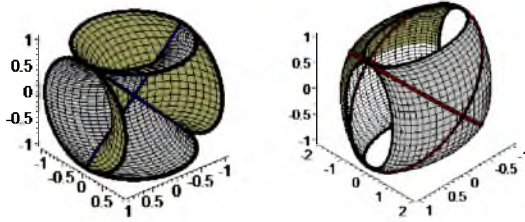


Рисунок 7 – Параболические и «диагональные» кривые на торе M

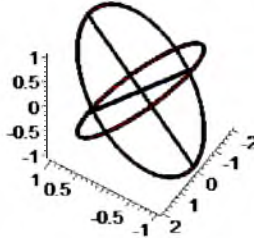


Рисунок 8 – «Диагональные» кривые на торе M

Интегральная кривизна

Определим интегральную кривизну. Имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K \sqrt{g} \, dv \, du = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(v) \cos(u)}{(1 - \sin(u)^2 \cos(v)^2)^{3/2}} \, dv \, du = 0$$

$$\text{Эйлерова характеристика } \chi(M) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K \sqrt{g} \, dv \, du = 0.$$

Библиографический список

1. Шуликовский В.И. Классическая дифференциальная геометрия. – М., ГИФМЛ, 1963.
2. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н., Халаби С.М. Аналитические поверхности. – М., 2006.
3. Чешкова М.А. О поверхностях переноса в евклидовом пространстве // Математика и ее приложения: фундаментальные проблемы науки и техники. Сборник трудов всероссийской конференции. – Барнаул, 24–26 ноября, 2015.
4. Борисович Ю.Г., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко Т.Н. Введение в топологию. – М., 1995.