

УДК 514.75

### Построение поверхности вращения постоянной гауссовой кривизны

*М.А. Чешкова*  
*АлтГУ, Барнаул*

В евклидовом пространстве  $E^3$  рассмотрим поверхность вращения  $M$ , полученную вращением плоской кривой вокруг оси.

Обозначим через  $a = (0, 0, 1)$  – орт оси, а через  $\rho(v) = (\cos(v), \sin(v), 0)$  – радиус-вектор единичной окружности, расположенной в плоскости, ортогональной оси. Тогда поверхность  $M$  можно задать в виде

$$r = u\rho(v) + f(u)a,$$

где  $f$  – дифференцируемая функция,  $v, u$  – параметры.

Имеем

$$r_1 = r_v = u\rho', r_2 = r_u = f'a + \rho.$$

Обозначим через  $n$  – орт нормали к поверхности  $M$ . Тогда

$$n = \frac{f'\rho - a}{\sqrt{(f')^2 + 1}}, \quad n_1 = \frac{f'}{u\sqrt{(f')^2 + 1}}r_1, \quad n_2 = \frac{f''}{(\sqrt{(f')^2 + 1})^3}r_2.$$

Главные кривизны  $k_1, k_2$  поверхности  $M$  имеют вид

$$k_1 = -\frac{f'}{u\sqrt{(f')^2 + 1}}, \quad k_2 = -\frac{f''}{(\sqrt{(f')^2 + 1})^3}.$$

Имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{f'}{u\sqrt{(f')^2 + 1}} \frac{f''}{(\sqrt{(f')^2 + 1})^3} = K.$$

Получим два решения

$$f(u) = \int_0^u \sqrt{\frac{Kt^2 - (c-1)}{c - Kt^2}} dt + c_1, \quad f(u) = -\int_0^u \sqrt{\frac{Kt^2 - (c-1)}{c - Kt^2}} dt + c_1, \quad (1)$$

где  $c_1, c$  – произвольные константы.

В [1, с. 97] форма меридиана  $f = f(u)$  исследована не прибегая к вычислению эллиптического интеграла. Мы построим данные поверхности, используя математический пакет MAPLE [2].

Имеем

$$f(u) = \pm \frac{-I\sqrt{c-1}\text{EllipticE}\left(\frac{u\sqrt{Kc}}{c}, \frac{\sqrt{(c-1)c}}{c-1}\right)}{\sqrt{K}} + c_1. \quad (2)$$

Случай, когда  $K < 0$ .

Для определенности, полагаем  $K = -1$ .

Константам  $c = 0, c_1 = 0$  соответствуют решения

$$f(u) = \pm(\sqrt{1-u^2} - \text{arcth}\left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\right)).$$

$$u = \sin t, \text{arcth}(u) = \frac{1}{2} \ln \frac{1-u}{1+u},$$

Делая замену

получим известное уравнение трактрисы  $f(t) = \pm(\cos t + \ln \tan(t/2))$ .

В этом случае поверхность  $M$  есть псевдосфера (рисунок 1). Используя математический пакет, построим её.

```
> with(plots):
```

```
> T1 := plot3d([sin(u)*cos(v), sin(u)*sin(v), cos(u) + ln(tan(u/2))],
```

```
u = Pi/24..Pi/2, v = -Pi..Pi):
```

```
> T2 := plot3d([sin(u)*cos(v), sin(u)*sin(v), -cos(u) - ln(tan(u/2))],
```

```
u = Pi/24..Pi/2, v = -Pi..Pi):
```

```
> display(T1, T2);
```

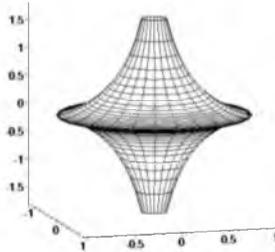


Рисунок 1– Псевдосфера

Будем строить поверхность при  $c = 1/4, c_1 = 0$ . Имеем решения

$$f(u) = \mp(2\text{EllipticF}\left(\frac{2u\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}I\right) - \frac{1}{2}\text{EllipticE}\left(\frac{2u\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}I\right)) \quad (3)$$

Положим  $u = \sqrt{1-c}$  и введем обозначение

$$b = 2\text{EllipticF}\left(\frac{2\sqrt{1-c}\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}I\right) - \frac{1}{2}\text{EllipticE}\left(\frac{2\sqrt{1-c}\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}I\right). \quad (4)$$

Построим полученную поверхность (рисунок 2).

> with(plots):

> M1 := plot3d([u\*cos(v), u\*sin(v), f(u)], u = 0..sqrt(1-c), v = -Pi..Pi):

> M2 := plot3d([u\*cos(v), u\*sin(v), -f(u)], u = 0..sqrt(1-c), v = -Pi..Pi):

> M3 := plot3d([u\*cos(v), u\*sin(v), -f(u)-2\*b], u = 0..sqrt(1-c), v = -Pi..Pi):

> M4 := plot3d([u\*cos(v), u\*sin(v), f(u) + 2\*b], u = 0..sqrt(1-c), v = -Pi..Pi):

> display(M1, M2, M3, M4);

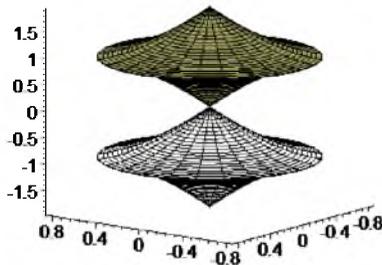


Рисунок 2 – Поверхность вращения,  $K=-1$ ,  $c=1/4$

Положим в (1)  $c^* = -c$ .

Имеем

$$f(u) = \pm \int_0^u \sqrt{\frac{-t^2 + c^* + 1}{-c^* + t^2}} dt + c_1,$$

$$f(u) = \mp \frac{-I}{\sqrt{c^*}} \left( \text{EllipticF}\left(\frac{u}{\sqrt{1+c^*}}, \frac{\sqrt{(1+c^*)c^*}}{c^*}\right) \right. \\ \left. + c^* \text{EllipticE}\left(\frac{u}{\sqrt{1+c^*}}, \frac{\sqrt{(1+c^*)c^*}}{c^*}\right) \right) + c_1. \quad (5)$$

Из (5) следует  $c^* < 0, 1+c^* > 0$ .

Рассмотрим случай, когда  $c^* = -1/4, c_1 = 0$ . Имеем решения

$$f(u) = \mp \left( 2\text{EllipticF}\left(\frac{2u\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}I\right) - \frac{1}{2}\text{EllipticE}\left(\frac{2u\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}I\right) \right).$$

Полагая  $u = \sqrt{1+c^*}, u = \sqrt{-c^*}$ , введем обозначение

$$b1 = 2\text{EllipticK}(\sqrt{3I}) - \frac{1}{2}\text{EllipticE}(\sqrt{3I}), (u = \sqrt{1+c^*}) ,$$

$$a = 2\text{EllipticF}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3I}\right) - \frac{1}{2}\text{EllipticE}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3I}\right), (u = \sqrt{-c^*}) .$$

Построим эту поверхность (рисунок 3).

```
> M1 := plot3d([u*cos(v), u*sin(v), f(u)-2*a],
u = sqrt(-c^*)..sqrt(1-c^*), v = -Pi..Pi):
> M2 := plot3d([u*cos(v), u*sin(v), -f(u)],
u = sqrt(-c^*)..sqrt(1-c^*), v = -Pi..Pi):
> M3 := plot3d([u*cos(v), u*sin(v), -f(u)-2*a + 2*b1],
u = sqrt(-c^*)..sqrt(1-c^*), v = -Pi..Pi):
> M4 := plot3d([u*cos(v), u*sin(v), f(u)-2*b1],
u = sqrt(-c^*)..sqrt(1-c^*), v = -Pi..Pi):
> display(M1, M2, M3, M4);
```

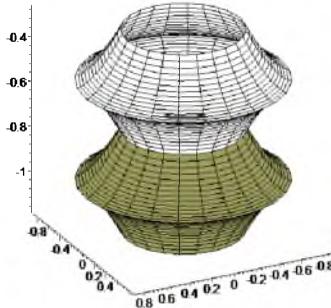


Рисунок 3 – Поверхность вращения,  $K = -1, c^* = -1/4$

Случай, когда  $K > 0$ .

Для определенности, полагаем  $K = 1$ .

Из (1) имеем

$$f(u) = \pm \int_0^u \sqrt{\frac{t^2 - c + 1}{c - t^2}} dt + c_1,$$

$$f(u) = \pm (-I\sqrt{c-1}\text{EllipticE}\left(\frac{u}{\sqrt{c}}, \frac{\sqrt{(c-1)c}}{c-1}\right)) + c_1 \quad (6)$$

Константам  $c = 1, c_1 = 0$  соответствуют решения  $f(u) = \pm(\sqrt{1-u^2})$ .

Меридиан в этом случае есть полуокружность, а поверхность есть сфера.

Из (6) следует  $c < 1, c > 0$ .

Полагаем  $c = \frac{1}{4}$ .

Имеем

$$f(u) = \mp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\text{EllipticE}\left(2u, \frac{1}{3}\sqrt{3}I\right)\right).$$

Введем обозначение

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{3}\text{EllipticE}\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}I, (u = \sqrt{c})\right).$$

Построим поверхность (рисунок 4).

```
> M1 := plot3d([u*cos(v), u*sin(v), f(u)], u = 0..sqrt(c), v = -Pi..Pi):
> M2 := plot3d([u*cos(v), u*sin(v), -f(u)], u = 0..sqrt(c), v = -Pi..Pi):
> M3 := plot3d([u*cos(v), u*sin(v), -f(u) + 2*a], u = 0..sqrt(c), v = -Pi..Pi):
> M4 := plot3d([u*cos(v), u*sin(v), f(u) - 2*a], u = 0..sqrt(c), v = -Pi..Pi):
> display(M1, M2, M3, M4);
```

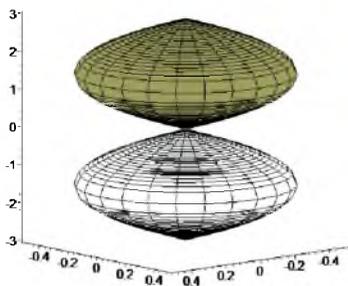


Рисунок 4 – Поверхность вращения,  $K = 1, c = 1/4$

Аналогично, положим в (1)  $c^* = -c$ .

Имеем

$$f(u) = \pm \int_0^u \sqrt{\frac{t^2 + c^* + 1}{-c^* - t^2}} dt + c_1,$$

$$f(u) = \pm(-\sqrt{c^*+1} \operatorname{EllipticE}(\frac{u\sqrt{-c^*}}{c^*}, \frac{\sqrt{(c^*+1)c^*}}{c^*+1})) + c_1. \quad (7)$$

Из (7) следует  $c^*+1 > 0, c^* < 0$

Предположим  $c^* = -4/5$ . Тогда

$$f(u) = \mp(-\frac{1}{5}\sqrt{5} \operatorname{EllipticE}(\frac{u\sqrt{5}}{2}, 2I)).$$

Введем обозначение

$$b1 = \frac{1}{5}\sqrt{5} \operatorname{EllipticE}(\frac{1}{2}, 2I), (u = \sqrt{1+c^*}), a = \frac{1}{5}\sqrt{5} \operatorname{EllipticE}(2I), (u = \sqrt{-c^*}).$$

Построим эту поверхность (рисунок 5).

```
> M1: = plot3d([u*cos(v),u*sin(v),f(u)-2*a],
u = sqrt(-c^*)..sqrt(1+c^*), v = -Pi..Pi);
> M2: = plot3d([u*cos(v),u*sin(v),-f(u)-2*b1-2*a],
u = sqrt(-c^*)..sqrt(1+c^*), v = -Pi..Pi);
> M3: = plot3d([u*cos(v),u*sin(v),-f(u)-4*a],
u = sqrt(-c^*)..sqrt(1+c^*), v = -Pi..Pi);
> M4: = plot3d([u*cos(v),u*sin(v),f(u)-2*b1],
u = sqrt(-c^*)..sqrt(1+c^*), v = -Pi..Pi);
> display(M1,M2,M3,M4);
```

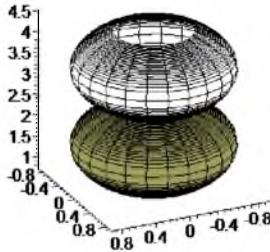


Рисунок 5 – Поверхность вращения,  $K = 1, c^* = -4/5$

### Библиографический список

1. Каган В.Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. – М., Л., 1948. – Ч. 2.
2. Васильев А.Н. Maple 8. М., 2003.