$$
\begin{aligned}
V &= \lambda v + (H_{11} + H_{22} + H_{33})\frac{u^2}{4} + (F_{11} + F_{22} + F_{33})\frac{u}{2} \\
X &= \frac{1}{2}\lambda x \\
Y &= \frac{1}{2}\lambda y \\
Z &= \frac{1}{2}\lambda z \\
U &= 0
\end{aligned}
$$

*Работа выполнена при поддержке РФФН (грант № 16-01-00336А).*

**Библиографический список**

1. Hamilton R.S. // Contemporary Mathematics. – 1988. – V. 71. – P. 237–261.

2. Alekseevsky D.V., Galaev, A.S. Two-symmetric Lorentzian manifolds // Journal of Geometry and Physics. – 2011. – V. 61, №12. – P. 2331–2340.

3. Gavino-Fernandez S. The geometry of Lorentzian Ricci solitons, Ph.D. Thesis, Publicaciones del Departamento de Geometria y Topologia, Universidade de Santiago de Compostela. – 2012. – P. 105.

4. Onda K., Batat W. Ricci and Yamabe solitons on second-order symmetric, and plane wave 4-dimensional Lorentzian manifolds // Journal of Geometry. – 2014. – V. 105 Issue 3. – P. 561–575.

**УДК 514.142**

## Определённость эники конечным набором точек

***И.В. Поликанова***

*АлтГПА, г. Барнаул*

Изучая линии с аффинно-эквивалентными дугами [1–4], автор вышел на кривую, задаваемую в некоторой аффинной системе координат (АСК) в n-мерном действительном аффинном пространстве $A^n$ параметризацией

$$\vec{r} = (u, u^2, \ldots, u^n),\ u \in I, \tag{1}$$

(I – числовой промежуток), но имени её в анналах Интернета не обнаружил. Выявив ряд замечательных качеств этой незнакомки, мы сочли несправедливым оставлять её и впредь безымянной и нарекли *эникой* или «*n*-ica», отталкиваясь от схожего наименования «кубика» для $n$ =

3. Звучит поэтично и, что немаловажно, кратко и вызывает приятные русскому слуху гастрономические ассоциации: «Эники, бэники ели вареники». Первоначально была идея назвать её пространственной алгебраической кривой, чем, по сути, она и является, так как может быть задана системой полиномиальных уравнений с $n$ неизвестными:

$$x_i = x_1^i,\ i = 2,\dots,\mathbf{n}. \qquad (2)$$

Однако данный термин охватывает более широкий класс кривых. Кроме того, его принято относить к линиям в проективном пространстве. Нас же пока интересует аффинный статус кривой.

Заметим, что в произвольной АСК эника задаётся так:

$$\vec{r} = (a_{1j}t^j, a_{2j}t^j, \dots, a_{nj}t^j),\ \ t \in J, \qquad (3)$$

где J – числовой промежуток. Здесь и ниже предполагается суммирование по разно-уровневым индексам $j = 0,1,2,\dots,n$; верхний индекс всюду в статье означает степень, $a_{ij}$ – действительные числа, причём, $\det |a_{ij}|_{i,j=1,\dots,n} \neq 0$.

Назовём энику *полной*, если параметр $u$ в (1) пробегает множество R действительных чисел, т.е. I = R (соответственно в (3) J = R).

Цель статьи – доказать однозначную определённость полной эники конечным набором точек.

Примером подобного рода утверждений служит предложение ([5], proposition 3.1, с. 86) о том, что алгебраическая гиперповерхность степени $d$ в $A^n$ однозначно определяется минимальным набором из $\binom{d+n}{n} - 1$ точек. Например, поверхность 2-ого порядка в $A^3$ задаётся 9-ю точками. Однако набор точек, определяющих однозначно гиперповерхность, не произволен. Так, линия 2-ого порядка в $A^2$ однозначно определяется 5-ю точками, никакие 4 из которых не лежат на одной прямой [6, теорема 4, с. 430]. Из того, что 2 гиперповерхности имеют общие точки в количестве, определяющим гиперповерхность, в общем случае не следует совпадения этих гиперповерхностей. Например, в общем случае 2 поверхности одной степени в $A^3$ пересекаются по кривой. Сколько бы точек мы не взяли на этой кривой, они не определят однозначно поверхность данной степени. Поэтому из утверждения об однозначной определённости фигуры некоторого класса конечным набором $m$ точек не вытекает, что всякие 2 фигуры из этого класса имеют не более, чем $m-1$ точек пересечения. Обратное утверждение верно: если всякие 2 фигуры из некоторого класса имеют не более, чем $m - 1$ общих точек, то отсюда следует, что $m$ точками фигура в этом классе определяется однозначно. Проблема оценки количества точек пересечений двух фигур внутри некоторого класса важна в компьютерном моделировании.

**Теорема 1.** Полная эника в $A^n$ однозначно определяется набором из $n^2$+1 точек, ей принадлежащих.

*Доказательство.* Пусть 2 полные эники $\gamma$ и $\gamma'$ в $A^n$ имеют $n^2$+1 общих точек; АСК выбрана так, что $\gamma$ и $\gamma'$ задаются параметризациями (1) и (3) соответственно, I=J=R. Перейдём к явному заданию линии $\gamma$ по формулам (2).

Пусть $t_1, t_2,..., t_{n^2+1}$ – значения параметров в параметризации (3), соответствующих общим точкам обеих линий. Тогда координаты этих точек $\left(a_{1j}t_k^j, a_{2j}t_k^j, \dots, a_{nj}t_k^j\right)$, $k$=1,…, $n^2$+1, удовлетворяют системе (2), т. е. справедливы равенства:

$a_{ij}t_k^j$=$\left(a_{1j}t_k^j\right)^i$, $i$ = 2,..., $n$, $k$=1,..., $n^2$+1.

Их можно интерпретировать как существование $n^2$+1 корней у многочленов $\left(a_{1j}t^j\right)^i - a_{ij}t^j$= 0, $i$ = 2,..., $n$, степень которых $ni \le n^2$. А это возможно только в случае, если равенства представляют собой тождества. Следовательно, $a_{12}$= $a_{13}$= …= $a_{1n}$= 0. После обозначений $a_{11}$= $a$, $a_{10}$ = $b$ получим: $(at + b)^i \equiv a_{ij}t^j$, $i$ = 1,..., $n$.

Итак, линия $\gamma'$ задаётся параметризацией:

$\vec{r} = (at + b, (at + b)^2, (at + b)^3,...,(at + b)^n)$, $t \in R$,

которая после допустимой замены параметра $u = at + b$ приводится к виду (1). Значит линии $\gamma$ и $\gamma'$ совпадают. Теорема доказана.

**Замечание.** Из доказательства видно, что эника однозначно определена любыми $n^2$+1 точками. Поэтому справедливо

**Следствие.** Две эники пересекаются не более, чем в $n^2$ точках.

В частности 2 кубики пересекаются не более, чем в 9 точках. Эта оценка достаточно грубая. В [5] даются оценки числа точек пересечения для произвольных алгебраических пространственных кривых в 3-мерном проективном пространстве. Из них следует, что у двух кубик точек пересечения не более 6, и даётся ссылка на работу, в которой доказывается, что их не более 5. Техника получения этих оценок иная – путём погружения одной из кривых на 2-мерную алгебраическую поверхность, после чего оказывается возможным применение теоремы Безу о степени пересечения двух алгебраических многообразий. Для нашей цели обоснования гипотезы о линиях с аффинно-эквивалентными дугами [4] важен лишь сам факт определённости эники конечным набором точек, а вернее, вытекающая из него

**Теорема 2.** Линия в $A^n$, локально являющаяся эникой, сама есть эника.

*Доказательство.* Пусть $\gamma$ – линия в $A^n$, окрестность каждой точки которой является эникой. Тогда в некоторой АСК некоторая её открытая дуга $\gamma_0$ задаётся параметризацией (1). Пусть $\delta$ – полная эника, задаваемая той же параметризацией, где $u \in$ R. Покажем, что $\gamma \subset \delta$.

Пусть X – произвольная точка линии $\gamma$, $X_0 \in \gamma_0$. В силу компактности дуги $X_0X$ из открытого покрытия её окрестностями точек, представляющими собой эники, можно выбрать конечное подпокрытие $\{\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_m\}$, причём, можно считать, что окрестность $\gamma_0$ – та самая, что определена выше. Более того, окрестности можно перенумеровать таким образом, что всякие две с последовательными номерами перекрываются. Так как $\gamma_0 \cap \gamma_1$ содержит континуальное множество точек, то по теореме 1 $\gamma_1 \subset \delta$. Индукцией по числу окрестностей доказывается, что $\gamma_0 \cup \gamma_1 \cup ... \cup \gamma_m \subset \delta$. Следовательно, X$\in \delta$. Ввиду произвольности выбора точки X$\in \gamma$ заключаем, что $\gamma \subset \delta$. Теорема доказана.

**Библиографический список**


1. Поликанова И.В. Об аффинной эквивалентности параболических дуг // Сборник научных статей международной конференции «Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования», Барнаул, 11–14 ноября, 2014 – Барнаул, – С. 344–346.
2. Поликанова И.В. О линиях в n-мерном аффинном пространстве с аффинно-эквивалентными дугами // МАК-2015: «Математики – Алтайскому краю»: сборник трудов всероссийской конференции по математике.– Барнаул: Изд-во Алт.ун-та, 2015.– С. 34–38.
3. Поликанова И.В. Некоторые свойства линий с аффинно-эквивалентными дугами // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию: сб. ст. – Вып. 2. / гл. ред. Е.Д. Родионов. – Изд-во Алт. ун-та, 2016. – С. 55–61.
4. Polikanova I.V. Curves with affine-congruent arcs // Геометрический анализ и теория управления : тезисы докладов Международой конференции. – Новосибирск: Институт математики им. С.Л. Соболева Со РАН, 2016. – С. 106.
5. Abhyankar J.S., Chandrasekar S., Chandru V. Intersection of algebraic space curves // Discrete Applied Mathematics. – North-Holland, 1991. – 31/1. – С. 81–96.
6. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры. – М.: Наука, 1968. – 511 с.