

Библиографический список

1. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. – Киев: Наукова думка, 1968. – 352 с.
2. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наукова думка, 1981. – 324 с.
3. Бушманова О.П., Ревуженко А.Ф. Напряженное состояние породного массива вокруг выработки в условиях локализации сдвигов // ФТПРПИ. – 2002. – № 2. – С. 18–26.
4. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 393 с.
5. Гольдштейн Р.В., Кулинич Ю.В. Осипенко Н.М. Разрушение горных пород вблизи отверстия при сжатии: препринт ИПМех РАН. – 2005. – № 778.
6. Бушманова О.П., Устюжанова А.В. О численном моделировании трещин сдвига вблизи отверстий // Математическое моделирование и краевые задачи: труды седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч.1. – Самара: СамГТУ, 2010. – С. 81–83.
7. Бушманова О.П., Устюжанова А.В. О математическом моделировании сдвиговых трещин вблизи отверстий // Известия Алтайского госуд арственного университета. – Барнаул, 2010. – №1/2 (65). – С. 20–23.

УДК 532.135

Нахождение параметров реологической модели по результатам измерений соотношений нелинейной вязкоупругости

Н.А. Черпакова, О.А. Кондратьева
АлтГТУ, г. Барнаул

Модифицированная реологическая модель Виноградова – Покровского используется для описания вискозиметрических течений полимерных жидкостей [1–5]. Особенностью этой модели является учет тензорного характера коэффициента трения бусинок, который определен наведенной анизотропией сдвигового потока. Обобщение этой модели на многомодовый случай имеет вид [5]:

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + 3\sum_{\alpha=1}^n \frac{\eta_{\alpha}}{\tau_{\alpha}} a_{ik}^{\alpha} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} a_{ik}^{\alpha} - v_{ij} a_{jk}^{\alpha} + \frac{1 + (\kappa_{\alpha} - \beta_{\alpha}) a_{ij}^{\alpha}}{\tau_{\alpha}} a_{jk}^{\alpha} = \frac{2}{3} \gamma_{ik} - \frac{3\beta_{\alpha}}{\tau_{\alpha}} a_{ij}^{\alpha} a_{jk}^{\alpha}$$

Здесь – гидростатическое давление; σ_{ik} – тензор напряжений полимерной системы; v_{ik} – тензор градиентов скорости; $\gamma_{ik} = (v_{ik} + v_{ki})/2$ – симметризованный тензор градиентов скорости; α – порядковый номер моды; n – количество учитываемых релаксационных мод или процессов; a_{ik}^{α} – безразмерный тензор дополнительных напряжений, соответствующих вкладу с номером α ; η_{α} – коэффициент сдвиговой вязкости моды с номером α ; τ_{α} – время релаксации моды с номером α ; $\kappa_{\alpha} = \kappa_{\alpha}(a_{ij}^{\alpha})$ и $\beta_{\alpha} = \beta_{\alpha}(a_{ij}^{\alpha})$ – параметры наведенной анизотропии, определяемые выражениями

$$\beta_{\alpha}(a_{ij}^{\alpha}) = \frac{f_{\alpha} + p_{\alpha} a_{ij}^{\alpha}}{1 + p_{\alpha} a_{ij}^{\alpha}} \quad \kappa_{\alpha}(x) = 1,2\beta_{\alpha}(x) \quad (2)$$

При работе с выражениями (2) изначально было сделано предположение [5], что значения параметров наведенной анизотропии не зависят или зависят незначительно от номера моды, однако, сравнение с экспериментами показало некорректность данного предположения, поэтому необходимо учитывать зависимость значений параметров наведенной анизотропии от номера моды.

В связи с тем, что влияние параметров наведенной анизотропии для каждой конкретной моды неодинаково, нужно рассматривать каждую моду в отдельности, что отражено при записи выражений (2). Таким образом, система уравнений (1, 2) определена с точностью до параметров: η_{α} , τ_{α} , f_{α} , p_{α} , q_{α} , которые подлежат определению из экспериментов. Число этих параметров достаточно велико, особенно при большом числе мод.

Для того чтобы подобрать значения параметров анизотропии были рассмотрены четыре вида ограниченных зависимостей параметров g_{α} и p_{α} от номера моды α , принимающие наибольшее значение В:

$$g_{\alpha} = \frac{B}{1 + (\alpha - \alpha_0)^2}; p_{\alpha} = \frac{P}{1 + (\alpha - \alpha_0)^2} \quad (3)$$

Первой рассмотрена немонотонная зависимость (3). С начала параметры g_α и p_α возрастают с ростом α , а затем начинают убывать. При этом их максимумы приходятся на середину интервала изменения, которую обозначим α_0 .

$$g_\alpha = \frac{B(\alpha - \alpha_0)^2}{1 + (\alpha - \alpha_0)^2}; p_\alpha = \frac{P(\alpha - \alpha_0)^2}{1 + (\alpha - \alpha_0)^2} \quad (4)$$

Зависимость (4) так же является не монотонной, но в начале параметры g_α и p_α убывают, а затем возрастают проходя через минимум. При этом их минимумы приходятся на α_0 .

$$g_\alpha = B\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg(\alpha - \alpha_0)\right); p_\alpha = P\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg(\alpha - \alpha_0)\right) \quad (5)$$

Зависимость (5) является монотонно возрастающей, параметры g_α и p_α возрастают от 0 до B. На середину интервала изменения приходится точка перегиба.

$$g_\alpha = B\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctg(\alpha - \alpha_0)\right); p_\alpha = P\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctg(\alpha - \alpha_0)\right) \quad (6)$$

Зависимость (6) является монотонно убывающей, параметры g_α и p_α убывают от B до 0. На середину интервала изменения α_0 приходится точка перегиба.

Зависимости (3) и (6) показали наилучший результат, при сравнении с экспериментальными данными стационарной вязкости при растяжении от скорости растяжения.

Используя выражения (3) рассмотрим, как влияют параметры B и P на вид зависимости стационарной сдвиговой вязкости от скорости сдвига.

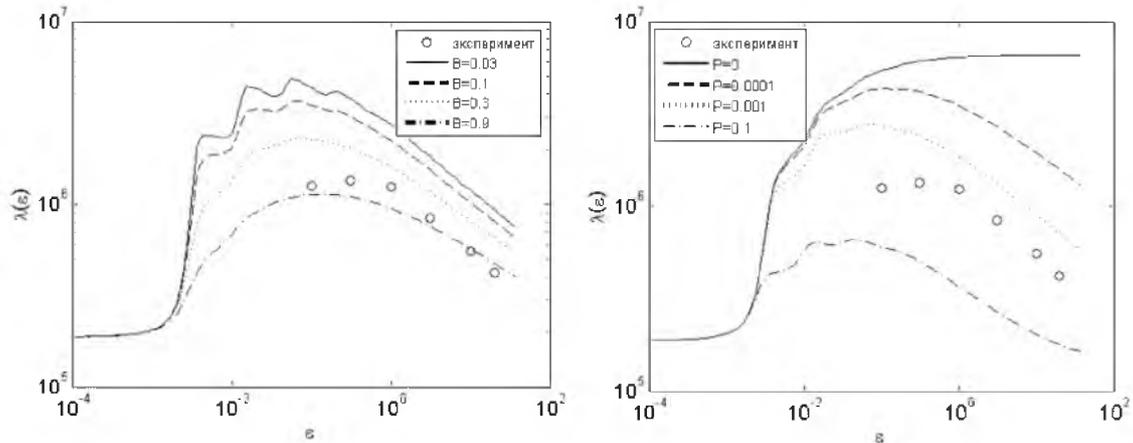


Рисунок 1 – Влияние параметра B и P на зависимость стационарной вязкости при растяжении от скорости растяжения

Из рисунка видно, что с увеличением параметра B величина максимума на этой зависимости уменьшается. При $P=0$ немонотонный характер зависимости изменяется на монотонный. Таким образом, видно, что подбором параметров B и P можно достаточно точно описать зависимость стационарной вязкости от скорости растяжения.

Таким образом, предложенный алгоритм определения параметров многомодовой реологической модели позволяет удовлетворительно описывать стационарные и нестационарные зависимости вискозиметрических функций расплавов разветвленных полимеров. При этом следует ожидать, что эта модель окажется пригодной и для концентрированных растворов и расплавов линейных полимеров. Также можно использовать эту модель и для моделирования более сложных течений текучих полимерных сред [4].

Библиографический список

1. Пышнограй Г.В. Начальное приближение в теории микровязкоупругости линейных полимеров и нелинейные эффекты на его основе // Прикладная механика и техническая физика. – 1996. – Т. 37, №1. – С. 145.
2. Гусев А.С., Пышнограй Г.В. Частотные зависимости динамических характеристик линейных полимеров при простом сдвиге // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2001. – Т. 7, №2. – С. 236–245.
3. Гусев А.С., Макарова М.А., Пышнограй Г.В. Мезоскопическое уравнение состояния полимерных сред и описание динамических характеристик на его основе // Инженерно-физический журнал. – 2005. – Т. 78, №5. – С. 55–61.
4. Кожелев К.Б., Пышнограй Г.В., Толстых М.Ю. Моделирование трехмерного течения полимерного расплава в сходящемся канале с прямоугольным сечением // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – 2015. – №3. – С. 3–11.

5. Мерзликина Д.А., Филип П., Пивоконский Р., Пышнограй Г.В. Многомодовая реологическая модель и следствия для простого сдвига и растяжения // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2013. – Т. 19, №2. – С. 254–261.

УДК 534.1 + 532.5

Математическое моделирование гидроупругой реакции ледовой пластины¹

К.А. Шишмарев
АлтГУ, г. Барнаул

В работе исследуются вязкоупругие колебания ледовой пластины, закрепленной между двух стенок, вызванные внешней нагрузкой. Внешняя нагрузка моделируется как локализованное пятно давления, движущееся с постоянной скоростью вдоль центральной линии канала, или как гидродинамический диполь, расположенный в жидкости и описывающий внешнее воздействие удаленных источников на жидкость. Изучаются удлинения в ледовом покрове вызванные изгибными напряжениями. Прогибы льда и удлинения в ледовом покрове исследуются в зависимости от ширины канала, толщины ледового покрова и скорости источника внешнего воздействия. В частности, исследуется влияние стенок канала на получаемые прогибы и удлинения.

Теория линейных гидроупругих волн является основным подходом в моделировании колебаний ледового покрова [1, 2]. Известно, что для неограниченной ледовой пластины существует критическая скорость волны, вызванной внешними нагрузками, ниже которой в линейной теории не существует решения для установившихся волн. Для описания результатов исследований колебаний ледового покрова в канале под действием внешних нагрузок необходимо определить критические скорости волн, распространяющихся вдоль канала. Эта задача была исследована в [3, 4]. В линейной постановке исследовались бегущие периодические гидроупругие волны. Решение получено с помощью разложения профиля волны поперек канала на суперпозицию функций форм свободных колебаний. Показано, что в канале существует счетное множество соотношений между волновым числом и частотой, которые соответствуют формам распространяющихся волн. Были определены соответствующие фазовые, групповые скорости и профили волн поперек канала. Задача была исследована для модели взаимодействия жидкости и ледового покрова в рамках линейной теории, учитывающей гидростатическую и гидродинамическую компоненты давления жидкости. Близкие по структуре задачи изучались в [5–7].

В работе для описания вязкоупругих эффектов льда используется модель Кельвина-Фойгта. Данная модель является значительно упрощенной моделью вязкоупругого материала. Основное уравнение в данной модели имеет вид $\sigma = E(\varepsilon + \tau \partial \varepsilon / \partial t)$, где E – модуль Юнга, σ – напряжение в материале, ε – удлинение в материале и τ – время релаксации. Модель Кельвина-Фойгта использовалась в работах [8, 9] и [10, глава 5] для описания колебаний ледового покрова в задачах с движущейся нагрузкой. В численном анализе Жесткой В.Д. и Козина В.Н. диссипативные эффекты, которые характеризуют время релаксации в вязкоупругой модели ледовой пластины, считались очень сильными. Время релаксации варьировалось от 3 до 10 секунд в [9] с целью получить вычисленные значения прогибов льда в численном анализе сопоставимые со значениями экспериментальных данных. Экспериментальные и численные результаты в [9] показывают, что магнитуда напряжений зависит от значений коэффициента времени релаксации. Соотношение для напряжений и удлинений в модели Кельвина-Фойгта является сильно упрощенным (см., например, [1] для комплексных моделей вязкоупругого льда). Исследование в данной статье сфокусировано на эффектах стенок на удлинения в ледовом покрове, однако может быть повторено и для более точных моделей, чем модель Кельвина-Фойгта, в рамках предложенного подхода к решению.

Задача о колебаниях ледового покрова в канале рассматривается в рамках линейной теории гидроупругости [1, 11]. Прогиб ледового покрова $w(x, y, t)$ описывается уравнением колебаний вязкоупругой балки [2, 12]

$$Mw_{tt} + D\left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla^4 w = P(x, y, t) - \rho_l \varphi_t - \rho_l g w \quad (1)$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Министерства №2014/2 и гранта РФФИ №16-08-00291.