Библиографический список

1. Аншиц А.Г., Аншиц Н. Н., Дерибас А.А., Караханов С.М., Касаткина Н.С., Пластинин А.В., Решетняк А.Ю., Сильвестров В.В. Скорость детонации эмульсионных взрывчатых веществ с ценосферами // Физика горения и взрыва. – 2005. – Т. 41, № 5. – С. 119–127.

2. Карпов Е.В. Деформирование и разрушение сферопласта в условиях малоциклового нагружения при различных температурах // Прикладная механика и техническая физика. – 2009. – Т. 50, № 1. – С. 197–204.

3. Гончарова О.Н. Математическая модель формирования сферических оболочек в условиях кратковременной невесомости // Динамика сплошной среды. – 1987. – № 82. – С. 66–79.

4. Гончарова О.Н., Пухначев В.В. Диффузионное приближение в задаче формирования сферических микробаллонов в условиях кратковременной невесомости // Моделирование в механике. – 1990. – № 5. – С. 83–95.

5. Гончарова О.Н. Глобальная разрешимость задачи о формировании сферических микробаллонов // Динамика сплошной среды. – 1993. – № 106. – С. 36–48.

6. Резанова Е.В. Численное исследование динамики сферической газосодержащей оболочки // Известия АлтГУ. – 2013. – №1/2 (77). – С. 42–47.

7. Zakurdaeva A.V. Numerical investigation of heat and mass transfer processes in a spherical layer of viscous incompressible liquid with free boundaries // MATEC Web of Conferences (сдана в печать).

8. Закурдаева А.В., Резанова Е.В. Численное исследование влияния давления внешней среды на динамику жидкой сферической оболочки // Омский научный вестник. – 2015. – №3 (143). – С. 312–315.

УДК 517.95+532.546

Двухфазная фильтрация в пороупругой среде

Ю.С. Зырянова, А.А Папин

АлтГУ, г. Барнаул

Рассматривается фильтрация двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в пороупругой среде (например : $i=1$ – вода, $i=2$ – нефть, $i=3$ – твердый скелет). Для описания процесса используются уравнения сохранения массы для каждой фазы [1], система уравнений двухфазной фильтрации Маскета-Леверетта для жидких фаз с учетом деформации пористого скелета [2, 3], реологическое уравнение для пористости и условие равновесия «системы в целом» [4, 5]

$$\frac{\partial \phi \rho_i^0 s_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i^0 \phi s_i \vec{u}_i) = 0, \quad i = 1,2, \tag{1}$$

$$\frac{\partial (1-\phi)\rho_3^0}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_3^0 (1-\phi)\vec{u}_3) = 0, \tag{2}$$

$$s_i \phi (\vec{u}_i - \vec{u}_3) = -K_0 \frac{\overline{k_{0i}}}{\mu_i} (\nabla p_i + \rho_i^0 \vec{g}), \quad i = 1,2, \tag{3}$$

$$p_2 - p_1 = p_c(x,s) = \overline{p_c}(\vec{x}) j(s), \quad s \equiv s_1, \tag{4}$$

$$\nabla \cdot \vec{u}_3 = -\frac{1}{\xi(\phi)} p_e - \beta_t(\phi)(\frac{\partial p_e}{\partial t} + \vec{u}_3 \cdot \nabla p_e), \tag{5}$$

$$\nabla p_{tot} = \rho_{tot} \vec{g}, \tag{6}$$

где ϕ – пористость, ρ_i^0 – истинные плотности, $\vec{u}_i$, s_i – скорость и насыщенность фаз (доля пор, занятых i-й фазой, $i=1,2$), $\vec{u}_3$ – скорость твердого скелета, K_0 – тензор фильтрации (функция пористости), $\overline{k_{0i}}$ – относительные фазовые проницаемости (функции насыщенностей s_i), μ_i – коэффициенты динамической вязкости, p_i – давления фаз, $\vec{g}$ – вектор ускорения силы тяжести, $\overline{p_c}(\vec{x})$ – заданная функция точки $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $j(s)$ – функция Леверетта ($\frac{dj(s)}{ds} \le 0$, $j(0) = \infty$, $j(1) = 0$), $p_e = p_{tot} - p_f$ – эффективное давление, $p_{tot} = \phi p_f + (1-\phi) p_s$ – общее давление, $p_f = s_1 p_1 + s_2 p_2$, p_s – соответственно давления жидкой и твердой фаз, $\rho_{tot} = (1-\phi)\rho_3^0 + \phi(s_1 \rho_1^0 + s_2 \rho_2^0)$ – общая плотность; $\xi(\phi)$ и $\beta_t(\phi)$ – коэффициенты объемной вязкости и объемной сжимаемости горной породы.

Система (1)–(6) записана в эйлеровых координатах $\vec{x} \in R^3$, $t \in [0,T]$. Истинные плотности ρ_i^0 принимаются постоянными. Поскольку $s_2 = 1 - s_1$, то неизвестными являются 14 скалярных величин: s_1, ϕ, p_1, p_2, p_s, $3\vec{u}_1$, $3\vec{u}_2$, $3\vec{u}_3$. Для их определения служат также 14 скалярных уравнений.

Результаты о разрешимости начально-краевых задач для однофазного течения изложены в [6, 7]. Двухфазные модели обоснованы в [8, 9, 10, 11]. Близкие по структуре задачи изучались в [12].

В одномерном случае (g = (-g, 0, 0)) система (1)–(6) может быть приведена к виду [5]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\phi}{1-\phi}s)-\frac{\partial}{\partial x}((1-\phi)K_0a(s)\frac{\partial s}{\partial x}+(1-\phi)K_1\frac{\partial p}{\partial x}+f_0)=0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\phi}{1-\phi})-\frac{\partial}{\partial x}(K(1-\phi)\frac{\partial p}{\partial x}+f)=0, \tag{8}$$

$$\frac{1}{(1-\phi)}\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t}=a_1(\phi)p_e+a_2(\phi)\frac{\partial p_e}{\partial t}, \tag{9}$$

$$(1-\phi)\frac{\partial p_{tot}}{\partial x}=-\rho_{tot}g. \tag{10}$$

Здесь (x,t) – переменные Лагранжа, s = s_1, $p=p_1-\int\limits_s^1\frac{k_{02}}{k}\frac{\partial p_c}{\partial\xi}d\xi$, $f=-K_0g(k_{01}\rho_1^0+k_{02}\rho_2^0)$, $K_1=K_0k_{01}$, $f_0=-K_1\rho_1^0g$, $K=K_0k$, $k=k_{01}+k_{02}$.

Для системы (7)–(10) рассматривается автомодельное решение типа «бегущей волны». Предполагая все искомые функции зависящими только от переменной $\xi=x-ct$ (c – постоянный параметр), приходим к следующей системе уравнений ($g=0$, $p_c=0$) [13]:

$$-c\frac{d}{d\xi}(\frac{\phi}{1-\phi}s)+\frac{d}{d\xi}((1-\phi)K_1\frac{dp}{d\xi})=0, \tag{11}$$

$$c\frac{d}{d\xi}(\frac{\phi}{1-\phi})+\frac{d}{d\xi}(K(1-\phi)\frac{dp}{d\xi})=0, \tag{12}$$

$$-\frac{c}{1-\phi}\frac{d}{d\xi}(1-\phi)=a_1(\phi)p_e-ca_2(\phi)\frac{dp_e}{d\xi}, \tag{13}$$

$$p_{tot}=p^0=Const, p_f=p, p_e=p^0-p, \xi\in(-\infty;0). \tag{14}$$

Граничные условия:

$$\phi|_{\xi\to-\infty}=\phi^-,\ s|_{\xi\to-\infty}=s^-,\ \frac{dp}{d\xi}|_{\xi\to-\infty}=0,$$

$$\phi|_{\xi=0}=\phi^+,\ s|_{\xi=0}=s^+,\ \frac{dp}{d\xi}|_{\xi=0}=V^+. \tag{15}$$

Проинтегрировав (11), (12) получим

$$\begin{aligned}&\frac{c\phi s}{1-\phi}+K_1(1-\phi)\frac{dp}{d\xi}=A_1,\\&\frac{c\phi}{1-\phi}+K(1-\phi)\frac{dp}{d\xi}=A_2,\end{aligned} \tag{16}$$

Из (15) следует

$$\begin{aligned}&A_1=\frac{c\phi^-s^-}{1-\phi^-}=\frac{c\phi^+s^+}{1-\phi^+}+(1-\phi^+)K_1^+V^+,\\&A_2=\frac{c\phi^-}{1-\phi^-}=\frac{c\phi^+}{1-\phi^+}+(1-\phi^+)K_1^+V^+.\end{aligned} \tag{17}$$

Предполагается, что параметры ϕ^-, ϕ^+, s^+, V^+ заданы, а c и s^- должны определяться из (17). В частности при выполнении условий $1>\phi^+>\phi^->0$,$V^+>0$ имеем

$$c=-\frac{(1-\phi^+)K_1^+V^+}{\phi^+-\phi^-}<0,$$

$$s^-=\frac{1-\phi^-}{\phi^-}(\frac{\phi^+s^+}{1-\phi^+}-\frac{K_1^+}{K^+}(\phi^+-\phi^-)).$$

Исключая в (16) давление приходим к соотношению

$$\frac{s\phi}{1-\phi}-\frac{s\phi^-}{1-\phi^-}=\frac{k_{01}}{k}\left(\frac{\phi}{1-\phi}-\frac{\phi^-}{1-\phi^-}\right), \tag{18}$$

в котором $k_{01}=\overline{k_{01}}s^{n_1}$, при $s\in[0;1]$, $n_1>1$, $k_{01}=0$ при $s<0$ и $k_{01}=\overline{k_{01}}=Const$ при $s>1$. Эти свойства k_{01} и представления (18) гарантируют неотрицательность функции $s(\xi)$ при $\phi\in(0;1)$, $s^->0$ (доказательство от противного). Рассмотрим случай преобладания упругих свойств пористой среды. Пусть в (13) $a_1=0$, $a_2=\beta\phi$ и дополнительно $K_0(\phi)=\gamma\frac{\phi}{(1-\phi)^2}$, $\beta=Const>0$, $\gamma=Const>0$. Из (13) выводим что

$$\frac{d}{d\xi}ln\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right)=-\beta\frac{dp_e}{d\xi}=\beta\frac{dp}{d\xi}, \tag{19}$$

а из (16) имеем

$$\frac{dp}{d\xi}=\frac{|c|}{\gamma k(s)}\frac{1-\phi}{\phi}\left(\frac{\phi}{1-\phi}-\frac{\phi^-}{1-\phi^-}\right).$$

С учетом (19) приходим к уравнению

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right)=\frac{\beta|c|}{\gamma k(s)}\left(\frac{\phi}{1-\phi}-\frac{\phi^-}{1-\phi^-}\right). \tag{20}$$

Решение последнего можно получить в квадратурах. Таким образом решение задачи (11)–(15) дается соотношениями (18), (20).

Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Министерства №01201460959 и гранта РФФИ №13-08-01097.

Библиографический список

1. Коллинз Р. Течение жидкостей через пористые материалы. – М., 1964. – 350 с.

2. Muskat M. The flow of homogeneous fluids through porous media Edwards. Ann Arbor. – 1937. – 782 p.

3. Fowler A. Mathematical geoscience. Springer Verlag London Limited. – 2011. – 904 p.

4. Connolly J.A.D., Podladchikov Y.Y. Temperature-dependent viscoelastic compaction and compartmentalization in sedimentary basins // Tectonophysics. – 2000. – Vol. 324. – P. 137–168.

5. Папин А.А., Подладчиков Ю.Ю. Изотермическое движение двух несмешивающихся жидкостей в пороупругой среде // Известия АлтГУ. – 2015. – Вып. 1/2. – С. 131–135.

6. Папин А А., Токарева М. А. Задача о движении сжимаемой жидкости в деформируемой пористой среде // Известия АлтГУ. – 2011. – Вып. 1/2 (72). – С. 36–43.

7. Ахмерова И Г., Папин А.А., Токарева М А. Математические модели механики неоднородных сред: учебное пособие. –Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2012. – 128 с.

8. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск : Наука, 1983. –315 с.

9. Rudyak V.Ya., Bocharov O.B., Seryakov A.V. Hierarchical sequence of models and deformation peculiarities of porous media saturated with fluids Proceedings of the XLI Summer School-Conference Advanced Problems in Mechanics (APM-2013), July 1-6, St-Petersburg, 2013, pp. 183–190.

10. Антонцев С.Н., Папин А. А. О глобальной гладкости решений уравнений двухфазной фильтрации // Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1978. – Вып. 35. – С. 3–28.

11. Бочаров О.Б., Рудяк В.Я., Серяков А.В. Простейшие модели деформирования пороупругой среды, насыщенной флюидами // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2014, №2. – С. 54–68.

12. Ведерников В.В., Николаевский В.Н. Уравнение механики пористых сред, насыщенных двухфазной жидкостью // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1978. – №5.

УДК 519.6

К методам численного расчета течений стратифицированной жидкости

С.С. Кузиков

АлтГУ, г. Барнаул

Исследование течений неоднородной жидкости представляет интерес как в теоретическом отношении, так и для решений многих практических задач гидроэнергетики, гидрологии, метеорологии и т.д. Наличие вертикального градиента плотности может существенно повлиять на характер течения