

$$\frac{dm}{d\xi} = F(m),$$

решение которого находится в квадратурах. Таким образом, имея представление для  $m(\xi)$ , из (16) находим  $s(\xi)$ . Далее подставляя  $m(\xi)$  и  $s(\xi)$  в представления для истинных скоростей воды, воздуха и твердой матрицы находим  $c$  и, следовательно, решение задачи (8)-(13). Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №16-08-00291.

#### Библиографический список

1. Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А. Механика насыщенных пористых сред. – М.: Изд-во Недраб., 1970.
2. Ведерников В.В., Николаевский В.Н. Уравнения механики пористых сред, насыщенных двухфазной жидкостью // Изв. АН СССР. – Механика жидкости и газа. – 1978. – Т. 5.
3. Папин А.А., Сибин А.Н., Хворых Д.П. Об одной задаче фильтрации в условиях вечной мерзлоты // МАК-2013: сборник трудов шестнадцатой региональной конференции по математике. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2013. – С. 45–48.
4. Папин А.А., Токарева М.А., Шишмарев К.А. Математические вопросы динамики ледового покрова // Вестник алтайской науки. – 2015. – №1 (23). – С. 161–171.
5. Коробкин А.А., Папин А.А., Шишмарев К.А. Поведение ледового покрова канала под действием поверхностных волн // Известия АлтГУ. – 2012. – №1/1. – С. 55–59.

УДК 536.25

### Численное моделирование течений жидкости со свободной границей и динамическим контактным углом

*Ю.С. Бунтовых<sup>1</sup>, А.В. Закурдаева<sup>1,2</sup>, К.В. Лушева<sup>1</sup>, О.Н. Гончарова<sup>1,2</sup>*  
<sup>1</sup>АлтГУ, г. Барнаул; <sup>2</sup>ИТ СО РАН, г. Новосибирск

Задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости в областях с твердыми и границами и границами раздела являются чрезвычайно актуальными в настоящее время ввиду различных важных приложений. Такие задачи связаны с изучением конвективных многофазных течений, течений через пористую среду, испарением капли и стеканием пленки, находящейся на твердой, часто нагреваемой подложке [1]. Нестационарные задачи гидродинамики в областях со свободными границами продолжают оставаться очень сложными с математической точки зрения ввиду проблемы динамического контактного угла. Проблема динамического контактного угла возникает вследствие несовместимости условий на свободной поверхности жидкости и условий прилипания на твердой стенке в окрестности движущейся линии контакта трех фаз. Известны различные способы замыкания постановки задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости при наличии движущейся линии контакта (или точек контакта в двумерном случае). Данные способы включают замену условий прилипания условиями проскальзывания на некотором участке твердой стенки вблизи линии контакта, асимптотический подход, предположения о равенстве угла контакта  $\pi$  или нулю и другие подходы (см., например, [2, 3]). Для некоторых математических моделей, описывающих течения жидкостей с динамическим контактным углом, доказана корректность постановок начально-краевых задач. Разрешимость изучаемой задачи с неизвестной границей и динамическим контактным углом доказана в работе [4]. При этом на твердых стенках области течения условие прилипания заменено условием пропорциональности касательного напряжения разности касательных скоростей жидкости и стенки.

Рассматривается задача о течении жидкости в двумерном случае при условии движущейся с постоянной скоростью точки контакта [4–6]. При этом декартова система координат выбрана таким образом, что вектор ускорения силы тяжести  $\beta$  направлен вдоль продольной оси (здесь  $Ox$ , см. рисунок 1, рисунок 2). Течение вязкой несжимаемой жидкости со свободной границей исследуется численно на основе математической модели, которая включает уравнения Навье-Стокса, кинематическое и динамическое условия на свободной границе и условия проскальзывания на твердых границах. Построены численные алгоритмы с использованием конечно-разностных схем второго порядка аппроксимации по пространству и времени. Численные эксперименты проведены для жидкостей типа воды, этанола, HFE7100 в условиях нормальной и пониженной гравитации при различных значениях статического контактного угла  $\Phi_0$ , коэффициентов трения  $\gamma$ ,  $\gamma_0$  и поверхностного натяжения (см. рисунок 3). Численно исследуется зависимость динамического контактного угла  $\Phi$  от скорости движения точки

контакта  $S$ . Определяется влияние интенсивности гравитационного поля  $\beta$  на характер названной зависимости.

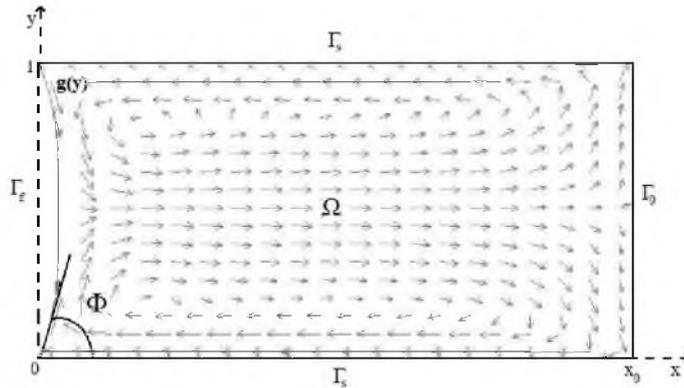


Рисунок 1 – Поле скоростей

Область течения  $\Omega$  жидкости при наличии динамического контактного угла  $\Phi$ . Топология течения; результаты расчета течения жидкости (этанол) в случае  $\Phi_0 = 63$  (статический контактный угол);  $S = 3$  см/с (скорость движения точки контакта);  $\gamma_0 = \gamma = 100$  г/(см<sup>2</sup>с) (коэффициенты трения типа «жидкость – твердая стенка»); условия нормальной гравитации ( $\beta = 981$  см/с<sup>2</sup>).

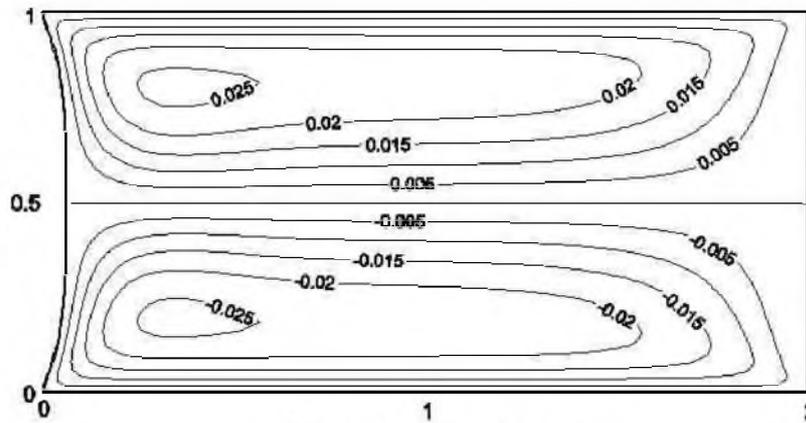


Рисунок 2 – Линии тока

Область течения  $\Omega$  жидкости при наличии динамического контактного угла  $\Phi$ . Топология течения; результаты расчета течения жидкости (этанол) в случае  $\Phi_0 = 63$  (статический контактный угол);  $S = 3$  см/с (скорость движения точки контакта);  $\gamma_0 = \gamma = 100$  г/(см<sup>2</sup>с) (коэффициенты трения типа «жидкость – твердая стенка»); условия нормальной гравитации ( $\beta = 981$  см/с<sup>2</sup>).

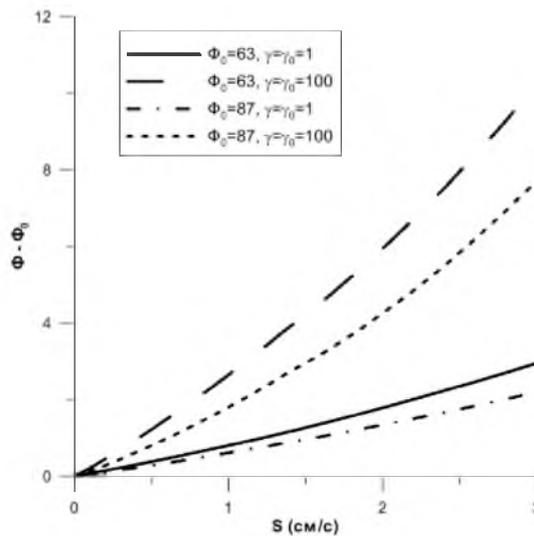


Рисунок 3 – Отклонение динамического угла  $\Phi$  от статического  $\Phi_0$

Этанол; условия нормальной гравитации ( $\beta = 981$  см/с<sup>2</sup>); различные значения статического угла ( $\Phi_0=63$  и  $\Phi_0=87$ ) и коэффициентов трения ( $\gamma = \gamma_0 = 1$  г/(см<sup>2</sup>с) и  $\gamma = \gamma_0 = 100$  г/(см<sup>2</sup>с)).

Указанная зависимость динамического контактного угла от скорости движения точки контакта характеризуется увеличением значения динамического контактного угла при увеличении скорости движения точки контакта.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-19-20049).

#### Библиографический список

1. Gatarova E.Ya., Semenov A.A., Zaitsev D.V., Kabov O.A. Evaporation of a sessile water drop on a heated surface with controlled wettability // *Colloids and surfaces A. Physicochem. Eng. Aspects.* – 2014. – № 441. – P. 776–785.
2. Ajaev V.S., Homsy G.M. Modeling shapes and dynamics of confined bubbles // *Annu. Rev. Fluid Mech.* – 2006. – № 38. – P. 277–307.
3. Baiocchi C., Pukhnachov V.V. Problems with one-sided constraints for Navier-Stokes equations and the dynamic contact angle // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* – 1990. – № 31. – P. 185–196.
4. Kroener D. Asymptotische Entwicklungen fuer Stroemungen von Fluessigkeiten mit freiem Rand und dynamischem Kontaktwinkel // *Preprint / Univ. Bonn.* – 1986. – № 809.
5. Doerfler W., Goncharova O., Kroener D. Fluid flow with dynamic contact angle: numerical simulation // *ZAMM.* – 2002. – № 82(3). – P. 167–176.
6. Goncharova O.N., Zakurdaeva A.V. Numerical investigation of a dependence of the dynamic contact angle on the contact point velocity in a problem of the convective fluid flow // *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics.* – 2016 (accepted for publication).

УКД 532.135

### К вопросу оценки числа релаксационных процессов при моделировании соотношений линейной вязкоупругости текучих полимерных сред

*Е.М. Гельфанд, О.А. Кондратьева, Н.А. Черпакова*  
*АлтГТУ, г. Барнаул*

Необходимость учета множественных релаксационных процессов при описании динамики растворов и расплавов полимеров является одной из актуальных проблем в реологии. Решение этой задачи для подавляющего большинства реологических моделей находят, создавая их многомодальные приближения [1–5].

Часто при этом удается разделить параметры модели, отвечающие за области линейной и нелинейной вязкоупругости. Соотношения нелинейной вязкоупругости определяют специфику реологических моделей и здесь не рассматриваются. В то же время соотношения линейной вязкоупругости, полученные в области малых градиентов скорости, приводят к одинаковым выражениям и оценка параметров реологических моделей, которых может быть достаточно много, в этом случае представляет научный интерес.

Одной из важных характеристик линейной вязкоупругости являются компоненты динамического модуля: модуль сдвига и модуль потерь, зависимости которых от частоты выглядят так:

$$G'(\omega) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\omega^2 \tau_{\alpha} \eta_{\alpha}}{1 + (\omega \tau_{\alpha})^2}; G''(\omega) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{\omega \eta_{\alpha}}{1 + (\omega \tau_{\alpha})^2}.$$

Здесь  $\omega$  – частота,  $\tau_{\alpha}$  – набор времен релаксации,  $\eta_{\alpha}$  – набор сдвиговых вязкостей;  $\alpha=1,2,\dots,n$ ;  $n$  – число учитываемых релаксационных процессов.

В этом случае может быть поставлена следующая задача: подобрать значения  $\tau_{\alpha}$  и  $\eta_{\alpha}$ , так чтобы минимизировать отклонение расчетных величин от экспериментальных данных. Решение этой задачи содержит несколько этапов:

Зафиксируем набор  $\tau_{\alpha}$ .

1. Подберем  $\eta_{\alpha}^1$  – минимизируя зависимость  $G'$  от частоты  $\omega$ .

2. Подберем  $\eta_{\alpha}^2$  – минимизируя отклонения зависимости  $G''$  от частоты  $\omega$ .

3. В качестве искомого зависимости вязкости возьмем  $\eta_{\alpha} = (\eta_{\alpha}^1 + \eta_{\alpha}^2)/2$ .

Эти этапы можно легко реализовать в одной из вычислительных сред, например, в Excel или MATLAB.

Не останавливаясь на деталях вычислений, посмотрим, как влияет  $n$ -число мод на точность построенных моделей. Это связано с тем, что в литературе часто рассматривается десяти- и более модовые приближения. Так как в дальнейшем полученные модели используются для описания более сложных течений, например, течений в сходящихся каналах, расчеты которых требуют существен-