

его варьировании в интервале 0.001 – 0.1, его влияние незначительно.

Изменение параметра анизотропии растяжения потока производит наибольшее воздействие на полуширину пленки (рис. 4). При этом меньшие значения этого параметра соответствуют большей ширине пленки.

### **Библиографический список**

1. Пышнограй Г.В., Покровский В.Н., Яновский Ю.Г. и др. Определяющее уравнение нелинейных вязкоупругих (полимерных) сред в нулевом приближении по параметрам молекулярной теории и следствия для сдвига и растяжения // Доклады АН. – 1994. – Т. 339, №5. – С. 612–615.
2. Pyshnograï G.V., Gusev A.S., Pokrovskii V.N. Constitutive equations for weakly entangled linear polymers // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. – 2009. – V. 163, №1-3. – P. 17–28.

**УДК 51-74**

## **Дискретная математическая модель здания для моделирования ударных нагрузок**

***С.Н. Шергин, В.В. Славский***  
*ЮГУ, г. Ханты-Мансийск*

В данной работе предложена дискретная математическая модель многоэтажного здания, в которой этажи рассматриваются в виде отдельных блоков взаимодействующих между собой вертикально и горизонтально по законам упругой механики с учетом возникновения сил трения. Для моделирования был использован математический пакет Mathematica.

Для наглядности рассмотрим 4-х этажное здание, на рисунке 1, показано возможное поведение блоков,  $m_i(x_i, y_i)$  – координаты центров тяжести блоков.

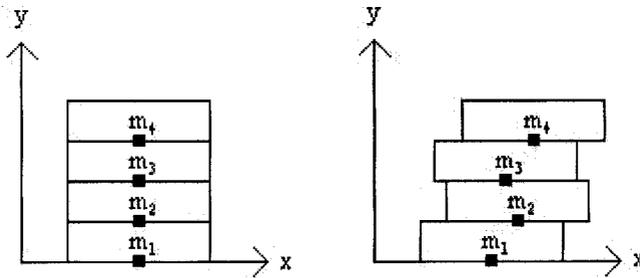


Рис. 1. Модель 4-х этажного дома

В состоянии без нагрузки положим:

$y_i = L_y(i-1)$ ,  $x_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  – количество этажей,  $n = 4$ , здесь  $L_y$  – межэтажное расстояние (без нагрузки). Пусть  $m$  – масса каждого блока;  $k_y, k_x$  – коэффициенты упругости взаимодействия блоков, возникающего по вертикали и горизонтали соответственно;  $k_{yt}, k_{xt}$  – коэффициенты сопротивления движению, возникающего по вертикали и горизонтали соответственно.

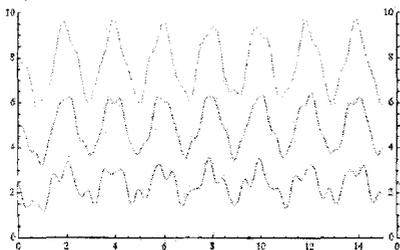
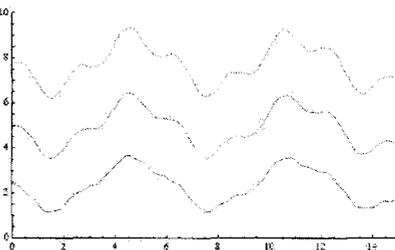
По закону Гука  $F_i$  – упругая сила натяжения между  $i$  и  $(i+1)$  блоком вычисляется по формуле:

$$F_i = \frac{y_{i+1} - y_i - L_y}{L_y} k.$$

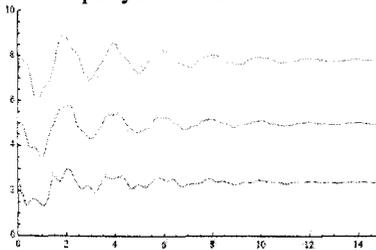
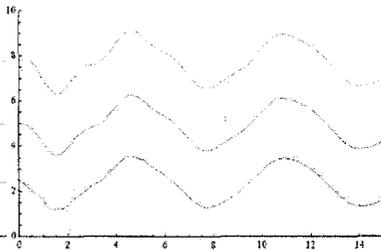
Сила тяжести действующая на  $i$ -й блок равна  $mg$ . Сила действующая на  $i$ -й блок со стороны  $(i+1)$ -ого и  $(i-1)$ -ого блоков равна:  $F_i - F_{i-1}$ . С учетом силы тяжести, для промежуточных этажей (со 2 до  $n-1$ ) и без учета трения, суммарная вертикальная сила действующая на  $i$ -й блок равна:  $F_i - F_{i-1} - mg$ . По закону Ньютона:  $m\ddot{y}_i = F_i - F_{i-1} - mg$ . Для верхнего этажа (так как сверху нет нагрузки) уравнение будет выглядеть:  $m\ddot{y}_n = -F_{n-1} - mg$ . В итоге получим систему из 3 уравнений на 3 неизвестных  $y_2, y_3, y_4$  (переменная  $y_1$  предполагается известной функцией определяющей ударную нагрузку на здание):

$$\begin{cases} m\ddot{y}_4 = -F_{y3} - mg, \\ m\ddot{y}_3 = F_{y3} - F_{y2} - mg, \\ m\ddot{y}_2 = F_{y2} - F_{y1} - mg. \end{cases}$$

С начальными условиями:  $y_i = y_i^0$ ,  $\dot{y}_i = \dot{y}_i^0$ . Начальным импульсом (толчком) выбираем  $y_1 = \exp(-t^2)$  или  $y_1 = \sin(t)$ . Графики поведения  $y_i$  ( $i = 2, 3, 4$ ), рассчитанные в Mathematica, на рисунках 2 и 3.

Рис. 2. При  $y_1 = \exp(-t^2)$ Рис. 3. При  $y_1 = \sin(t)$ 

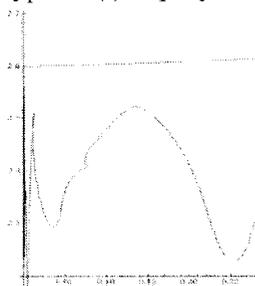
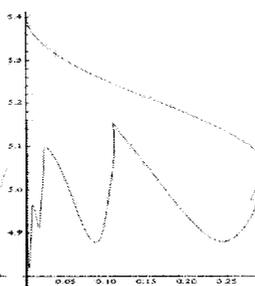
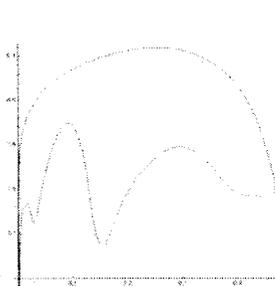
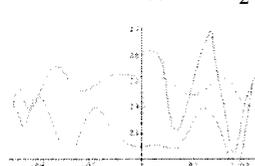
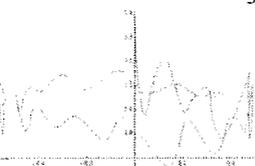
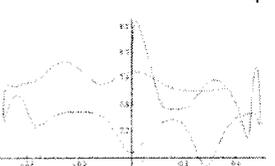
Введем силы сопротивления движения пропорциональные скорости. В таком случае силу действующую на  $i$ -й этаж будет находиться по формуле:  $F_{y_i} - F_{y_{(i-1)}} - mg - k_{yt}\dot{y}_i$ . Графики поведения  $y_i$  примут вид как на рисунках 4 и 5:

Рис. 4. При  $y_1 = \exp(-t^2)$ Рис. 5. При  $y_1 = \sin(t)$ 

На следующем этапе исследовались совместные вертикальные и горизонтальные колебаний блоков. Уравнения для горизонтальных колебаний имеют вид аналогичный вертикальным:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_4 = -F_{x3} - k_{xt}\dot{x}_4 |F_{y3}| \\ m\ddot{x}_3 = F_{x3} - F_{x2} - k_{xt}\dot{x}_3 |F_{y3} - F_{y2}| \\ m\ddot{x}_2 = F_{x2} - F_{x1} - k_{xt}\dot{x}_2 |F_{y2} - F_{y1}| \end{cases},$$

за исключением сил тяжести и присутствия, слагаемых вида  $k_{x1}\dot{x}_3 |F_{y3} - F_{y2}|$  отвечающих силам трения (сопротивления) и пропорциональным скоростям и абсолютным значениям  $|F_{y3} - F_{y2}|$  давления. Траектории точек  $m_i(x_i, y_i)$  для  $(i = 2, 3, 4)$  и ударных нагрузках на фундамент  $y_1 = \exp(-t^2)$  представлены на рисунках 6–8, и при  $y_1 = \sin(t)$  на рисунках 9–11.

Рис. 6. Поведение  $m_2$ Рис. 7. Поведение  $m_3$ Рис. 8. Поведение  $m_4$ Рис. 9. Поведение  $m_2$ Рис. 10. Поведение  $m_3$ Рис. 11. Поведение  $m_4$ 

В заключение отметим, что современные модели многоэтажных зданий [1] довольно сложные в построениях и расчетах, в тоже время дискретные математические модели часто позволяют достаточно адекватно описывать поведение сложных реальных явлений и в настоящий момент используются во многих исследованиях [2].

Работа выполнена при поддержке совета по грантам при Президенте РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ России (грант № 12-12-22000-а(р)), ФЦПК «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, тема: «Фундаментальные проблемы анализа и геометрии» (Соглашение №8206, номер заявки «2012-1.1-12-000-1003-014»), а также ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт №02.740.11.0457).

### Библиографический список

1. Нгуен Куок Донг. Динамический расчет многоэтажных зданий при землетрясении: дис. ... к-та техн. наук : 05.23.17. – СПб., 2010. – 144 с.
2. Колесников Г.Н. Дискретные модели механических и биомеханических систем с односторонними связями: дис. ... д-ра техн. наук 05.13.18. – Петрозаводск, 2004. – 267 с.

УДК 519.6

### Численное исследование температурных напряжений в плоской области с круглым отверстием

*А.В. Устюжанова, В.С. Литовченко*

*АлтГУ, г. Барнаул*

В данной работе поставлена задача о распределении температурных напряжений в плоской прямоугольной области с отверстием. Математическая модель включает уравнения равновесия, соотношения между напряжениями и деформациями, соотношения между перемещениями и деформациями, уравнение теплопроводности. Уравнения равновесия и соотношения между напряжениями и деформациями остаются такими же, как в изотермической теории упругости. Зависимости между напряжениями и деформациями представляют собой сумму двух частей, одна из них соответствует обычному закону Гука, а другая пропорционально повышению температуры [1].

В общем случае поле температур и поле деформаций в твердом теле являются взаимосвязанными. Но при обычной теплопередаче, обусловленной воздействием окружающей среды и внутренних источников, влиянием деформации тела на распределение в нем температуры можно пренебречь. Поэтому изучение температурного поля можно проводить независимо от деформированного состояния тела.

Для численного решения задачи о распределении температуры применяется алгоритм, построенный на основе метода конечных элементов [2]. Исследуемая прямоугольная область разбивается на треугольные элементы. Если область содержит отверстие, то полученная сетка корректируется, а элементы, которые оказываются расположенными внутри отверстия, считаются «выброшенными», и при составлении матрицы жесткости они не учитываются. Численные расчеты проведены как для стационарного, так и нестационарного уравнений теп-