Секция 2. ГЕОМЕТРИЯ И АНАЛИЗ

УДК 514.7

Минимальные сети Штейнера для тетраэдра и параллелепипеда

К.О. Кизбикенов
АлтГПА, г. Барнаул

Известна проблема Штейнера [1], которая звучит так: даны n точек $n \geq 3$ построить связное дерево с вершинами в этих точках минимальной длины. Эффективных алгоритмов решения этой задачи не известно.

В этой работе приводится решение этой задачи для четырех точек в пространстве, которые находятся в общем положении (являются вершинами тетраэдра).

Пусть $ABCD$ произвольный тетраэдр в пространстве. Выберем пару противоположных ребер, например, AB и CD. На ребре AB как на стороне построим равносторонний треугольник ABF. Вершина F таких треугольников опишет окружность с центром на стороне AB и радиуса $AB\sqrt{3/2}$. Эта окружность лежит в плоскости перпендикулярной AB и проходящей через ее середину. Точно также на ребре CD как на стороне построим равносторонний треугольник CDG. Вершины G тоже опишут аналогичную окружность. Будем искать точки F и G на этих окружностях, так, чтобы выполнялись следующие условия.

1. Точки F и G должны быть максимально удалены друг от друга.
2. Отрезок FG должен пересекать отрезки AB и CD.
3. Допустим, что такие точки существуют, тогда описываем окружность около треугольника ABF. Эта окружность пресечет отрезок FG в некоторой точку M, а окружность, описанная около треугольника CDG, пересечет этот отрезок в точке N. Причем точки F, M, N, G должны быть расположены в данном порядке на отрезке FG. Тогда отрезки AM, MB, MN, NC и ND образуют искомую сеть Штейнера (рис. 1). Если не удается построить точки M и N удовлетворяющие вышеприведенным условиям, то для данной пары ребер нет сети Штейнера и нужно выбирать другую пару противоположных ребер и повторить процедуру с начала.

В случае, когда ни для одной пары ребер не удается построить сеть Штейнера, тогда искомая кратчайшая сеть состоит из ребер, это так называемый евклидов минимальный остов (ЕМОД) [1].

Написана программа на Mathematica, которая строит сеть Штейнера для тетраэдра и прямоугольного параллелепипеда (рис. 1, 2).

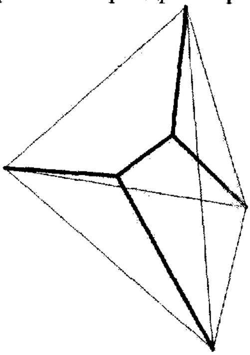

Рис. 1. Сеть Штейнера для тетраэдра

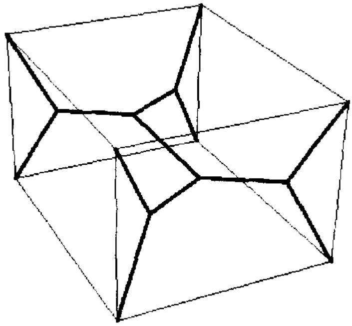

Рис. 2. Сеть Штейнера для параллелепипеда

Пусть $a \geq b \geq c$ измерения параллелепипеда. Тогда длина минимального остовного дерева будет равна $a+2b+4c$. А длина сети Штейнера $a+\sqrt{3}(b+2c)$. При этом $a+2b+4c > a+\sqrt{3}(b+2c)$.

Библиографический список

1. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия: введение. – М.: Мир, 1989. – 478 с.

УДК 514.765

О спектре оператора кривизны трехмерных локально однородных римановых многообразий

Д.Н. Оскорбин
АлтГУ, г. Барнаул

Исследован спектр оператора секционной кривизны трехмерных локально однородных римановых многообразий. При помощи теоремы Секигавы [1] о классификации трехмерных локально однородных римановых многообразий получен результат, обобщающий условия существования трехмерной группы Ли с левоинвариантной римановой метри-