$W(t, x_1, \dots, x_n)$ такая, что $\frac{dW(t, x_1, \dots, x_n)}{dt} < 0$ при $t = t_0$, то нулевое решение т-устойчиво на конечном промежутке для t_0 по отношению к $V(t, x_1, \dots, x_n)$.

Динамика сферического слоя жидкости: методы численного исследования

Резанова Е.В.

Алтайский государственный университет

Изучается задача о динамике сферической жидкой оболочки, включающей в себя газовый пузырек. Полагается, что жидкость с растворенным в ней газом есть несжимаемая вязкая жидкость. Математическая модель динамики жидкого слоя и процесса диффузии газа в нем включает систему уравнений Навье-Стокса, уравнение диффузии, кинематические и динамические условия на свободных границах и закон Генри. Движение возникает из заданного начального состояния. Внутри пузырька считается выполненным уравнение Менделеева-Клапейрона, масса газа определяется диффузионным потоком через границу. Коэффициенты переноса, поверхностного натяжения и множитель в законе Генри зависят от температуры. При этом полагается, что температура всей системы определяется температурой внешней среды, зависящей только от времени.

При решении задачи, ограничившись рассмотрением сферически симметричного процесса, требуется найти функций $R_1(t)$ и $R_2(t)$ (внутренняя и внешняя границы сферического слоя), $V(t)$ (составляющая радиальной скорости v, $v=r^{-2}*V(t)$), $C(t,r)$ (концентрации газа как пассивной примеси). Начально-краевая задача в безразмерных переменных имеет следующий вид:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2}V^2\left(R_2^2 + R_1^2\right)\left(R_2 + R_1\right)R_2^{-3}R_1^{-3} + \rho^{-1}\,\mathrm{Re}^{-1}\cdot$$

$$\cdot\left[P_g' - P_{vn}' - 2\overline{Si}\,\sigma(T)\left(R_2 + R_1\right)R_2^{-1}R_1^{-1}\right]\cdot R_2R_1\left(R_2 - R_1\right)^{-1} -$$

$$-4\,\mathrm{Re}^{-1}\,\nu(T)V\left(R_2^2 + R_2R_1 + R_1^2\right)R_2^{-2}R_1^{-2}, \quad t > 0; \quad V(0) = V_0;$$

$$\frac{dR_1}{dt} = VR_1^{-2},\; R_2(t) = \left(R_{20}^3 - R_{10}^3 + R_1^3(t)\right)^{1/3},\; t > 0;\; R_1(0) = R_{10},\, R_2(0) = R_{20};$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(r^2C\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(Pe_d^{-1}r^2D(T)\frac{\partial C}{\partial r} - VC\right), \quad t > 0, \quad R_1 < r < R_2;$$

$$C(0,r)=C_0(r),\quad C|_{r=R_1}=\tilde{A}(T)\cdot P_g^n,\quad C|_{r=R_2}=\tilde{A}(T)\cdot P_{vn}^n$$

$$\frac{d\rho_g}{dt}=-3R_1^{-1}\rho_g\frac{dR1}{dt}+3R_1^{-1}D(T)Pe_d^{-1}\frac{\partial C}{\partial r}\Big|_{r=R_1},\quad t>0;\quad \rho_g(0)=\rho_{g0},$$

Здесь ρ и ρ_g плотности жидкости и газа, T – температура, P_g и P_{vn} – давление в газе и внешнее давление, ν, D, σ коэффициенты кинематической вязкости, диффузии и поверхностного натяжения соответственно, $\tilde{A}$ – коэффициент в законе Генри.

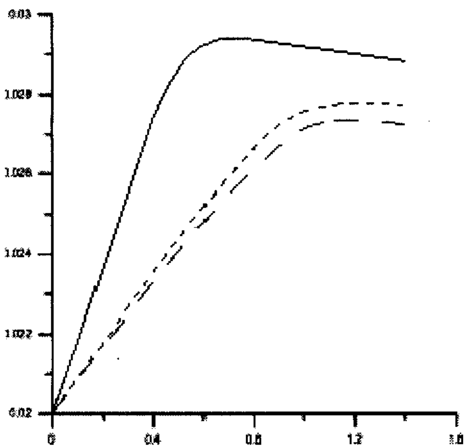

Рис. Графики зависимости внутреннего радиуса оболочки от времени при различных входных данных

Для приближенного решения задачи используется численный алгоритм, построенный на основе метода Рунге-Кутта для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения функций V(t), $R_1(t)$ и ρ_g (t) (R2(t) находится из условий сохранения объема) и неявной конечно-разностной схемы второго порядка аппроксимации для решения уравнения диффузии. Исследована зависимость динамики оболочки и процесса диффузии в ней от: внешнего давления, температуры внешней атмосферы и количества газа в пузырьке. На рисунке приведены графики внутреннего радиуса оболочки при изменении начальной плотности газа в пузырьке и внешнего давления: P_{vn}=0,03атм, $\rho_{g0}=0{,}92*10^{-3}$г/см^3; P_{vn}=0,03атм, $\rho_{g0}=0{,}47*10^{-3}$г/см^3; P_{vn}=0,1атм, $\rho_{g0}=0{,}92*10^{-3}$г/см^3 (сверху вниз).

Работа выполнена в рамках проекта № 7.3975.2011 Алтайского государственного университета (поддержан Министерством образования и науки РФ), гранта РФФИ (проект 10-01-00007) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (государственный контракт 14.740.11.0355).

Библиографический список

1. Гончарова О.Н. Диффузионное приближение в задаче формирования сферических микробаллонов в условиях кратковременной невесо-

мости // Моделирование в механике / АН СССР Сиб. отд-ние. Ин-т теоретической и прикладной механики. – Новосибирк, 1990. – Т. 4 (21), №5. – С. 83–95.

Модель Бахвалова–Эглит динамики неизэнтропического баротропного вязкого газа

С.А. Саженков
Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск

Рассматривается одномерная модель динамики вязкого баротропного газа в неизэнтропическом случае с быстро осциллирующими начальными распределениями удельного объема, заданная в массовых лагранжевых координатах. Строго обоснована процедура гомогенизации при стремлении частот быстрых осцилляций к бесконечности. Как результат, получена предельная эффективная модель динамики сжимаемого вязкого газа с быстро осциллирующими начальными данными. Эта модель содержит дополнительную искомую функцию, называемую функцией распределений, и замыкается добавлением к усредненным уравнениям баланса массы, количества движения и внутренней энергии, усредненному закону напряженного состояния и усредненному кинематическому уравнению движения частиц дополнительного кинетического уравнения, содержащего полную информацию об эволюции предельных режимов осцилляций.

Существенным местом в работе является то, что от структуры сплошной среды — неизэнтропического вязкого баротропного газа — не требуется никаких свойств упорядоченности, например, периодичности, квазипериодичности, случайной однородности. Показано, что если начальные данные осциллируют периодически, то полученная предельная модель сводится к системе усредненных уравнений Бахвалова — Эглит [1].

Доказательства в работе основаны на результатах А.А. Амосова и А. А. Злотника о корректности начально-краевых задач для уравнений неизэнтропического баротропного вязкого газа и на использовании аппарата теории мер Янга. Настоящая работа является продолжением ранее проведенного исследования для системы уравнений изэнтропического баротропного вязкого газа [2].