3. Оловянный А.Г. Механика горных пород. Моделирование разрушений. – СПб. : ООО «Издательско-полиграфическая компания «КОСТА», 2012.

4. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975.

5. Фадеев А.Б. Метод конечных элементов в геомеханике. – М. : Недра, 1987.

6. Устюжанова А.В. Применение метода конечных элементов к задаче об упругой области с отверстиями // МАК–2010: материалы тринадцатой региональной конференции по математике (июнь 2010). – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2010. – С. 53–54.

7. Устюжанова А.В. Численное исследование напряженно-деформированного состояния вблизи систем круговых отверстий в упругой среде // Ломоносовские чтения на Алтае: сборник научных статей международной школы-семинара, Барнаул, 8–11 ноября, 2011 г. Ч.1. – Барнаул: АлтГПА, 2011. – С. 263–266.

УДК 517.95 + 532.582

Влияние гидростатического и гидродинамического давлений на колебания ледового покрова

К.А. Шишмарев, Т.И. Хабахпашева, А.А. Коробкин

АлтГУ г. Барнаул, ИГиЛ СО РАН г. Новосибирск, Университет Восточной Англии

Задачи о колебаниях ледового покрова под действием изгибно-гравитационных волн являются хорошо изученными (см., например, [1-6]). Большой обзор, посвященный колебаниям бесконечной плавающей ледовой пластины, приведен в работе [7]. Также важными прикладными задачами являются задачи взаимодействия полубесконечного ледового покрова и вертикальных конструкций [8], когда лед крепится к одной вертикальной стенке. Данные задачи исследуются в рамках линейной теории гидроупругих волн. Жидкость предполагается идеальной и несжимаемой. Движение жидкости является потенциальным и вызвано отклонением ледового покрова от состояния покоя. Рассматривается ледовый покров постоянной толщины. Глубина ледового покрова может быть как конечной, так и бесконечной.

Скопление льда может вызвать наводнение в северных реках в период ранней весны. Для разрушения льда может использоваться судно на воздушной подушке, которое движется вдоль замороженной части реки на определенной скорости и создает напряженно-деформированное состояние ледового покрова. Вызванные напряжения могут быть достаточными для ломки льда (см., например, [1, 5, 6]). Судно моделируется точкой давления или локализованным гладким распределением внешнего давления, движущимся с постоянной скоростью вдоль ледового покрова.

Целью данного исследования является изучение влияния гидростатического и гидродинамического давлений на колебания ледового покрова в канале под действием движущейся нагрузки. Задача исследуется с учетом гладкой локализованной нагрузки, движущейся между двумя вертикальными стенками по ледовому покрову, прикрепленному к стенкам. Практический интерес исследования заключается в ответе на вопрос – может ли движущаяся нагрузка сломать лед, в частности, вблизи стенок канала.

Задача решается численно в рамках модели вязкоупругого плавучего льда. Гидроупругие волны, вызванные движением нагрузки, затухают на определенном расстоянии от нагрузки. Таким образом, ледовой покров находится в состоянии покоя вдали от движущейся нагрузки. Модель вязкоупругого льда более приближена к реальности, чем модель упругой ледовой пластины, т. к. в вязкоупругой модели учитывается затухание возмущенных колебаний. Основное внимание уделяется прогибам ледового покрова и изгибающим напряжениям, в частности, на стенках канала. Задача решалась для трех случаев: случай «сухой» пластины, когда давление жидкости отсутствует; случай, учитывающий только гидростатичское давление жидкости; случай, учитывающий гидростатическое и гидродинамическое давления жидкости. Прогибы льда и изгибающие напряжения исследуются при заданных физических характеристиках ледового покрова.

Следует отметить, что задача о прогрессивных волнах в канале была изучена в рамках модели упругой ледовой пластины, без учета вязкоупругих эффектов [2, 3, 5, 6].

На практике, при решении различных прикладных задач, ледовой покров, чистый от снега, встречается достаточно редко. В большинстве случаев лед покрыт снежным покровом. Снежный покров оказывает значительное влияние на прогиб ледового покрова. Поэтому, при проведении работ по разрушению льда, необходимо учитывать свойства и характеристики снежного покрова. Снег представляется как многофазная пористая среда, описываемая уравнениями сохранения массы для каждой из фаз (вода, воздух, лед) с учетом фазовых переходов, уравнениями двухфазной фильтрации и уравнением сохранения энергии для пористой среды (см., например, [9, 10]).

Рассматривается прогиб ледового покрова в трехмерном канале, вызванный движением внешней нагрузки по ледовому покрову. Канал имеет прямоугольное сечение с шириной $2L$, $(-L \le y \le L)$, и высотой $H, (-H \le z \le 0)$. По переменной x канал считается бесконечным ($-\infty < x < \infty$, x, y, z – декартовы координаты). Канал наполнен идеальной жидкостью с плотностью ρ. Жидкость покрыта ледовым покровом постоянной толщины h_i с изгибной жесткостью $D = Eh_i^3 / [12(1-\nu^2)]$, где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона для льда. Ледовый покров канала моделируется как тонкая вязкоупругая ледовая пластина, закрепленная на стенках канала $(y = -L, L)$. Внешняя нагрузка моделируется как пятно давления, движущееся по пластине в положительном направлении оси x с постоянной скоростью U. В результате нагрузки лед отклоняется от исходного состояния ($z = 0$) на величину $w(x, y, t)$.

Прогиб ледового покрова $w(x, y, t)$ описывается уравнением вязкоупругих колебаний ледовой пластины [1]

$$Mw_{tt} + D\left(1 + \tau\frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla^4 w = P(x, y, t) + p(x, y, 0, t)$$

$$(-\infty < x < \infty, -L < y < L, z = 0), \qquad (5)$$

где $\tau = \eta/E$ - время релаксации, η – вязкость, $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^4}$, $M = \rho_i h_i$ – масса льда на единицу площади, ρ_i - плотность льда, $p(x,y,0,t)$ – давление на поверхности жидкости, $P(x, y, t)$ – внешнее давление, создаваемое движением нагрузки, t - время.

Внешняя нагрузка моделируется как гладкая локализованная функция $P(x, y, t)$

$$P(x, y, t) = -P_0 P_1\left(\frac{x - Ut}{L}\right) P_2\left(\frac{y}{L}\right) \qquad (6)$$

$$(-\infty < x < \infty, - L < y < L).$$

Для определения гидродинамического давления на границе жидкость-лед используется линеаризованное уравнение Бернулли

$$p(x,y,0,t) = -\rho\varphi_t - \rho g w$$
$$(-\infty < x < \infty, -L < y < L), \qquad (7)$$

где $\varphi(x,y,z,t)$ – потенциал скорости течения жидкости, удовлетворяющий уравнению Лапласа, g – ускорение свободного падения.

Граничные условия для $\phi(x,y,z,t)$ имеют вид

$$\varphi_z = w_t \quad (z=0), \qquad (8)$$

$$\varphi_y = 0 \quad (y = \pm L), \quad \varphi_z = 0 \quad (z = -H). \qquad (9)$$

Ледовый покров приморожен к стенкам канала, следовательно для прогиба $w(x,y,t)$ выполнены граничные условия жесткого защемления

$$w = 0, \quad w_y = 0 \qquad (y = \pm L). \qquad (10)$$

Требуется определить прогибы $w(x,y)$ и напряжения в ледовой пластине, в том числе и вдоль стенок канала.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ «Взаимодействие ледового покрова с сооружениями при наличии неизвестных областей контакта», № 13-08-01097, и государственного задания Министерства №2014/2.

Библиографический список

1. Zhestkaya V. D. Numerical solution of the problem of an ice sheet under a moving load // Journal of Applid Mechanics and Technical Physics. – 1999. – V. 40(4): 770-775.

2. Коробкин А.А., Папин А.А., Шишмарев К.А. Поведение ледового покрова канала под действием поверхностных волн // Известия Алтайского государственного университета. – Барнаул, 2012. – Вып. 1/1 (73). С. 55-59.

3. Коробкин А.А., Папин А.А., Шишмарев К.А. Аналитическое и численное исследование квазиизотермической задачи взаимодействия ледового покрова канала и поверхностных волн // Известия Алтайского государственного университета. – Барнаул, 2012. Вып. 1/2 (73). – С. 23-27.

4. Шишмарев К.А. Математические вопросы моделирования взаимодействия ледового покрова и гидроупругих волн // Известия Алтайского государственного университета. – Барнаул, 2015. – Вып. 1/1 (85). – С. 126-132.