Авторы работы [2] выдвинули гипотезу о том, что оператор Риччи неунимодулярной разрешимой метрической алгебры Ли произвольной размерности имеет по крайней мере два отрицательных собственных значения. Настоящая работа посвящена частичному подтверждению этой гипотезы.

Основным результатом явились следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть s – неунимодулярная разрешимая алгебра Ли имеет производную алгебру n = [s, s], размерности ≤ 5. Тогда для произвольного скалярного произведения Q на s оператор Риччи метрической алгебры Ли (s, Q) имеет по крайней мере два отрицательных собственных значения.

Теорема 2. Пусть s – неунимодулярная разрешимая алгебра Ли размерности ≤ 6. Тогда для произвольного скалярного произведения Q на s оператор Риччи метрической алгебры Ли (s, Q) имеет по крайней мере два отрицательных собственных значения.

Кроме того, было обнаружено, что оператор Риччи многих неунимодулярных разрешимых метрических алгебр Ли, имеющих производную двухступенчатую нильпотентную алгебру, также имеет как минимум два отрицательных собственных значения. Это верно, например, если производная двухступенчатая нильпотентная алгебра имеет центр размерности 1 или является алгеброй Гейзенберга.

Библиографический список

1. Кремлев А.Г., Никоноров Ю.Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Унимодулярный случай // Математические труды. – 2008. – Т. 11, №2. – С. 155–147.

2. Кремлев А.Г., Никоноров Ю.Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай // Математические труды. – 2009. – Т. 12, № 1. – С. 40–116.

3. Milnor J. Curvature of left invariant metrics on Lie groups // Adv.\ Math. – 1976. – V. 21. – P. 293–329.

К геометрии циклид Дюпена

М.А. Чешкова

АлтГУ, г. Барнаул

Рассмотрим в евклидовом пространстве E^{n+1} циклиду Дюпена M [1, 2] – гиперповерхность, у которой главные кривизны k_i постоянные вдоль соответствующих им главных направлений X_i.

Известно, что у циклиды Дюпена в E^3 линии кривизны есть окружности, фокусы $f_i = r + 1/k_i n$ конгруэнции нормалей n, где r – радиус-вектор текущей точки поверхности, описывают фокальные кривые второго порядка, либо прямую и окружность [1, с. 382], а плоскости окружностей кривизны одного семейства проходят через фиксированную прямую, либо параллельны (теорема Маннгейма) [1].

В предлагаемой работе исследуется гиперповерхность M имеющая n различных, не равных нулю главных кривизн, причем линии кривизны образуют голономную сеть.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Если циклида Дюпена имеет голономную сеть линий кривизны, то линии кривизны S_i есть окружности.*

Обозначим через f_j^i линию, которую опишет фокус f_j вдоль i-той линии кривизны.

Теорема 2. *Если окружность S_i не есть нормальное сечение, то линии f_j^i, $j=1, ..., n$, $j \neq i$ – сечения конуса K_i с вершиной f_i, направляющей S_i.*

Если окружность S_i – нормальное сечение, то линии f_j^i, $j=1,...,n$, $j \neq i$ – прямые.

Теорема 3. *Директрисы конических сечений f_j^i, f_i^j, не являющихся окружностями и прямыми, ортогональны.*

Теорема 4. *Если конусы K_i, K_j принадлежат 3-пространству, то эксцентриситеты e_i^j, e_j^i конических сечений f_j^i, f_i^j, отличных от прямой и окружности, связаны соотношением $e_i^j e_j^i = 1$.*

Теорема 5. (Обобщенная теорема Маннгейма)

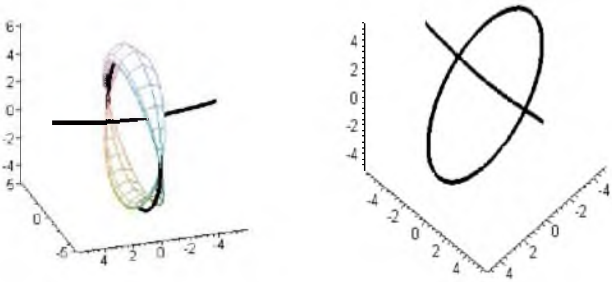
Если коническое сечение f_j^i – не окружность и не прямая, то плоскости окружностей S_i кривизны вдоль j-той линии кривизны образуют пучок, ось которого параллельна директрисе кривой f_j^i.

В качестве примера рассмотрим циклиды Дюпена в E^3.

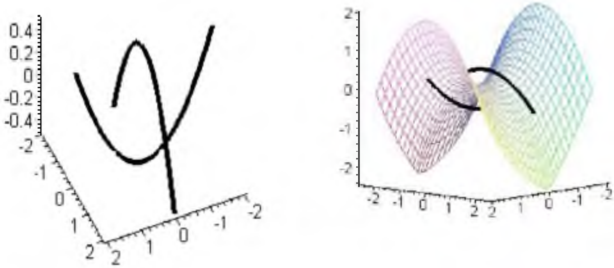
Если фокальные линии f_j^i есть окружность и прямая, то циклида Дюпена суть тор.

Остальные случаи приведены на графике.

Фокальные кривые f_i^j : эллипс и гипербола.



Фокальные кривые f_i^j : параболы.



Библиографический список

1. Шуликовский В.И. Классическая дифференциальная геометрия. –М., 1963. – 540 с.
2. Чешкова М.А. Дважды каналовые гиперповерхности в евклидовом пространстве // Математический сборник. – 2000. – Т.192, №6. – С. 155–160.

О конгруэнции гиперсфер, одна из огибающих гиперповерхностей которой вырождается в точку

М.А. Чешкова, Е.А. Петрова

АлтГУ, г. Барнаул

В пространстве E^{n+1} рассмотрим n-параметрическое семейство гиперсфер – *конгруэнцию гиперсфер* [1, с. 459]. Путь $M: r=r\left(u^1,\ldots,u^n\right)$ – гиперповерхность, описываемая центрами гиперсфер, $\rho = \rho\left(u^1,\ldots,u^n\right)$ – функция, определяющая радиусы гиперсфер.