том и только том случае, если в таблице 2 на пересечении строки, соответствующей алгебре Ли $\mathfrak{g}$, *и столбца, соответствующего сигнатуре s, находится знак «+».*

Таблица 2

	№ сигнатуры									
Алгебра Ли	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$su(2)$	–	–	+	–	+	+	–	+	+	+
$sl(2, \mathrm{R})$	–	–	+	–	+	+	–	–	–	–
e(2)	–	–	+	–	–	–	+	–	–	–
$e(1, 1)$	–	–	+	–	+	+	–	–	–	–
h	–	–	+	–	–	–	–	–	–	–
R^3	–	–	–	–	–	–	+	–	–	–

Теорема 2. *Пусть G – неунимодулярная трехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой,* $\mathfrak{g}$ *– алгебра Ли группы G. Тогда на* $\mathfrak{g}$ *реализуемы только сигнатуры 1, 2, 3, 5 и 6 из таблицы 1.*

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (№ 08-01-98001), Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых ученых и ведущих научных школ РФ (№ НШ-5682.2008.1), а также при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. (№ 02.740.11.0457).

Библиографический список

1. Бессе А. Многообразия Эйнштейна: В 2 т. Пер. с англ. – М.: Мир, 1990.

2. Rodionov E.D., Slavskii V.V. Curvature estimations of left invariant Riemannian metrics on three dimensional Lie groups // Differential Geometry and Application. Proceeding of the 7th International Conference (Brno, August 10 – 14, 1998), Masaryk University, Brno, Czech Republic. – 1999. – P.111-126.

Нелинейные методы визуализации многомерных данных

А.С. Герасимова

АлтГУ, г. Барнаул

Рассмотрим задачу визуализации многомерных данных. Суть проблемы заключается в замене многомерных точек-объектов на объекты двумерные с учетом минимального искажения геометрической структуры облака данных.

Визуализация – это задача такого снижения размерности данных до двух, что на полученном изображении оптимальным образом видны основные закономерности набора данных: изначальное разделение данных на классы (если таковое имеется), существование различных зависимостей между координатами и так далее. Если исследователь будет иметь возможность наглядно представить себе многомерное облако данных, то многие задачи анализа решаются с помощью непосредственного зрительного восприятия картины множества объектов.

Общая постановка задачи:

Имеется k точек-объектов в n-мерном пространстве $\vec{X}_1 = \left(X_1^{(1)},\ldots,X_1^{(n)}\right),\ldots,\vec{X}_k = \left(X_k^{(1)},\ldots,X_k^{(n)}\right)$. Предположим, что задана неотрицательная функция Q, которую мы будем считать критерием качества. Ее величина будет представлять собой степень искажения данных при проецировании точек-объектов на плоскость. Рассмотрим класс F всех допустимых преобразований n-мерного вектора $\vec{X}_i$, i=1,…,k в 2-мерный вектор $Z\left(\vec{X}_i\right)$. Преобразование F оказывается тем лучше, чем меньше критерий качества Q. Таким образом, если F и Q заданы, то задача визуализации может решаться, как задача на минимум критерия Q.

Математическая статистика располагает довольно обширным набором методов для решения поставленной задачи, но подавляющее большинство из них относится к классу линейных методов, т. е. преобразование F линейно. Во многих же случаях имеются важные признаки, которые связаны с исходными измерениями с помощью нелинейных функций. Такие признаки при применении к ним линейных преобразований, как правило, существенно искажаются.

В вычислительной практике применяется много разных видов критериев качества. Если критерий качества связан с расстояниями между объектами, то методы визуализации уже достаточно разработаны. Поэтому наибольший интерес представляют собой визуализации, при которых критерием качества служат характеристики, не совпадающие с расстояниями.

Примером такого критерия качества может служить, например, длина пути между точками вдоль некоторой кривой линии. В этом случае возможна эффективная визуализация на прямой. Суть такой визуализации заключается в рассмотрении естественной параметризации кривой. При этом параметром служит длина дуги кривой, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки. Каждому из объектов ставится в соответствие значение его естественного параметра, за счет чего и осуществляется сокращение размерности.

Во многих практических задачах оказывается важным, например, порядок точек, расположенных вдоль некоторой кривой. Заметим, что задача сохранения такого порядка может быть решена при помощи того же перехода к естественной параметризации кривой.

При решении обоих рассмотренных задач преобразования, минимизирующие критерий качества, оказались существенно нелинейными.

В работе детализирована схема общего алгоритма визуализации, рассмотрены некоторые примеры современных нелинейных алгоритмов с практическими приложениями и анализом результатов. Поставлена задача разработки естественной параметризации двумерного многообразия.

На взгляд автора, преимущества нелинейных методов визуализации перед линейными проявляются в основном в случае, когда многомерные данные фактически близки к двумерным, то есть исходные точки расположены близко к некоторой изогнутой двупараметрической поверхности. Поэтому критериями, минимизация которых будет давать существенно лучшие результаты при применении нелинейных методов, будут те, которые описывают степень близости (или какое-то отношение типа порядка) выборочных точек вдоль кривой двупараметрической поверхности. В частности, такие критерии могут быть связаны с естественными параметризациями двумерных многообразий.

Автором рассмотрены примеры разных визуализаций таких данных – линейные и нелинейные. Наилучший результат показал метод с использованием естественной параметризации кривой.

Основные перспективы исследования, начатого в работе, связаны с разработкой новых естественных критериев качества визуализации, наглядно раскрывающих преимущества нелинейных методов и создания новых алгоритмов, оптимальных с точки зрения этих критериев.

Левоинвариантные римановы метрики на четырехмерных алгебрах Ли с конформно полуплоской частью тензора Вейля

О.П. Гладунова, Е.Д. Родионов

АлтГУ, АлтГПА, г. Барнаул

Пусть (M, g) − ориентированное риманово многообразие размерности 4. Обозначим через R, r и s тензор кривизны Римана, тензор Риччи и скалярную кривизну соответственно, а через W − тензор Вейля. Риманова метрика g индуцирует метрику на расслоении $\Lambda^2 M$ 2-векторов M по правилу $g(X_1 \wedge X_2, X_3 \wedge X_4) = \det(g(X_i, X_j))$. Оператор кривизны R является сим-