

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Алтайский государственный университет

Светлана Александровна Шахова

Основы комбинаторики

Учебно-методическое пособие

Барнаул 2025

сведения об издании

УДК 519.101(075.8)

ББК 22.141я73

Ш 32

Автор:

Светлана Александровна Шахова

Рецензент:

А. И. Будкин, доктор физико-математических наук,
профессор

Ш 32 Шахова, С. А. Основы комбинаторики: учебно-методическое пособие / С. А. Шахова; Алтайский государственный университет. – Барнаул : АлтГУ, 2025. – 1 CD-R (0,7 Мб). – Систем. требования: Intel Pentium 1,6 GHz и более ; 512 Мб (RAM) ; Microsoft Windows 7 и выше ; Adobe Reader. – Загл. с титул. экрана. – Текст : электронный.

Учебное электронное издание

В учебно-методическом пособии представлены теоретические основы комбинаторики. Изложение сопровождается большим количеством примеров. Предложены варианты индивидуальных домашних заданий. Приведен список рекомендуемой литературы. Пособие предназначено для студентов всех направлений бакалавриата, изучающих курс дискретной математики.

© С. А. Шахова, 2025

© Алтайский государственный университет, 2025

производственно-технические сведения

Публикуется в авторской редакции

Верстка: М. В. Хмелинина

Дата подписания к использованию: 24.01.2025

Объем издания: _0,7_ Мб

Комплектация издания: 1 CD-R

Тираж 15 дисков

ФГБОУ ВО «Алтайский государственный университет»
656049, Барнаул, пр. Ленина, 61

СОДЕРЖАНИЕ

Правила суммы и произведения	5
Размещения и сочетания	7
Разбиения	13
Полиномиальная формула	18
Формула включений и исключений	19
Примеры решения комбинаторных задач	23
Варианты индивидуальных заданий	37
Библиографический список	79

Правила суммы и произведения

Одна из основных задач комбинаторики — пересчёт элементов в конечных множествах. Приведём некоторые начальные сведения из комбинаторики.

Пусть X — конечное множество, состоящее из n элементов. Тогда говорят, что объект x из множества X может быть выбран n способами и пишут $|X| = n$. Если $X_1, \dots, X_k$ — попарно не пересекающиеся множества ($X_i \cap X_j = \emptyset$ при $i \neq j$), то верно равенство, называемое **правилом суммы**:

$$\left| \bigcup_{i=1}^k X_i \right| = \sum_{i=1}^k |X_i|.$$

При $k = 2$ правило суммы можно записать так: $|X \cup Y| = |X| + |Y|$. Это правило означает, что если объект x из множества X можно выбрать n способами, объект y из множества Y можно выбрать m способами (т.е. $|X| = n, |Y| = m$), то выбрать элемент из объединения непересекающихся множеств X и Y (т.е. осуществить выбор «либо x из множества X , либо y из множества Y ») можно $n + m$ способами.

Другим часто применяемым правилом является **правило произведения**: если объект x можно выбрать n способами, а после каждого такого выбора объект y можно выбрать m способами, то выбор упорядоченной пары (x, y) можно осуществить $n \cdot m$ способами.

Это правило вытекает из правила суммы. Действительно, если объект x выбирается из множества элементов $\{a_1, \dots, a_n\}$, то обозначим через X_i множество пар вида (a_i, y) . В каждом X_i содержится m элементов, и различные X_i не пересекаются. Множество всех пар есть $\bigcup_{i=1}^n X_i$. Тогда по правилу суммы имеем:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n X_i \right| = \sum_{i=1}^n |X_i| = n \cdot m.$$

Мы сформулировали и доказали правило произведения для двух объектов. В общем случае правило произведения формулируется следующим образом. Если объект x_1 может быть выбран n_1 способами, а вслед за ним объект x_2 может быть выбран n_2 способами, а после этого объект x_3 может быть выбран n_3 способами и т.д., то выбор упорядоченной последовательности из k объектов может быть осуществлён $n_1 n_2 n_3 \dots n_k$ способами. Это правило является след-

ствием правила произведения для упорядоченной пары объектов и доказывается методом математической индукции.

Упражнение 1. *Сколько существует четырёхзначных чисел, которые оканчиваются цифрами 3 или 4?*

Решение. Сначала найдём количество чисел, оканчивающихся на 3. Рассмотрим, как устроено произвольное такое число. В нём на первой позиции (в разряде тысяч) может находиться любая цифра из множества $\{1, \dots, 9\}$. Таким образом, выбор цифры на первую позицию можно осуществить 9-ю способами.

Предположим, что мы выбрали эту цифру. Независимо от того, какая это цифра, выбор второй цифры числа (для разряда сотен) можно сделать 10-ю способами, взяв произвольную цифру из множества $\{0, 1, \dots, 9\}$. Согласно правилу произведения выбрать первые две цифры в записи числа можно $9 \cdot 10 = 90$ способами.

Пусть первые две цифры в записи числа выбраны. Неважно, какие это цифры. Выбор третьей цифры числа (для разряда десятков) снова можно сделать 10-ю способами, взяв произвольную цифру из множества $\{0, 1, \dots, 9\}$. Итак, по правилу произведения осуществить выбор первых трёх цифр в записи числа можно $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ способами. Следовательно, есть ровно 900 четырёхзначных чисел, оканчивающихся на 3.

Рассуждая аналогичным образом, получим, что есть ровно 900 четырёхзначных чисел, оканчивающихся на 4. По правилу суммы количество четырёхзначных чисел, оканчивающихся на 3 или 4, находится сложением количества четырёхзначных чисел, оканчивающихся на 3, с количеством четырёхзначных чисел, оканчивающихся на 4, т.е. равно $900 + 900 = 1800$.

Размещения и сочетания

Рассмотрим простейшие комбинаторные схемы, применяемые при решении задач комбинаторики.

Определение 1. Набор элементов $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}$ из множества элементов $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ называется **выборкой объёма r** или **(n, r) -выборкой** или **выборкой из n элементов по r** .

Определение 2. Выборка называется **упорядоченной**, если порядок следования элементов в ней задан.

Две упорядоченные выборки, различающиеся лишь порядком следования элементов, считаются различными.

Определение 3. Если порядок следования элементов в выборке не является существенным, то такая выборка называется **неупорядоченной**.

В выборках могут допускаться или не допускаться повторения элементов.

Определение 4. Упорядоченная выборка, элементы в которой могут повторяться, называется **размещением с повторениями**.

Определение 5. Если элементы упорядоченной выборки попарно различны, то она называется **размещением без повторений** или просто **размещением**.

Определение 6. (n, n) -размещение называется **подстановкой**.

Определение 7. Неупорядоченная выборка, элементы в которой могут повторяться, называется **сочетанием с повторениями**.

Определение 8. Если элементы неупорядоченной выборки попарно различны, то она называется **сочетанием без повторений** или просто **сочетанием**.

Пример. Пусть $X = \{a, b, c\}$. Тогда

1) $(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)$ — все упорядоченные выборки объёма 2 из множества X , представляющие множество так называемых $(3, 2)$ -размещений с повторениями;

2) $(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b)$ — все упорядоченные выборки объёма 2 из множества X , представляющие множество так называемых $(3, 2)$ -размещений (без повторений);

3) $\{a, a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, b\}, \{b, c\}, \{c, c\}$ — все неупорядоченные выборки объёма 2 из множества X , представляющие множество так называемых $(3, 2)$ -сочетаний с повторениями;

4) $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ — все неупорядоченные выборки объёма 2 из множества X , представляющие множество так называемых $(3, 2)$ -сочетаний (без повторений).

Упражнение 2. Для множества $X = \{a, b, c\}$ выписать все

1) $(3, 3)$ -выборки, являющиеся размещениями с повторениями;

2) $(3, 3)$ -выборки, являющиеся размещениями (без повторений);

3) $(3, 3)$ -выборки, являющиеся сочетаниями с повторениями;

4) $(3, 3)$ -выборки, являющиеся сочетаниями (без повторений).

Будем использовать следующие обозначения.

$\overline{A}_n^r$ — число всех (n, r) -размещений с повторениями.

A_n^r — число всех (n, r) -размещений (без повторений);

P_n — число всех подстановок на n элементах.

$\overline{C}_n^r$ — число всех (n, r) -сочетаний с повторениями.

C_n^r — число всех (n, r) -сочетаний (без повторений).

Утверждение 1. $\overline{A}_n^r = n^r$.

Доказательство. Произвольное (n, r) -размещение с повторениями представляет собой упорядоченный набор $(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$ элементов из некоторого множества $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Первый член последовательности $(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$ может быть выбран n способами — это может быть совершенно любой из элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$. Так как рассматривается размещение с повторениями, то, независимо от того, какой элемент x_{i_1} из множества X выбран на первое место, всё равно остаётся n способов выбрать элемент x_{i_2} на второе место в последовательности $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r})$. Таким образом, по правилу произведения, количество способов заполнить первые два места в этой последовательности равно $n \cdot n = n^2$. Поскольку каждый член этой последовательности может быть выбран n способами, то по обобщённому правилу произведения, число способов заполнить все r мест в последовательности $(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$ равно n^r .

Упражнение 3. Сколько существует трёхзначных чисел, начинающихся с 5?

Решение. Каждое из чисел, о которых идёт речь в данной задаче, представляет упорядоченную последовательность трёх цифр, в которой на первом месте стоит 5, а два других места могут быть заняты произвольными цифрами из множества цифр $\{0, 1, \dots, 9\}$. Таким образом, речь идёт о количестве 2-размещений с повторениями из десяти элементов. Их число равно $\overline{A}_{10}^2 = 10^2 = 100$.

Упражнение 4. *Сколькими способами можно разложить 8 различных купюр по трём кошелькам?*

Решение. Пусть A, B, C — условное обозначение кошельков. Распределение купюр по кошелькам может быть представлено в виде упорядоченной последовательности длины 8 элементов из множества $\{A, B, C\}$.

Так, например, последовательность (A, A, B, A, B, B, B, C) представляет распределение купюр, при котором первая, вторая и четвёртая купюры попали в кошелёк A , восьмая купюра попала в кошелёк C , а остальные — в кошелёк B .

Очевидно, что способов распределения восьми купюр по трём кошелькам столько, сколько существует различных последовательностей длины 8 из элементов множества $\{A, B, C\}$. Это число есть $\overline{A}_3^8 = 3^8 = 6561$ — число всевозможных размещений с повторениями из трёх элементов по восемь.

Утверждение 2. $A_n^r = n(n-1)(n-2)\dots(n-(r-1)) = \frac{n!}{(n-r)!}$ при $n \geq r$, и $A_n^r = 0$ при $n < r$.

Доказательство. Очевидно, что размещение без повторений из n элементов по r невозможно, если $n < r$. Рассмотрим случай, когда $n \geq r$. Каждое (n, r) -размещение без повторений является упорядоченной последовательностью $(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$ длины r , члены которой попарно различны и выбираются из множества с $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ с n элементами. Тогда первый член этой последовательности может быть выбран n способами. После каждого выбора первого члена последовательности второй член может быть выбран $n-1$ способами, третий — $n-2$ способами и т.д. Наконец, r -ый член последовательности может быть выбран $n-(r-1) = n-r+1$ способами. По обобщённому правилу произведения получаем формулу $A_n^r = n(n-1)(n-2)\dots(n-(r-1)) = \frac{n!}{(n-r)!}$.

Следствие 1. $P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)\dots(n-(n-1)) =$
 $= n(n-1)(n-2)\dots 1 = n!$

Упражнение 5. *Определить, сколькими способами можно выбрать актив (старосту, профорга и культорга) в группе из 30 человек, если ни один человек не может быть выбран сразу на две должности?*

Решение. Результат выбора можно представить в виде упорядоченной тройки фамилий студентов группы, в которой фамилии не могут повторяться. Например, тройка (Иванов, Петров, Сидоров) описывает ситуацию, при которой старостой выбран Иванов, профоргом — Петров, а культоргом — Сидоров. Значит, количество различных вариантов выбора актива совпадает с количеством размещений без повторений из 30 элементов по 3, т.е. равно

$$A_{30}^3 = 30 \cdot 29 \cdot 28 = \frac{30!}{(27)!} = 24360.$$

Упражнение 6. *Сколько различных чисел можно получить, переставляя цифры в числе 43521?*

Решение. Количество таких чисел равно числу перестановок на множестве из пяти элементов, т.е. равно $P_5 = 5! = 120$.

Утверждение 3. $C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ при $n \geq r$, и $C_n^r = 0$ при $n < r$.

Доказательство. Заметим, что сочетание без повторений из n элементов по r невозможно, если $n < r$. Рассмотрим случай, когда $n \geq r$. Каждое (n, r) -сочетание можно упорядочить $r!$ способами. Значит, количество (n, r) -сочетаний в $r!$ раз меньше количества (n, r) -размещений. Таким образом,

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

Упражнение 7. *Из колоды, состоящей из 52 карт, выбрали 10 карт. Определить, в скольких случаях среди них окажется пиковая дама?*

Решение. Чтобы получить набор из 10 карт, содержащий пиковую даму, нужно выбрать 9 карт из 51 карты. Это можно сделать $C_{51}^9 = \frac{51!}{42!9!} = 3042312350$ способами.

Упражнение 8. В зоомагазине продаются 4 хомяка и 5 кроликов. Петя хочет приобрести трёх хомяков и двух кроликов. Сколькими способами он может это сделать?

Решение. Осуществить выбор трёх хомяков Петя может $C_4^3 = \frac{4!}{1!3!} = 4$ способами, а выбор двух кроликов — $C_5^2 = \frac{5!}{3!2!} = 10$ способами. Чтобы совершить покупку, Пете нужно выбрать трёх хомяков, а затем двух кроликов. Первый выбор он может сделать 4 способами, а второй 10 способами. По правилу произведения последовательность из двух выборов он может совершить $4 \cdot 10 = 40$ способами.

Утверждение 4. $\overline{C}_n^r = C_{r+n-1}^r = C_{r+n-1}^{n-1}$.

Доказательство. Каждое (n, r) -сочетание с повторениями можно представлять в виде последовательности из r нулей (объектов) и $(n - 1)$ -ой единицы, которые отделяют объекты одного вида от другого.

Например, при $n = 4$ $(4, 12)$ -сочетание с повторениями из элементов множества $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ вида

$$\{x_1, x_1, x_1, x_1, x_2, x_3, x_3, x_3, x_3, x_4, x_4, x_4\}$$

можно представить как последовательность 000010100001000, а последовательность 1101000000000000 представляет $(4, 12)$ -сочетание с повторениями вида

$$\{x_3, x_4, x_4, x_4, x_4, x_4, x_4, x_4, x_4, x_4, x_4, x_4\}.$$

Указанное соответствие между (n, r) -сочетаниями с повторениями и последовательностями, состоящими из $n - 1$ единицы и r нулей, является взаимно однозначным. Количество же таких последовательностей равно числу способов выбрать номера мест для r нулей (что автоматически приводит к выбору мест для $n - 1$ единицы) в последовательности, т.е. равно $C_{r+n-1}^r = C_{r+n-1}^{n-1}$.

Упражнение 9. Сколькими способами можно купить в кондитерском магазине 20 пирожных, если в магазине продаются пирожные четырёх видов: шу, корзиночки, трубочки и бисквитные?

Решение. Набор купленных пирожных представляет собой $(4, 20)$ -сочетание с повторениями, которое, как мы видели выше, легко представляется

в виде последовательности из 20 нулей (пирожных) и 3 единиц, отделяющих один вид пирожных от другого.

Например, последовательность 111000000000000000000000 представляет набор, состоящий из 20 бисквитных пирожных.

Число различных последовательностей, состоящих из 3-х нулей и 20-ти единиц, равно $\overline{C}_4^{20} = C_{23}^3 = 1771$.

Упражнение 10. *Сколькими способами по четырём различным урнам можно разложить 20 одинаковых шаров?*

Решение. Число способов разложить 20 одинаковых шаров по четырём различным урнам совпадает с числом неотрицательных целочисленных решений уравнения $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$. Каждое из решений можно представить последовательностью из 20-ти единиц и 3-х нулей, играющих роль разделителей между слагаемыми.

Например, последовательность 1111110111001111111111 представляет решение (7, 3, 0, 10) уравнения $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ и одновременно способ распределения 20 шаров по урнам, при котором в первую урну попадут 7 шаров, во вторую — 3 шара, в третью — 0 шаров, а в четвёртую — 10 шаров.

Число различных таких последовательностей, очевидно, равно $\overline{C}_4^{20} = C_{23}^3 = 1771$.

Разбиения

Пусть X — конечное множество, $|X| = n$. Подсчитаем число разбиений множества X на k подмножеств $X_1, X_2, \dots, X_k$, $k \geq 1$, таких, что $|X_i| = n_i$, $i = 1, \dots, k$, и $X_i \cap X_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Отметим, что некоторые множества X_i могут быть пустыми, т.е. $n_i = 0$. Очевидно, что $\sum_{i=1}^k n_i = n$.

Будем считать, что набор подмножеств $X_1, X_2, \dots, X_k$ является упорядоченным. Зафиксируем n_i и обозначим число указанных разбиений через $C_n^{n_1, \dots, n_k}$.

Утверждение 5. $C_n^{n_1, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!}$.

Доказательство. Сначала выберем n_1 элементов, которые будут составлять множество X_1 . Это можно сделать $C_n^{n_1}$ способами. Теперь из оставшихся $n - n_1$ элементов выберем n_2 элементов для множества X_2 . Ясно, что это можно сделать $C_{n-n_1}^{n_2}$ способами. По правилу произведения выбрать n_1 элемент для X_1 , а затем n_2 элемента для X_2 можно числом способов, равным

$$\begin{aligned} C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} &= \frac{n!}{(n-n_1)!n_1!} \frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)!n_2!} = \\ &= \frac{n!}{(n-n_1-n_2)!n_1!n_2!}. \end{aligned}$$

Продолжая процесс распределения элементов множества X по множествам, из оставшихся $n - n_1 - n_2$ элементов выберем n_3 элемента для множества X_3 . Этот выбор можно совершить $C_{n-n_1-n_2}^{n_3}$ способами. Значит количество способов распределить элементы по первым трём множествам X_1, X_2, X_3 равно по правилу произведения

$$\begin{aligned} C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} C_{n-n_1-n_2}^{n_3} &= \\ &= \frac{n!}{(n-n_1-n_2)!n_1!n_2!} \frac{(n-n_1-n_2)!}{(n-n_1-n_2-n_3)!n_3!} = \\ &= \frac{n!}{(n-n_1-n_2-n_3)!n_1!n_2!n_3!}. \end{aligned}$$

Применяя последовательно правило произведения, на $(k-1)$ -ом шаге получаем следующую формулу для числа разбиений множества X на k подмножеств $X_1, X_2, \dots, X_k$, $k \geq 1$, таких, что $|X_i| = n_i$, $i = 1, \dots, k$, $X_i \cap X_j = \emptyset$ при

$i \neq j :$

$$C_n^{n_1, \dots, n_k} = \frac{n!}{(n - n_1 - \dots - n_{k-1})n_1!n_2!\dots n_{k-1}!} = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}.$$

Утверждение 6. Число $C_n^{n_1, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!}$, где $n_i \geq 0$, и $\sum_{i=1}^k n_i = n$, равно числу (k, n) -размещений с повторениями, в которых среди n размещаемых элементов содержится n_1 элемент 1-го типа, n_2 элемента 2-го типа, n_3 элемента 3-го типа и т.д., n_k элементов k -го типа. Иначе говоря, число $C_n^{n_1, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!}$ — это **количество всевозможных слов**, которые можно составить, имея в своём арсенале n_1 карточку с буквой a_1 , n_2 карточки с буквой a_2 , n_3 карточки с буквой a_3 и т.д., n_k карточек с буквой a_k .

Доказательство. Рассмотрим разбиение множества X в объединение непересекающихся подмножеств $X_1, X_2, \dots, X_k$.

Каждый из элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$ множества X пометим карточкой с изображением a_1 , если элемент попал в множество X_1 , карточкой с изображением a_2 , если элемент попал в множество X_2 и т.д., карточкой с изображением a_k , если элемент попал в множество X_k . Получим слово из n букв, среди которых n_1 раз встречается буква a_1 , n_2 раза встречается буква a_2 , n_3 раза в это слово входит буква a_3 и т.д., n_k раз используется буква a_k . Нетрудно заметить, что разным разбиениям соответствуют разные слова.

С другой стороны, по каждому слову можно определить разбиение множества X на подмножества, которому это слово соответствует: x_k попадёт в подмножество X_i , если на k -ом месте в слове стоит буква a_i .

Таким образом, нами получено взаимно однозначное соответствие между разбиениями множества X на подмножества и множеством (k, n) -размещений с повторениями, в которых среди n размещаемых элементов содержится n_1 элемент 1-го типа, n_2 элемента 2-го типа, n_3 элемента 3-го типа и т.д., n_k элементов k -го типа, что и доказывает утверждение.

Упражнение 11. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова ПАРАЛЛЕЛОГРАММ?

Решение. Если бы все буквы в слове были разные, то получилось бы в точности $14!$ различных слов (перестановок) из букв данного слова. Но в нашем

распоряжении нет 14 различных букв, а есть три буквы А, одна буква Г, одна буква Е, три буквы Л, две буквы М, одна буква О, одна буква П, две буквы Р. При данном расположении букв 3! перестановок букв А между собой будут давать то же самое слово. То же самое слово будет получаться при 2! перестановок букв М между собой и т.д. Следовательно, каждому слову из букв данного слова будут соответствовать $3!1!1!3!2!1!1!2!$ различных перестановок на множестве из 14 элементов, никак не меняющие это слово. Значит, слов будет в $3!1!1!3!2!1!1!1!2!$ раз меньше, чем перестановок на множестве из 14 символов, т.е. число слов равно $\frac{14!}{3!1!1!3!2!1!1!1!2!} = C_{14}^{3,1,1,3,2,1,1,2} = 605404800$.

Упражнение 12. В студенческой группе, состоящей из 25 человек, при выборе старосты за данную кандидатуру проголосовали 17 человек, против — 6 человек, воздержались — 2 человека. Сколькими способами могло осуществиться голосование с таким исходом?

Решение. Поставим напротив фамилии каждого студента группы одну из букв З (за), П (против), В (воздержался). Получим слово из 25-ти букв, в записи которого участвуют 17 букв З, 6 букв П, 2 буквы В. Таких слов $\frac{25!}{17!6!2!} = C_{25}^{17,6,2} = 30284100$.

Можно было рассуждать по-другому. Пусть X — множество студентов в группе. X_1 — множество студентов, проголосовавших за выдвинутую кандидатуру, X_2 — множество студентов, проголосовавших против, X_3 — множество студентов, воздержавшихся при голосовании. Тогда $|X| = 25$, $|X_1| = 17$, $|X_2| = 6$, $|X_3| = 2$, $X_1 \cup X_2 \cup X_3 = X$, $X_i \cap X_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Значит, искомое число равно $C_{25}^{17,6,2} = \frac{25!}{17!6!2!}$.

Упражнение 13. Сколькими способами можно раскрасить витражное окно, состоящее из девяти секций, четырьмя цветами таким образом, чтобы в первый цвет были окрашены три секции, во второй — две секции, в третий — три секции, в четвёртый — одна секция?

Решение. Каждое раскрашивание, рассматриваемое как последовательность цветов, в которые окрашиваются пронумерованные секции окна, является упорядоченной выборкой с повторениями объёма девять из множества $X = \{A, B, C, D\}$ четырёх цветов, т.е. $(4, 9)$ -размещением с повторениями. При

этом нас интересуют размещения с заданной комбинацией элементов: три элемента — 1-ый цвет (буква A), два элемента — 2-ой цвет (буква B), три элемента — 3-ий цвет (буква C), один элемент — 4-ый цвет (буква D). Таким образом, перед нами стоит задача нахождения числа слов из девяти букв с заданным набором букв. По утверждению 6 получаем, что искомое число равно $C_9^{3,2,3,1} = \frac{9!}{3!2!3!1!} = 5040$.

Теперь рассмотрим случай, когда набор подмножеств в разбиении не является упорядоченным. Так, например, разбиения множества $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ вида $\{1, 3\} \cup \{5\} \cup \{2, 4\}$, и $\{2, 4\} \cup \{5\} \cup \{1, 3\}$ считаются одинаковыми.

Утверждение 7. Разобьём множество X , где $|X| = n$, на непересекающиеся подмножества, среди которых m_1 подмножеств с одним элементом, m_2 подмножеств с двумя элементами, m_3 подмножеств с тремя элементами, и т.д., m_n подмножеств с n элементами, причём подмножества с одинаковым числом элементов будем считать неразличимыми между собой. Таким образом, $1 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 + 3 \cdot m_3 + \dots + n \cdot m_n = n$. (Кстати, m_n может принимать только значения 0 и 1. Если $m_n = 1$, то все остальные $m_i = 0$.) Тогда число $N(m_1, m_2, \dots, m_n)$ неупорядоченных разбиений множества X выражается формулой

$$N(m_1, \dots, m_n) = \frac{n!}{m_1!m_2!\dots m_n!(1!)^{m_1}(2!)^{m_2}\dots(n!)^{m_n}}.$$

Доказательство. Рассмотрим некоторое упорядоченное разбиение X в объединение непересекающихся подмножеств, среди которых m_1 подмножеств с одним элементом, m_2 подмножеств с двумя элементами, m_3 подмножеств с тремя элементами, и т.д., m_n подмножеств с n элементами. Переставляя между собой m_1 одноэлементных множеств, мы получим $m_1!$ различных упорядоченных разбиений, представляющих собой одно и то же неупорядоченное разбиение. Точно так же, переставляя между собой m_2 двухэлементных множеств, мы получим $m_2!$ различных упорядоченных разбиений, представляющих собой одно и то же неупорядоченное разбиение. Таким образом, каждое неупорядоченное разбиение даёт нам $m_1!m_2!\dots m_n!$ различных упорядоченных. Значит,

$$N(m_1, \dots, m_n) = \frac{C_n^{1,\dots,2,\dots}}{m_1!m_2!\dots m_n!} = \frac{n!}{m_1!m_2!\dots m_n!(1!)^{m_1}(2!)^{m_2}\dots(n!)^{m_n}}.$$

Упражнение 14. *Сколькими способами из группы в 30 человек можно сформировать 3 подгруппы по 10 человек?*

Решение. По условию задачи $m_{10} = 3$, остальные $m_i = 0$. Тогда искомое число разбиений на подгруппы будет

$$N(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 3, 0, \dots, 0) = \frac{30!}{3!(10!)^3}.$$

Полиномиальная формула

Утверждение 8. Верна следующая формула, называемая *полиномиальной формулой*:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{n_1 + \dots + n_k = n} C_n^{n_1, \dots, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}.$$

Суммирование в этой формуле производится по всем решениям $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ уравнения $x_1 + \dots + x_k = n$ в целых неотрицательных числах.

Доказательство. Пересчитаем полученные в результате перемножения n скобок $(x_1 + x_2 + \dots + x_k)(x_1 + x_2 + \dots + x_k) \dots (x_1 + x_2 + \dots + x_k)$ одночлены, в которых x_1 встречается n_1 раз, x_2 встречается n_2 раз, и т.д., x_k встречается n_k раз, т.е. одночлены вида $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$, где $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Обозначим через X_1 номера тех скобок, из которых в этот одночлен войдут переменные x_1 , X_2 — номера тех скобок, из которых в этот одночлен войдут переменные x_2 , и т.д., X_k — номера тех скобок, из которых в этот одночлен войдут переменные x_k . Возникло разбиение множества $X = \{1, \dots, n\}$ в объединение непересекающихся подмножеств $X_1, \dots, X_k$. Нетрудно заметить, что указанное соответствие между одночленами и разбиениями является взаимно однозначным. Но тогда количество одночленов вида $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$, где $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$, возникающих при перемножении n скобок $(x_1 + x_2 + \dots + x_k)(x_1 + x_2 + \dots + x_k) \dots (x_1 + x_2 + \dots + x_k) = (x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n$, равно $C_n^{n_1, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$.

Упражнение 15. Определить коэффициент c в одночлене $cx_1^4 x_2^3 x_3$ многочлена c приведёнными подобными членами, получаемого из выражения $(3x_1 - 2x_2 + x_3)^8$.

Решение. По утверждению 8 после приведения подобных слагаемых получится одночлен

$$C_8^{4,3,1} (3x_1)^4 (-2x_2)^3 x_3 = -181440 x_1^4 x_2^3 x_3.$$

Формула включений и исключений

В следующем утверждении доказывается формула, которая называется *формулой включений и исключений*.

Утверждение 9. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — конечные множества. Тогда

$$\begin{aligned} |X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n| &= |X_1| + \dots + |X_n| - |X_1 \cap X_2| - \dots - |X_{n-1} \cap X_n| + \\ &+ |X_1 \cap X_2 \cap X_3| + \dots + |X_{n-2} \cap X_{n-1} \cap X_n| - \dots + \\ &+ (-1)^{n-1} |X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n|. \end{aligned}$$

Доказательство. Доказательство проведём индукцией по n . При $n = 2$ формула имеет вид $|X_1 \cup X_2| = |X_1| + |X_2| - |X_1 \cap X_2|$. Эта формула верна, т.к. в $|X_1| + |X_2|$ каждый элемент из пересечения множеств учтён дважды. Предположим, что формула верна для числа множеств $< n$. Докажем, что формула верна для n множеств.

Заметим для начала, что для любого натурального n верно равенство

$$(X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_{n-1}) \cap X_n = (X_1 \cap X_n) \cup (X_2 \cap X_n) \cup \dots \cup (X_{n-1} \cap X_n).$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} |X_1 \cup \dots \cup X_{n-1} \cup X_n| &= |(X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_{n-1}) \cup X_n| = \\ &= |X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_{n-1}| + |X_n| - |(X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_{n-1}) \cap X_n| = \\ &= |X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_{n-1}| + |X_n| - |(X_1 \cap X_n) \cup (X_2 \cap X_n) \cup \dots \cup (X_{n-1} \cap X_n)|. \end{aligned}$$

Применим предположение индукции к первому и последнему слагаемым. Первое слагаемое даст все слагаемые без X_n из правой части доказываемой формулы, а последнее — все слагаемые с X_n из правой части доказываемой формулы:

$$\begin{aligned} |X_1 \cup \dots \cup X_{n-1} \cup X_n| &= \left(|X_1| + \dots + |X_{n-1}| - |X_1 \cap X_2| - \dots - |X_{n-2} \cap X_{n-1}| + \right. \\ &+ |X_1 \cap X_2 \cap X_3| + \dots + |X_{n-3} \cap X_{n-2} \cap X_{n-1}| - \dots + \\ &\left. + (-1)^{n-2} |X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_{n-1}| \right) + |X_n| - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(|X_1 \cap X_n| + \dots + |X_{n-1} \cap X_n| - |X_1 \cap X_2 \cap X_n| - \dots - |X_{n-2} \cap X_{n-1} \cap X_n| + \right. \\
& \quad + |X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap X_n| + \dots + |X_{n-3} \cap X_{n-2} \cap X_{n-1} \cap X_n| - \dots + \\
& \quad \left. + (-1)^{n-2} |X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_{n-1} \cap X_n| \right) = \\
& = |X_1| + \dots + |X_n| - |X_1 \cap X_2| - \dots - |X_{n-1} \cap X_n| + \\
& \quad + |X_1 \cap X_2 \cap X_3| + \dots + |X_{n-2} \cap X_{n-1} \cap X_n| - \dots + \\
& \quad + (-1)^{n-1} |X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n|.
\end{aligned}$$

Следствие 2. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — конечные множества. Тогда

$$\begin{aligned}
|X \setminus (X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n)| &= |X| - |X_1| - \dots - |X_n| + \\
& \quad + |X_1 \cap X_2| + \dots + |X_{n-1} \cap X_n| - \\
& \quad - |X_1 \cap X_2 \cap X_3| - \dots - |X_{n-2} \cap X_{n-1} \cap X_n| + \dots + \\
& \quad + (-1)^n |X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n|.
\end{aligned}$$

Доказательство. Действительно,

$$(X \setminus (X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n)) \cup (X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n) = X,$$

$$(X \setminus (X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n)) \cap (X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n) = \emptyset,$$

откуда

$$|X| = |X \setminus (X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n)| + |X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n|,$$

$$|X \setminus (X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n)| = |X| - |X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n|.$$

Для получения требуемой формулы остаётся применить формулу включений и исключений.

Приведём ещё одну наиболее распространённую форму записи формулы включений и исключений. Пусть X — конечное множество, состоящее из N элементов,

X_1 — подмножество множества X , состоящее из всех элементов множества X , обладающих свойством α_1 , $|X_1| = N(\alpha_1)$ — количество элементов в X , обладающих свойством α_1 .

X_2 — подмножество множества X , состоящее из всех элементов множества

X , обладающих свойством α_2 , $|X_2| = N(\alpha_2)$ — количество элементов в X , обладающих свойством α_2 .

...

X_n — подмножество множества X , состоящее из всех элементов множества X , обладающих свойством α_n , $|X_n| = N(\alpha_n)$ — количество элементов в X , обладающих свойством α_n .

Обозначим также $|X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap \dots \cap X_{i_k}| = N(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k})$ — количество элементов из множества X , обладающих одновременно свойствами $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}$.

Кроме того, введём следующее обозначение:

$|X \setminus (X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n)| = N(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n)$ — количество тех элементов из множества X , которые не обладают ни одним из свойств $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Формулу, из следствия 2 можно записать в виде:

$$\begin{aligned} N(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n) &= N - N(\alpha_1) - \dots - N(\alpha_n) + \\ &+ N(\alpha_1, \alpha_2) + \dots + N(\alpha_{n-1}, \alpha_n) - N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) - \dots + \\ &+ (-1)^n N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n). \end{aligned}$$

Упражнение 16. *Определить количество трёхзначных чисел, в которых сумма цифр равняется 21.*

Решение. Обозначим через x_1, x_2, x_3 первую, вторую и третью цифры числа соответственно. Для решения задачи достаточно определить количество целочисленных решений системы

$$x_1 + x_2 + x_3 = 21, \quad 1 \leq x_1 \leq 9, \quad 0 \leq x_2 \leq 9, \quad 0 \leq x_3 \leq 9.$$

Пусть X — множество целочисленных решений системы

$$(*) \quad x_1 + x_2 + x_3 = 21, \quad x_1 \geq 1, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

N — количество элементов в X . Ясно, что $N = C_{22}^2 = 231$. Введём следующие три свойства:

$$\alpha_1 : "x_1 \geq 10", \quad \alpha_2 : "x_2 \geq 10", \quad \alpha_3 : "x_3 \geq 10".$$

Тогда $N(\alpha_1) = C_{13}^2 = 78$, $N(\alpha_2) = N(\alpha_3) = C_{12}^2 = 66$, $N(\alpha_1, \alpha_2) = N(\alpha_1, \alpha_3) =$

$C_3^2 = 3$, $N(\alpha_2, \alpha_3) = C_2^2 = 1$, $N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$. Теперь по формуле из следствия найдём число целочисленных решений системы (*), не удовлетворяющих ни одному из свойств $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$N(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3) = 231 - 78 - 66 - 66 + 3 + 3 + 1 - 0 = 28.$$

Это и есть искомое число трёхзначных чисел, в которых сумма цифр равна 21.

Следующая задача называется *задачей о беспорядках*.

Упражнение 17. Пусть имеется n различных предметов, которые мы обозначим $a_1, a_2, \dots, a_n$, и n различных ячеек $b_1, b_2, \dots, b_n$. Сколькими способами можно разместить предметы по ячейкам так, чтобы никакой предмет a_i не попал в ячейку b_i ?

Решение. Пусть X — совокупность всевозможных расположений предметов по ячейкам. Тогда $N = |X| = n!$. Введём свойства α_i : ” a_i находится в ячейке b_i “, $i = 1, \dots, n$. Число $N(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k})$ расположений, при которых предмет a_{i_j} находится в ячейке b_{i_j} для $j = 1, \dots, k$, равно $(n - k)!$. Тогда по формуле из следствия получаем формулу для нахождения числа беспорядков на множестве из n элементов:

$$\begin{aligned} N(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n) &= n! - C_n^1(n - 1)! + C_n^2(n - 2)! - \dots + (-1)^n C_n^n 0! = \\ &= n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right). \end{aligned}$$

Примеры решения комбинаторных задач

Упражнение 18. *Группа из 7 студентов, среди которых 2 девушки, участвует в эстафете. Сколькими способами можно установить очерёдность прохождения этапа эстафеты членами группы, если первым и последним на этапе должны выступить юноши?*

Решение. Назначить на место первого и последнего участника при прохождении этапа можно любых двух юношей из пяти. При этом на место первого можно выбрать одного из пяти юношей, а на место последнего одного из оставшихся четырёх, т.е. существует $5 \cdot 4 = 20$ способов ($A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = 4 \cdot 5 = 20$). После этого 5 оставшихся участников, среди которых 2 девушки, могут быть распределены для участия в этапе на 5 мест со 2-го по 6-е. Для этого есть $5!$ способов ($P_5 = A_5^5 = \frac{5!}{(5-5)!} = 5! = 120$ — число перестановок на пяти элементах). Каждый выбор "крайних" участников нужно соединить с одним из выборов "внутренних" (места со 2-го по 6-е) участников. Это можно сделать $20 \cdot 120 = 2\,400$ способами.

Упражнение 19. *В записи пароля используются 26 букв и 9 цифр.*

а) *Сколько паролей длины 7 можно создать из этих символов?*

б) *Сколько можно создать паролей длины 7, в записи которых все символы разные?*

в) *Сколько можно создать паролей длины 7, в которых хотя бы два символа одинаковые? Каких паролей больше? (сравнить б) и в))*

Решение. а) На 1-е место в пароле можно поставить любой из 35 символов. Вне зависимости от того, какой символ поставлен на 1-е место, на 2-е место можно поставить также любой из 35 символов. Есть $35 \cdot 35 = 1225$ способов расположить символы на первых двух позициях пароля. Заполнить все 7 мест можно $\bar{A}_{35}^7 = 35^7 = 64\,339\,296\,875$ способами.

б) На 1-е место в пароле можно поставить любой из 35 символов, на 2-е место можно выбрать любой из 34 оставшихся символов, на 3-е место можно взять любой символ из 33 оставшихся после выбора первых двух символов и т.д. Число возможных способов заполнить все 7 мест в пароле различными символами $A_{35}^7 = 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 = 33\,891\,580\,800$. в) $\bar{A}_{35}^7 - A_{35}^7 = 30\,447\,716\,075$.

Следующее утверждение известно как принцип Дирихле: есть n клеток и $n + 1$ кролик. Как ни рассаживай кроликов по клеткам, всегда найдётся клетка,

в которой ≥ 2 кроликов. Принцип Дирихле часто применяется при решении комбинаторных задач.

Упражнение 20. В квадрат 3×3 бросают 10 точек. Доказать, что при любом расположении точек внутри квадрата всегда найдутся две точки, расстояние между которыми не более $\sqrt{2}$.

Решение. Разобьём квадрат на 9 клеток размером 1×1 . По принципу Дирихле по крайней мере две точки попадут в один квадрат. Значит расстояние между ними не превосходит длины диагонали квадрата, равной $\sqrt{2}$.

Упражнение 21. На стоянке 122 автомобиля одного из 12 цветов. Доказать, что на стоянке найдутся либо 12 автомобилей одного цвета, либо 12 автомобилей, все цвета которых разные.

Решение. Если не найдутся авто всех 12 цветов, то на стоянке авто не более 11 цветов. Если не найдутся 12 авто одного цвета, то количество авто каждого цвета не более 11. Следовательно автомобилей на стоянке не более, чем $11 \cdot 11 = 121$.

Упражнение 22. В кассе есть монеты достоинством 1, 2, 5, 10 рублей. Какое минимальное количество таких монет нужно взять, чтобы среди них обязательно нашлось 8 монет одного достоинства?

Решение. Возьмём N монет. Если среди них монет каждого из четырёх достоинств оказалось не более 7, то $N \leq 7 \cdot 4 = 28$. Значит нужно взять 29 монет.

Упражнение 23. 22 кролика рассаживают по семи клеткам. Докажите, что найдётся клетка, в которой не меньше четырёх кроликов.

Решение. Если число кроликов в каждой из семи клеток ≤ 3 , то в них находится не более $3 \cdot 7 = 21$, что не так. Следовательно, найдётся клетка, в которой не меньше четырёх кроликов.

Упражнение 24. Путешественнику нужно добраться из пункта A в пункт B , двигаясь каждый раз вверх и вправо из одной точки в другую. Сколькими способами это можно сделать?



Решение. Путешественнику нужно продвинуться на 5 позиций вправо и на 2 вверх. Изобразим его маршрут, отмечая продвижение вправо на одну позицию цифрой 1, а продвижение вверх на одну позицию цифрой 0. Любой маршрут таким образом кодируется последовательностью длины 7 из пяти нулей и двух единиц. И наоборот, любая такая последовательность представляет определённый маршрут из А в В. Например, (0 0 1 1 1 1 1) соответствует маршруту, пролегающему по внешнему контуру прямоугольника. Всего маршрутов $C_7^2 = \frac{7!}{2!5!} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21$ — именно столько способов выбрать места для двух нулей в бинарной последовательности длины 7.

Упражнение 25. Сколько чисел от 1 до 999 включительно не имеют в своём составе одинаковых подряд идущих цифр?

Решение. Среди однозначных таких чисел 9, среди двузначных их $9 \cdot 9 = 81$, так как на 1-е место можно ставить любую цифру кроме 0, а на 2-е место все цифры кроме первой. Среди трёхзначных чисел таких $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$, поскольку на 3-е место можно ставить любую цифру кроме 2-ой. Всего таких чисел $9 + 81 + 729 = 819$.

Упражнение 26. У Тани есть 4 майки, 3 юбки и 8 пар обуви. Какое максимальное количество комплектов можно составить из этих вещей? (Комплект состоит из майки, юбки и пары обуви.)

Решение. Чтобы составить комплект одежды, каждый выбор майки нужно соединить с выбором юбки ($4 \cdot 3 = 12$ способов выбрать майку и юбку) и с выбором обуви. По принципу умножения всего можно составить $4 \cdot 3 \cdot 8 = 96$ комплектов.

Упражнение 27. Таня, Катя и Оля, имея в своём распоряжении 4 майки, 3 юбки и 8 пар обуви, собираются на дискотеку. Сколькими способами они могут одеться?

Решение. Таня может надеть любую из четырёх маек, Катя — любую из трёх оставшихся, а Оля — любую из двух свободных маек. Распределить майки между девочками можно $A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ способами.

Существует $P_3 = A_3^3 = 3! = 6$ способов распределения юбок и $A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ способов распределения обуви.

Каждый способ распределения маек нужно соединить с одним из способов распределения юбок и с одним из способов распределения обуви. Получаем $A_4^3 \cdot A_3^3 \cdot A_8^3 = 24 \cdot 6 \cdot 336 = 48\,384$ варианта для девочек одеться на дискотеку.

Упражнение 28. В экзаменационной ведомости 6 фамилий студентов. Сколькими способами она может быть заполнена оценками 2, 3, 4, 5, если известно, что

- а) ровно один студент сдал на "2";
- б) все студенты сдали экзамен;
- в) только один студент сдал экзамен;
- г) ровно половина студентов сдали экзамен.

Решение. а) Существует ровно 6 способов выбрать фамилию студента, не сдавшего экзамен и 3^5 способов выставить оценки напротив фамилий пяти сдавших экзамен студентов. Всего вариантов заполнения ведомости $6 \cdot 3^5 = 6 \cdot 243 = 1458$.

б) В этом случае напротив каждой фамилии в списке должна стоять одна из трёх положительных оценок. Таких вариантов заполнения $3^6 = 729$.

в) Выбрать сдавшего можно шестью способами и тремя способами можно поставить ему положительную оценку. Значит всего $6 \cdot 3 = 18$ вариантов заполнения ведомости.

г) Выбрать половину сдавших экзамен студентов можно $C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 3} = 20$ -ю способами, а расставить напротив их фамилий положительные оценки — $3^3 = 27$ способов. Всего $20 \cdot 27 = 540$ вариантов.

Упражнение 29. Восемь студентов пришли в столовую. Сколькими способами они могут занять очередь, если известно, что

- а) первый — Петя, а последний — Вася;
- б) Маша и Даша поссорились и не хотят стоять рядом.

Решение. а) Существует ровно $6!$ способов студентам выстроиться в очередь между Петей и Васей.

б) Маша и Даша, стоя рядом, могут занимать одну из семи возможных позиций в очереди. При этом они могут меняться местами друг с другом, т.е. всего 14 вариантов их расположения в очереди. Каждому из вариантов соответствует $6!$ размещений остальных студентов в очереди. Значит всего $14 \cdot 6!$

Упражнение 30. Множество H состоит из 30 элементов. $H_1, H_2, \dots, H_{15}$ — некоторые пятиэлементные подмножества множества H . Можно ли раскрасить элементы множества H , выбирая для каждого один из двух цветов, так, чтобы в любом подмножестве H_i содержались элементы обоих цветов?

Решение. Всего существует 2^{30} раскрасок — способов раскрасить 30 элементов в два цвета. Подсчитаем количество раскрасок, при которых элементы из H_1 покрашены в один цвет. Это $2 \cdot 2^{25} = 2^{26}$. Столько же будет раскрасок, при которых элементы из H_2 будут одноцветны и т.д. Значит, общее количество раскрасок, при которых хотя бы одно из подмножеств $H_1, H_2, \dots, H_{15}$ будет состоять из одноцветных элементов, не превосходит $15 \cdot 2^{26} < 2^{30}$. Следовательно, найдётся такая раскраска элементов множества H в два цвета, при которой каждое подмножество содержит элементы обоих цветов.

Упражнение 31. У королевы 25 одинаковых зеркал. Сколькими способами их можно распределить по 18 залам так, чтобы в каждом зале было хотя бы одно зеркало?

Решение. Повесим по одному зеркалу в каждый зал. Осталось распределить 7 оставшихся зеркал по 18 залам, т.е. найти число неотрицательных решений уравнения $n_1 + n_2 + \dots + n_{18} = 7$ (или вариантов покупки 7 пирожных, если в кондитерской продаются пирожные 18 видов). Это $\overline{C}_{18}^7 = C_{24}^7 = 346104$.

Упражнение 32. У маляра есть краски пяти разных цветов. Для получения оттенка он смешивает 3 банки краски (каждая банка заполнена краской одного из цветов, возможно, некоторые банки заполнены одинаковой краской). Сколько оттенков он может получить? Сколько существует способов окрасить четыре одинаковые скамейки в один из этих оттенков?

Решение. $\overline{C}_5^3 = C_7^3 = 35$ оттенков можно получить. $\overline{C}_{35}^4 = C_{38}^4 = 73815$ способов раскраски четырёх одинаковых скамеек существует.

Упражнение 33. В классе 20 учеников. Сколькими способами в течение 5 дней можно выбирать на дежурство 4 ученика так, чтобы состав дежурных был разный и каждый человек подежурил бы только раз за неделю?

Решение. Каждому ученику нужно сообщить номер дня (от 1 до 5), в который он дежурит. Возникает слово из 20 букв, в записи которого четыре цифры

”1”, четыре цифры ”2”, ..., четыре цифры ”5”. Таких слов $C_{20}^{4,4,4,4} = \frac{20!}{(4!)^5} = 305540235000$.

Упражнение 34. В классе 20 учеников. Сколькими способами в течение 5 дней можно выбирать на дежурство 4 ученика так, чтобы состав дежурных был разный (не совпадал полностью)?

Решение. Из 20 учеников можно составить $C_{20}^4 = 4845$ разных четвёрок. Тогда $A_{4845}^5 = 2\,664\,233\,302\,736\,726\,280$ способов организовать дежурство в течение недели.

Упражнение 35. Имеется 20 разных чашек и 5 разных ложек. Сколькими способами можно разложить ложки по чашкам, если в одну чашку можно положить сколько угодно ложек?

Решение. Каждую ложку пометим номером той чашки, в которую её положим. Получим последовательность длины 5, заполненную числами от 1 до 20 с повторениями. Всего их $\overline{A}_{20}^5 = 20^5 = 3\,200\,000$.

Упражнение 36. Имеется 20 разных чашек и 5 одинаковых ложек. Сколькими способами можно разложить ложки по чашкам, если в одну чашку можно положить сколько угодно ложек?

Решение. Количество способов совпадает с числом целых неотрицательных решений уравнения $n_1 + n_2 + \dots + n_{20} = 5$, т.е. равно $\overline{C}_{20}^5 = C_{24}^5 = 42504$.

Упражнение 37. Показать, что $C_{n+m}^n = C_{n+m-1}^{n-1} + C_{n+m-2}^{n-1} + C_{n+m-3}^{n-1} + \dots + C_n^{n-1} + C_{n-1}^{n-1}$, $m, n \in N$.

Решение. C_{n+m-1}^{n-1} — количество n -элементных подмножеств множества из $n + m$ элементов, содержащих элемент a_1 (все подмножества с кодом $(1, \dots)$);

C_{n+m-2}^{n-1} — количество n -элементных подмножеств множества из $n + m$ элементов, не содержащих a_1 , но содержащих элемент a_2 (все подмножества с кодом $(0, 1, \dots)$);

C_{n+m-3}^{n-1} — количество n -элементных подмножеств множества из $n + m$ элементов, не содержащих a_1, a_2 , но содержащих элемент a_3 (все подмножества с кодом $(0, 0, 1, \dots)$); ...

C_n^{n-1} — количество n -элементных подмножеств множества из $n + m$ элементов, не содержащих $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}$, но содержащих элемент a_m (все подмножества с кодом $(0, 0, \dots, 0, 1, \dots)$ — нули на первых $m - 1$ местах и 1 на месте с номером m);

$C_{n-1}^{n-1} = C_n^n$ — количество n -элементных подмножеств множества из $n + m$ элементов, не содержащих $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m$ (все подмножества с кодом $(0, 0, \dots, 0, 0, \dots)$ — нули на первых m местах, соответствующих элементам $a_1, \dots, a_m$).

Сумма в правой части доказываемого равенства равна числу всевозможных n -элементных подмножеств множества из $n + m$ элементов и формула доказана. Подставим различные значения n в формулу из задачи 8. Возникают равенства:

$$n = 2 : C_{m+2}^2 = C_{m+1}^1 + C_m^1 + C_{m-1}^1 + \dots + C_2^1 + C_1^1;$$

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2} = (m+1) + m + (m-1) + \dots + 2 + 1.$$

$$n = 3 : C_{m+3}^3 = C_{m+2}^2 + C_{m+1}^2 + C_m^2 + \dots + C_3^2 + C_2^2;$$

$$\begin{aligned} & \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} = \\ & = \frac{(m+1)(m+2)}{2} + \frac{m(m+1)}{2} + \frac{(m-1)m}{2} + \dots + \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{1 \cdot 2}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{3} = \\ & = (m+1)^2 + (m+1) + m^2 + m + (m-1)^2 + (m-1) + \dots + 2^2 + 2 + 1^2 + 1; \\ & \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{3} - \frac{(m+1)(m+2)}{2} = \\ & = (m+1)^2 + m^2 + (m-1)^2 + \dots + 2^2 + 1^2; \\ & \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6} = (m+1)^2 + m^2 + (m-1)^2 + \dots + 2^2 + 1^2. \end{aligned}$$

Упражнение 38. Из формулы предыдущей задачи выведите формулу суммы кубов.

Упражнение 39. Имеется 5 неразличимых стаканов и 7 различных чашек. Сколькими способами можно выбрать 7 сосудов из 12?

Решение. 1) 0 стаканов + 7 чашек — C_7^7 способов;

- 2) 1 стакан + 6 чашек — C_7^6 способов;
- 3) 2 стакана + 5 чашек — C_7^5 способов;
- 4) 3 стакана + 4 чашки — C_7^4 способов;
- 5) 4 стакана + 3 чашки — C_7^3 способов;
- 6) 5 стаканов + 2 чашки — C_7^2 способов.

Всего способов: $C_7^7 + C_7^6 + C_7^5 + C_7^4 + C_7^3 + C_7^2 = 2^7 - C_7^1 - C_7^0 = 128 - 7 - 1 = 120$.

Упражнение 40. *Сколькими способами 15 различных шаров можно разложить по пяти различным ящикам по три шара в каждый?*

Решение. Пронумеруем ящики и подпишем каждый шар (шары упорядочены) номером ящика, в который он попадает. Получается слово из 15 букв, в котором три буквы "1", три буквы "2", и т. д. Таких слов $C_{15}^{3,3,3,3,3} = \frac{15!}{(3!)^5} = 168\,168\,000$.

Упражнение 41. *Сколькими способами 15 различных шаров можно разложить по пяти неразличимым ящикам по три шара в каждый?*

Решение. Каждое разложение по пяти нenumерованным (неразличимым) ящикам даёт $5!$ различных разложений для случая различимых ящиков. Значит в данном случае разложений будет в $5!$ раз меньше, чем в предыдущей задаче, т.е. $\frac{C_{15}^{3,3,3,3,3}}{5!} = 1\,401\,400$.

Упражнение 42. *Сколькими способами 11 различных цветов можно подарить трём девочкам Ире, Маре и Тамаре так, чтобы одной досталось 5 цветов, а двум другим по 3 цветка?*

Решение. Выберем девочку, которой будем дарить 5 цветов. Каждый цветок промаркируем первой буквой имени той девочки, которой его подарим. Появится слово из 11 букв, в которое одна буква входит 5 раз, а две другие по три раза. Таким образом, есть $C_3^1 C_{11}^{5,3,3} = 3 \frac{11!}{5!3!3!} = 27\,720$ способов одарить девочек.

Упражнение 43. *Сколькими способами можно расселить 11 гостей в четырёх различных комнатах так, чтобы ни одна не осталась пустой?*

Решение. Обозначим комнаты буквами A, B, C, D . Каждого гостя маркируем буквой той комнаты, в которую он заселяется. Тогда расселение — это слово из 11 букв. Например, слово $AAABBBDDDDAA$ кодирует заселение гостей 1, 2, 3, 10, 11 в комнату A , гостей 4, 5 в комнату B , а гостей 6, 7, 8, 9 в комнату D . Комната C при таком расселении остаётся пустой. Ясно, что всего расселений $\overline{A}_4^{11} = 4^{11}$. Они состоят из

1) $C_4^1 = 4$ расселений, записанных с использованием только одной буквы (все заселены в одну комнату);

2) $C_4^2(2^{11} - 2) = 6(2^{11} - 2)$ расселений, записанных с использованием в точности двух букв (две комнаты пустые);

3) $C_4^3(3^{11} - C_3^2(2^{11} - 2) - 3) = 4(3^{11} - 3(2^{11} - 2) - 3)$ расселений, записанных с использованием в точности трёх букв (одна комната пустая);

4) m расселений, записанных с использованием всех четырёх букв (нет пустых комнат). Поскольку $4 + 6(2^{11} - 2) + 4(3^{11} - 3(2^{11} - 2) - 3) + m = 4^{11}$, то $m = 4^{11} - (4 + 6(2^{11} - 2) + 4(3^{11} - 3(2^{11} - 2) - 3)) = 4^{11} - 4 \cdot 3^{11} + 6 \cdot 2^{11} - 4 = 3\,498\,000$.

Упражнение 44. В ряд записали 105 единиц, поставив перед каждой знак $+$. Сначала изменили знак перед каждой третьей единицей, затем перед каждой пятой, затем перед каждой седьмой. Найти значение полученного выражения.

Решение. Пусть A — множество единиц, стоящих на местах с номерами, кратными 3, $|A| = 35$;

B — множество единиц, стоящих на местах с номерами, кратными 5, $|B| = 21$;

C — множество единиц, стоящих на местах с номерами, кратными 7, $|C| = 15$.

Ясно, что $|A \cap B| = 7$, $|A \cap C| = 5$, $|B \cap C| = 3$, $|A \cap B \cap C| = 1$.

По формуле включений и исключений найдём число m единиц, перед которыми не менялся знак: $m = 105 - (35 + 21 + 15 - 7 - 5 - 3 + 1) = 48$.

У одного элемента знак менялся три раза (элемент из $A \cap B \cap C$) — это слагаемое -1 . Ровно два раза знак менялся у следующего числа единиц: $6 + 4 + 2 = 12$ (элементы из $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, не лежащие в $A \cap B \cap C$).

Ровно один раз знак менялся у $35 - 1 - 4 - 6 = 24$ элементов из множества A , у $21 - 1 - 2 - 6 = 12$ элементов из множества B , у $15 - 1 - 2 - 4 = 8$ элементов из множества C .

Значит получаем сумму $48 - 1 + 12 - 24 - 12 - 8 = 15$.

Упражнение 45. Имеется 17 разных шаров и 5 разных ящиков. Сколькими способами можно разложить шары по ящикам, если в трёх ящиках должно быть по четыре шара, а в двух других по два и по три шара?

Решение. $C_5^3 C_2^1 C_1^1$ — число способов выбрать три ящика, в которых будет по четыре шара, один ящик, в котором будет три шара и один ящик, в котором будет два шара.

Каждый шар помечаем номером того ящика, в который он помещается.

Получается слово из 17 букв с составом 4, 4, 4, 3, 2. Таких слов $\frac{17!}{(4!)^3 3! 2!} =$

Тогда общее число способов есть

$$C_5^3 C_2^1 C_1^1 C_{17}^{4,4,4,3,2} = 20 \cdot \frac{17!}{(4!)^3 3! 2!} = 214\,414\,200\,000.$$

Упражнение 46. Вывести формулу для количества целочисленных решений системы

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = r, \quad x_1 \geq a_1, \quad x_2 \geq a_2, \quad \dots, \quad x_n \geq a_n,$$

где $n \geq 1$, $r, a_1, \dots, a_n$ — фиксированные целые числа.

Решение. Нетрудно заметить, что число целочисленных решений системы вида

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = r, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \dots, \quad x_n \geq 0,$$

где r — целое неотрицательное число, есть $\overline{C}_n^r = C_{r+n-1}^{n-1}$ — число неупорядоченных выборок из n элементов по r с повторениями: каждому решению $(m_1, \dots, m_n)$ поставим в соответствие неупорядоченную выборку длины r с повторениями, в которой m_1 элементов 1-го типа, m_2 элементов 2-го типа, ..., m_n элементов n -го типа,

$$m_1 + m_2 + \dots + m_n = r, \quad m_1 \geq 0, \quad m_2 \geq 0, \quad \dots, \quad m_n \geq 0.$$

(Это в точности ситуация покупки r пирожных, среди которых m_1 пирожных 1-го вида, m_2 пирожных 2-го вида, ..., m_n пирожных n -го вида с кодом типа $\bullet | \bullet \bullet | \dots | \bullet \bullet \bullet$) Найдём в общем случае количество целочисленных решений

СИСТЕМЫ

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = r, \quad x_1 \geq a_1, \quad x_2 \geq a_2, \quad \dots, \quad x_n \geq a_n,$$

где $n \geq 1$, $r, a_1, \dots, a_n$ — фиксированные целые числа. Сделаем замену

$$u_1 = x_1 - a_1 \geq 0, \quad u_2 = x_2 - a_2 \geq 0, \quad \dots, \quad u_n = x_n - a_n \geq 0.$$

Система примет вид:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = R, \quad u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0, \quad \dots, \quad u_n \geq 0,$$

где $R = r - (a_1 + \dots + a_n)$. Как показано выше, число решений системы при $R \geq 0$ равно

$$\overline{C}_n^R = C_{R+n-1}^{n-1}.$$

При $R < 0$ система не имеет решений.

Упражнение 47. Найти количество целочисленных решений системы

$$x_1 + x_2 + x_3 = -5, \quad x_1 \geq -7, \quad x_2 \geq 4, \quad x_3 \geq 0.$$

Решение. Система не имеет решений, так как после сложения неравенств получаем:

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq -3.$$

Упражнение 48. Найти количество целочисленных решений системы

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -5, \quad x_1 \geq -5, \quad x_2 \geq 7, \quad x_3 \geq -6, \quad x_4 \geq -1.$$

Решение. Система имеет одно решение $x_1 = -5, x_2 = 7, x_3 = -6, x_4 = -1$, так как после сложения неравенств получаем:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq -5.$$

Упражнение 49. Найти количество целочисленных решений системы

$$x_1 + x_2 + x_3 = -4, \quad x_1 \geq -7, \quad x_2 \geq 3, \quad x_3 \geq -6.$$

Решение. Введём обозначения

$$u_1 = x_1 + 7 \geq 0, \quad u_2 = x_2 - 3 \geq 0, \quad u_3 = x_3 + 6 \geq 0.$$

Тогда

$$x_1 + x_2 + x_3 = u_1 - 7 + u_2 + 3 + u_3 - 6 = u_1 + u_2 + u_3 - 10 = -4,$$

и условие задачи переписется в виде:

$$u_1 + u_2 + u_3 = 6, \quad u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0, \quad u_3 \geq 0.$$

По формуле, обоснованной при решении задачи 4, получаем, что количество целочисленных решений системы равно

$$\overline{C}_3^6 = C_8^2 = \frac{8!}{2!6!} = 28.$$

Упражнение 50. Вывести формулу для количества целочисленных решений системы

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = r, \quad a_1 \leq x_1 \leq b_1, \quad a_2 \leq x_2 \leq b_2, \quad \dots, \quad a_n \leq x_n \leq b_n,$$

где $n \geq 1$, $a_i \leq b_i$, $i = 1, \dots, n$; $r, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ — фиксированные целые числа.

Решение. Пусть X — множество целочисленных решений системы

$$(*) \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n = r, \quad a_1 \leq x_1, \quad a_2 \leq x_2, \quad \dots, \quad a_n \leq x_n.$$

Предположим, что это множество не пусто. Как следует из решения задачи 4, $N = |X| = \overline{C}_n^R = C_{R+n-1}^{n-1}$, где $R = r - (a_1 + \dots + a_n) \geq 0$. Введём следующие обозначения:

$\alpha_1 = \alpha_1(X)$ — множество тех решений $(x_1, \dots, x_n)$ системы $(*)$, для которых $x_1 \geq b_1 + 1$;

$\alpha_2 = \alpha_2(X)$ — множество тех решений $(x_1, \dots, x_n)$ системы $(*)$, для которых $x_2 \geq b_2 + 1$;

...

$\alpha_n = \alpha_n(X)$ — множество тех решений $(x_1, \dots, x_n)$ системы $(*)$, для которых $x_n \geq b_n + 1$. Тогда по формуле включений и исключений число решений системы $(*)$, в которых нарушено хотя бы одно из условий $x_1 \leq b_1, x_2 \leq b_2, \dots, x_n \leq b_n$, равно

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_n| - |\alpha_1 \cap \alpha_2| - \dots - |\alpha_{n-1} \cap \alpha_n| + \dots + (-1)^{n-1} |\alpha_1 \cap \dots \cap \alpha_n|.$$

Значение каждого слагаемого из этого выражения находится по формуле из задачи 4.

Таким образом, чтобы получить формулу для числа целочисленных решений системы

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = r, \quad a_1 \leq x_1 \leq b_1, \quad a_2 \leq x_2 \leq b_2, \quad \dots, \quad a_n \leq x_n \leq b_n,$$

нужно вычесть полученное выражение из N :

$$N - (|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_n| - |\alpha_1 \cap \alpha_2| - \dots - |\alpha_{n-1} \cap \alpha_n| + \dots + (-1)^{n-1} |\alpha_1 \cap \dots \cap \alpha_n|).$$

Упражнение 51. *Определить количество трёхзначных чисел, сумма цифр которых равна 20.*

Решение. Очевидно, нужно найти количество целочисленных решений системы

$$x_1 + x_2 + x_3 = 20, \quad 1 \leq x_1 \leq 9, \quad 0 \leq x_2 \leq 9, \quad 0 \leq x_3 \leq 9.$$

Пусть X — множество целочисленных решений системы

$$(*) \quad x_1 + x_2 + x_3 = 20, \quad 1 \leq x_1, \quad 0 \leq x_2, \quad 0 \leq x_3.$$

Как показано в задаче 4, $N = |X| = \overline{C}_3^{19} = C_{21}^2 = 210$. $\alpha_1 = \alpha_1(X)$ — множество тех решений (x_1, x_2, x_3) системы $(*)$, для которых $x_1 \geq 10$;

$\alpha_2 = \alpha_2(X)$ — множество тех решений (x_1, x_2, x_3) системы $(*)$, для которых $x_2 \geq 10$;

$\alpha_3 = \alpha_3(X)$ — множество тех решений (x_1, x_2, x_3) системы $(*)$, для которых $x_3 \geq 10$. Тогда $|\alpha_1| = \overline{C}_3^{10} = C_{12}^2 = 66$, т.к. α_1 — множество целочисленных

решений системы

$$x_1 + x_2 + x_3 = 20, 10 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3;$$

$$|\alpha_2| = \overline{C}_3^9 = C_{11}^2 = 55, \text{ т.к. } \alpha_2 \text{ — множество целочисленных решений системы}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 20, 1 \leq x_1, 10 \leq x_2, 0 \leq x_3;$$

$$|\alpha_3| = \overline{C}_3^9 = C_{11}^2 = 55, \text{ т.к. } \alpha_3 \text{ — множество целочисленных решений системы}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 20, 1 \leq x_1, 0 \leq x_2, 10 \leq x_3;$$

$$|\alpha_1 \cap \alpha_2| = \overline{C}_3^0 = C_2^2 = 1, \text{ т.к. } \alpha_1 \cap \alpha_2 \text{ — множество целочисленных решений системы}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 20, 10 \leq x_1, 10 \leq x_2, 0 \leq x_3;$$

$$|\alpha_1 \cap \alpha_3| = \overline{C}_3^0 = C_2^2 = 1, \text{ т.к. } \alpha_1 \cap \alpha_3 \text{ — множество целочисленных решений системы}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 20, 10 \leq x_1, 0 \leq x_2, 10 \leq x_3;$$

$$|\alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \alpha_3| = |\alpha_2 \cap \alpha_3| = 0, \text{ т.к. } \alpha_1 \cap \alpha_2 \text{ — множество целочисленных решений системы}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 20, 1 \leq x_1, 10 \leq x_2, 10 \leq x_3;$$

Таким образом, количество целочисленных решений системы

$$x_1 + x_2 + x_3 = 20, 1 \leq x_1 \leq 9, 0 \leq x_2 \leq 9, 0 \leq x_3 \leq 9$$

равно

$$\begin{aligned} N - (|\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| - |\alpha_1 \cap \alpha_2| - |\alpha_1 \cap \alpha_3| - |\alpha_2 \cap \alpha_3| + |\alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \alpha_3|) = \\ = 210 - (66 + 55 + 55 - 1 - 1) = 210 - 174 = 36. \end{aligned}$$

— количество трёхзначных чисел, сумма цифр которых равна 20.

Варианты индивидуальных заданий

Вариант 1

1. Зал освещается 10-ю лампочками. Каждая из них может гореть, а может не гореть. Сколькими способами может быть организовано освещение зала?
2. Сколько существует пятизначных чисел, первая цифра которых 7?
3. Племя использует латинский алфавит. В словаре племени сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово dbaa?
4. Сколькими способами можно разложить 9 монет различного достоинства по трём карманам?
5. Пусть p_1, p_2, p_3 — различные простые числа. Найти количество различных делителей числа
 - (а) $p_1^2 p_2 p_3^5$;
 - (б) 1400.
6. На полке стоят 6 книг. Сколькими способами можно взять с полки несколько книг, если порядок извлечения книг с полки не важен?
7. Вершины правильного n -угольника занумерованы. Сколько различных замкнутых ломаных, вершинами которых являются все вершины n -угольника, можно построить? (Ломаная может быть самопересекающейся.)
8. Сколько существует способов вытащить 7 карт из колоды, содержащей 52 карты?
9. В колоде 52 карты. Сколько существует бриджевых раздач (из 13 карт), содержащих 3 трефовых, 3 червовых, 2 пиковых и 5 бубновых карт?
10. Из колоды, состоящей из 52 карт, выбрали 10 карт. Определить, в скольких случаях среди них окажутся:
 - (а) пиковая дама;

- (б) все четыре дамы;
- (в) все карты одной масти;
- (г) ни одной дамы;
- (д) ровно одна дама;
- (е) хотя бы одна дама;
- (ж) ровно две дамы;
- (з) ровно два туза и три дамы;
- (и) четыре карты одной масти и шесть карт другой масти;
- (к) все короли и все тузы?

11. На плоскости дано 10 точек. Сколько имеется отрезков с концами в этих точках?
12. Рота состоит из 3 офицеров, 6 сержантов и 60 рядовых. Сколькими способами можно выделить из них отряд, состоящий из одного офицера, двух сержантов и 24 рядовых?
13. Сколько слов можно составить из четырёх букв А и не более чем из трёх букв Б?
14. Сколькими способами можно составить букет из 19 цветов, если в продаже имеются васильки, гвоздики, розы, ромашки и хризантемы?
15. Сколько решений, удовлетворяющих условиям: x_1, x_2 — чётные, x_3, x_4 — нечётные, имеет уравнение

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 38$$

- (а) в целых неотрицательных числах;
 - (б) в целых положительных числах?
16. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 210, не делящихся ни на 6, ни на 10, ни на 15.

17. Переплётчик должен переплести 6 различных книг в красный, жёлтый и зелёный переплёты. Сколькими способами он может это сделать, если в каждый цвет должна быть переплетена хотя бы одна книга?

Вариант 2

1. Слово — это произвольная последовательность букв. Сколько можно составить пятибуквенных слов русского алфавита, содержащих хотя бы одну букву Л?
2. Сколько пятизначных чисел оканчиваются на 7?
3. Племя использует латинский алфавит. В словаре племени сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово daac?
4. В лифт девятиэтажного дома на 1-ом этаже вошли 4 человека. Сколькими способами они могут выйти из лифта, если известно, что первую остановку лифт сделал на пятом этаже?
5. Пусть p_1, p_2, p_3 — различные простые числа. Найти количество различных делителей числа
 - (а) $p_1 p_2 p_3^4$;
 - (б) 75^8 .
6. Человек имеет 9 друзей и в течение нескольких дней приглашает их в гости так, что компания ни разу не повторяется. Сколько дней он может так делать?
7. Сколькими способами можно распределить по 15 вагонам 15 проводников, если за каждым вагоном закрепляется один проводник?
8. Сколько существует способов вытащить 8 карт из колоды, содержащей 52 карты?
9. В колоде 52 карты. Сколько существует бриджевых раздач (из 13 карт), содержащих 4 трефовых, 1 червовую, 3 пиковых и 5 бубновых карт?

10. Из колоды, состоящей из 52 карт, выбрали 11 карт. Определить, в скольких случаях среди них окажутся:
- (а) бубновый валет;
 - (б) все четыре вальта;
 - (в) все карты одной масти;
 - (г) ни одного вальта;
 - (д) ровно один валет;
 - (е) хотя бы один валет;
 - (ж) ровно три вальта;
 - (з) ровно два вальта и три дамы;
 - (и) четыре карты одной масти и семь карт другой масти;
 - (к) все короли и все дамы?
11. На прямой отмечено 12 точек, а на параллельной ей прямой 7 точек. Сколько существует четырёхугольников с вершинами в этих точках?
12. Сколькими способами из 12 девушек и 10 юношей можно выбирать команду, состоящую из 5 человек, если в неё должно войти не более трёх юношей?
13. Сколькими способами можно поселить 7 студентов в три комнаты: одноместную, двухместную и четырёхместную?
14. Сколькими способами можно разделить 13 одинаковых пирожных между Таней, Ваней и Петей, если Таня должна получить не менее одного пирожного, Ваня — не менее трёх, а Петя — не более двух пирожных?
15. Сколько решений имеет система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 45, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 17 \end{cases}$$

- (а) в целых неотрицательных числах;
- (б) в целых положительных числах?

16. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 210, не делящихся ни на 4, ни на 6, ни на 21.
17. Маляр должен покрасить 7 скамеек на детской площадке в белый, голубой и розовый цвета. Сколькими способами он может это сделать, если в каждый цвет должна быть покрашена хотя бы одна скамейка?

Вариант 3

1. Сколькими способами Оля может составить комплект из блузки, юбки и туфель, если в её гардеробе 6 блузок, 4 юбки и 5 пар туфель?
2. Сколько существует пятизначных чисел, которые делятся на 5?
3. Племя использует латинский алфавит. В словаре племени сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово cbbb?
4. С понедельника по пятницу доктор должен принять 7 человек. Ежедневно он может принять любое количество пациентов. Сколькими способами доктор может распределить пациентов по дням недели, если порядок приёма пациентов в течение дня не имеет значения?
5. Пусть p_1, p_2, p_3 — различные простые числа. Найти количество различных делителей числа
 - (а) $p_1 p_2 p_3$;
 - (б) 1000^3 .
6. Лестница состоит из 7 ступенек, не считая верхней и нижней площадок. Спускаясь, можно перепрыгивать через несколько ступенек. Сколькими способами можно спуститься по этой лестнице?
7. Сколькими способами можно перетасовать колоду из 36 карт?
8. Сколько существует способов вытащить 9 карт из колоды, содержащей 52 карты?
9. В колоде 52 карты. Сколько существует бриджевых раздач (из 13 карт), содержащих 4 трефовых, 2 червовых, 2 пиковых и 5 бубновых карт?

10. Из колоды, состоящей из 52 карт, выбрали 12 карт. Определить, в скольких случаях среди них окажутся:
- (а) червовый король;
 - (б) все четыре короля;
 - (в) все карты одной масти;
 - (г) ни одного короля;
 - (д) ровно один король;
 - (е) хотя бы один король;
 - (ж) ровно два короля;
 - (з) ровно два туза и три вальта;
 - (и) шесть карт одной масти и шесть карт другой масти;
 - (к) все короли и все дамы?
11. Для участия в лотерее "Спортлото" нужно указать 6 номеров из имеющихся на карточке 45 номеров. Сколькими способами можно заполнить карточку "Спортлото"? Каково число возможных вариантов заполнения карточки, при которых могло быть угадано ровно 3 номера?
12. Из трёх математиков и семи экономистов нужно составить комиссию из четырёх человек. Сколькими способами можно составить эту комиссию, если в неё должен входить хотя бы один математик?
13. Найти число слов в алфавите из пяти символов, в которые каждый символ входит ровно два раза.
14. Найти число слагаемых в разложении $(x + y + z)^{10}$ после приведения подобных членов.
15. Сколько решений имеет система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 36, \\ x_1 \geq 5, x_2 \geq 4, x_3 \geq 3, x_4 \geq 2 \end{cases}$$

- (а) в целых неотрицательных числах;

(б) в целых положительных числах?

16. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 210, не делящихся ни на 4, ни на 6, ни на 10.
17. Сколькими способами можно расселить 6 туристов по трём домикам так, чтобы ни один домик не остался пустым?

Вариант 4

1. На доске написаны 7 существительных, 5 глаголов и 4 прилагательных. Для предложения нужно выбрать по одному слову каждой из представленных частей речи. Сколькими способами это можно сделать?
2. Сколько пятизначных чисел делятся на 4?
3. Племя использует латинский алфавит. В словаре племени сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово саас?
4. Сколькими способами можно разместить 30 различных книг на четырёх полках, если каждая полка может вместить все 30 книг, а порядок расположения книг на полке не имеет значения?
5. Пусть p_1, p_2, p_3 — различные простые числа. Найти количество различных делителей числа
 - (а) $p_1^5 p_2 p_3^2$;
 - (б) $3^8 5^3 14^9$.
6. В столовой предложено на выбор 6 блюд. Каждый день студент берёт некоторый набор блюд, причём этот набор должен быть отличен от всех наборов, которые он брал в предыдущие дни. Какое наибольшее количество дней студент сможет питаться по таким правилам?
7. Сколькими способами можно перетасовать колоду из 52 карт?
8. Сколько существует способов вытащить 10 карт из колоды, содержащей 52 карты?

9. В колоде 52 карты. Сколько существует бриджевых раздач (из 13 карт), содержащих 5 трефовых, 5 червовых, 2 пиковых и 1 бубновую карту?
10. Из колоды, состоящей из 52 карт, выбрали 13 карт. Определить, в скольких случаях среди них окажутся:
- (а) трефовый туз;
 - (б) все четыре туза;
 - (в) все карты одной масти;
 - (г) ни одного туза;
 - (д) ровно один туз;
 - (е) хотя бы один туз;
 - (ж) ровно два туза;
 - (з) ровно два туза и три короля;
 - (и) восемь карт одной масти и пять карт другой масти;
 - (к) все валеты и все тузы?
11. У Нины 8 разных шоколадных конфет, а у Коли 10 разных карамелек. Сколькими способами они могут обменяться друг с другом шестью конфетами (6 на 6)?
12. В шахматном кружке занимаются 3 девочки и 8 мальчиков. Сколькими способами можно из них составить команду из четырёх человек, если в неё обязательно должна входить хотя бы одна девочка?
13. Сколькими способами можно разбить 15 человек на три разные команды по 5 человек в каждой?
14. В продаже есть ручки 4-х видов. Сколькими способами можно купить 10 ручек?
15. Сколько решений имеет система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 23, \\ x_1 + x_2 + x_3 > 3 \end{cases}$$

(а) в целых неотрицательных числах;

(б) в целых положительных числах?

16. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 210, не делящихся ни на 4, ни на 6, ни на 14.
17. Сколькими способами можно расселить 8 гостей по четырём комнатам так, чтобы ни одна из комнат не осталась пустой?

Вариант 5

1. Сколькими способами можно купить конверт с маркой, если на почте продаются 7 видов конвертов и 6 видов марок?
2. Сколько существует пятизначных чисел, которые делятся на 8?
3. Племя использует латинский алфавит. В словаре племени сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово bada?
4. В поезде 10 вагонов. Сколькими способами можно распределить по вагонам пятерых человек?
5. Пусть p_1, p_2, p_3 — различные простые числа. Найти количество различных делителей числа
 - (а) $p_1 p_2^4 p_3$;
 - (б) 10^{100} .
6. У человека 32 зуба. Может ли случиться так, что в России не найдётся двух человек с одинаковым набором зубов?(Имеется в виду наличие или отсутствие зуба на каждой из 32 позиций.)
7. Сколькими способами можно перетасовать колоду из 52 карт так, чтобы чёрные и красные карты чередовались?
8. Сколько существует способов вытащить 14 карт из колоды, содержащей 52 карты?

9. В колоде 52 карты. Сколько существует бриджевых раздач (из 13 карт), содержащих 3 трефовых, 3 червовых, 2 пиковых и 5 бубновых карт?
10. Из колоды, состоящей из 52 карт, выбрали 8 карт. Определить, в скольких случаях среди них окажутся:
- (а) бубновая дама;
 - (б) все четыре дамы;
 - (в) все карты одной масти;
 - (г) ни одной дамы;
 - (д) ровно одна дама;
 - (е) хотя бы одна дама;
 - (ж) ровно две дамы;
 - (з) ровно три туза и три короля;
 - (и) четыре карты одной масти и четыре карты другой масти;
 - (к) все дамы и все тузы?
11. В классе 30 человек. Сколькими способами учитель может назначить четырёх дежурных при условии, что Петров и Сидоров не могут дежурить одновременно?
12. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых участвуют три чётных цифры и три нечётных?
13. Сколькими способами можно разместить 12 человек по трём комнатам так, чтобы в первых двух было по пять человек, а в третьей — 2 человека?
14. Сколькими способами можно разделить 17 одинаковых монет между 8 нумизматами, если каждому должна достаться хотя бы одна монета?
15. Сколько решений имеет система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 22, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \end{cases}$$

- (а) в целых неотрицательных числах;

(б) в целых положительных числах?

16. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 210, не делящихся ни на 6, ни на 9, ни на 15.
17. Пятеро друзей собрались на празднование Нового года. Каждый пришёл с подарком. Сколько существует способов раздачи подарков, при которых каждый из друзей получает не свой подарок?

Вариант 6

1. В магазине продаются 5 видов чашек, 4 вида блюдец и 7 видов чайных ложек. Все предметы разные. Сколькими способами можно купить комплект из чашки, блюда и ложки?
2. Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых используются только цифры 1 и 2?
3. Племя использует латинский алфавит. В словаре племени сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово cbbd?
4. В отделе работает 9 сотрудников. По итогам каждого месяца работы ровно один (лучший) сотрудник получает премию. Сколько можно составить различных вариантов годового графика выплаты премий?
5. Пусть p_1, p_2, p_3 — различные простые числа. Найти количество различных делителей числа
 - (а) $p_1 p_2^3 p_3^4$;
 - (б) $2^3 3^7 5^{11}$.
6. Сколько всего букетов можно составить из 10 различных цветов? Сколько среди них будет букетов с нечётным количеством цветов?
7. Сколькими способами можно перетасовать колоду из 36 карт так, чтобы чёрные и красные карты чередовались?
8. Сколько существует способов вытащить 9 карт из колоды, содержащей 52 карты?

9. В колоде 52 карты. Сколько существует бриджевых раздач (из 13 карт), содержащих 4 трефовых, 4 червовых, 4 пиковых и 1 бубновую карту?
10. Из колоды, состоящей из 52 карт, выбрали 13 карт. Определить, в скольких случаях среди них окажутся:
- (а) червовый валет;
 - (б) все четыре вальта;
 - (в) все карты одной масти;
 - (г) ни одного вальта;
 - (д) ровно один валет;
 - (е) хотя бы один валет;
 - (ж) ровно два вальта;
 - (з) ровно четыре туза и три короля;
 - (и) четыре карты одной масти и девять карт другой масти;
 - (к) все шестёрки и все тузы?
11. Сколькими способами можно выписать в ряд цифры от 0 до 9 так, чётные цифры шли в порядке возрастания, а нечётные — в порядке убывания? Например, 0, 9, 7, 2, 4, 5, 3, 6, 1, 8.
12. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых участвуют две чётных цифры и четыре нечётных?
13. У бедного студента осталось риса на две порции, гречки на три порции и овсянки на две порции. Сколько у студента способов съесть это на завтраки в течение недели по одной порции в день?
14. Сколькими способами 4 человека могут распределить между собой 11 яблок?
15. Сколько решений имеет система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 38, \\ x_1 + x_2 = x_3 + x_4 + x_5 \end{cases}$$

- (а) в целых неотрицательных числах;
- (б) в целых положительных числах?
16. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 210, не делящихся ни на 9, ни на 12, ни на 15.
17. Сколько существует перестановок чисел $1, 2, 3, \dots, n$, в которых ровно два элемента стоят на своих исходных местах?

Вариант 7

1. На вершину горы ведут 9 дорог. Сколькими способами можно подняться на гору и спуститься с неё?
2. Сколько существует пятизначных чисел, все цифры которых чётны?
3. Племя использует латинский алфавит. В словаре племени сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово *abbd*?
4. Каждая из трёх посылок может содержать не более 10 книг. Сколькими способами можно разложить 11 различных книг по трём посылкам? (Некоторые посылки могут не содержать книг.)
5. Пусть p_1, p_2, p_3 — различные простые числа. Найти количество различных делителей числа
- (а) $p_1^2 p_2 p_3$;
- (б) 68^{10} .
6. У крокодила 68 зубов. Доказать, что среди 16^{17} крокодилов можно не найти двух крокодилов с одинаковым набором зубов.
7. Сколькими способами можно перетасовать колоду из 52 карт так, чтобы четыре подряд идущие карты были всех четырех мастей?
8. Сколько существует способов вытащить 10 карт из колоды, содержащей 52 карты?

9. В колоде 52 карты. Сколько существует бриджевых раздач (из 13 карт), содержащих 3 трефовых, 1 червовую и 9 пиковых карт?
10. Из колоды, состоящей из 52 карт, выбрали 11 карт. Определить, в скольких случаях среди них окажутся:
- (а) пиковый туз;
 - (б) все четыре туза;
 - (в) все карты одной масти;
 - (г) ни одного туза;
 - (д) ровно одного туза;
 - (е) хотя бы один туз;
 - (ж) ровно два туза;
 - (з) ровно два короля и три дамы;
 - (и) пять карт одной масти и шесть карт другой масти;
 - (к) все короли и все дамы?
11. Сколько существует шестизначных чисел, записанных с помощью цифр 4 и 5, в записи которых число четвёрок больше числа пятёрок?
12. Сколько существует шестизначных чисел, первые три цифры в записи которых образуют возрастающую последовательность, а последние три цифры образуют убывающую последовательность?
13. Сколькими способами можно разбить $2n$ человек на пары? Индукцией по n доказать, что количество этих способов выражается нечётным числом.
14. Сколькими способами 4 человека могут распределить между собой 10 одинаковых яблок, 1 апельсин, 1 киви и 1 банан?
15. Сколько решений имеет система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 43, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 15 \end{cases}$$

- (а) в целых неотрицательных числах;

(б) в целых положительных числах?

16. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 210, не делящихся ни на 4, ни на 6, ни на 14.
17. Сколько существует перестановок чисел $1, 2, 3, \dots, n$, в которых ровно четыре элемента стоят на своих исходных местах?

Вариант 8

1. Игральную кость бросают трижды. Среди последовательностей результатов есть такие, у которых хотя бы один раз встречается шестёрка. Сколько их?
2. Сколько существует пятизначных чисел, все цифры которых нечётны?
3. Племя использует латинский алфавит. В словаре племени сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово ddab?
4. Поезду, в котором находятся 15 пассажиров, предстоит сделать 10 остановок. Сколькими способами могут выйти пассажиры на этих остановках?
5. Пусть p_1, p_2, p_3 — различные простые числа. Найти количество различных делителей числа
 - (а) $p_1^3 p_2 p_3^5$;
 - (б) $121^{15} 34$.
6. Человек имеет 10 друзей и в течение нескольких дней приглашает их в гости так, что компания ни разу не повторяется. Сколько дней он может так делать?
7. Сколькими способами можно перетасовать колоду из 36 карт так, чтобы четыре подряд идущие карты были всех четырех мастей?
8. Сколько существует способов вытащить 5 карт из колоды, содержащей 52 карты?
9. В колоде 52 карты. Сколько существует бриджевых раздач (из 13 карт), содержащих 8 трефовых, 2 червовых, 1 пиковую и 2 бубновых карты?

10. Из колоды, состоящей из 52 карт, выбрали 13 карт. Определить, в скольких случаях среди них окажутся:
- (а) червовый валет;
 - (б) все четыре вальта;
 - (в) все карты одной масти;
 - (г) ни одного вальта;
 - (д) ровно один валет;
 - (е) хотя бы один валет;
 - (ж) ровно два вальта;
 - (з) ровно три туза и четыре дамы;
 - (и) семь карт одной масти и шесть карт другой масти;
 - (к) все десятки и все тузы?
11. Сколько существует шестизначных чисел, у которых каждая последующая цифра меньше предыдущей?
12. Сколько существует шестизначных чисел, первые три цифры в записи которых образуют убывающую последовательность, а последние три цифры образуют возрастающую последовательность?
13. В группе 25 человек. Сколькими способами группу можно разбить на две подгруппы составом в 12 и 13 человек для прохождения производственной практики?
14. Сколько решений имеет неравенство

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 8$$

- (а) в целых неотрицательных числах;
 - (б) в целых положительных числах?
15. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 210, не делящихся ни на 12, ни на 15, ни на 20.

16. В группе 17 человек. Сколькими способами её можно разделить на три подгруппы из трёх, пяти и девяти человек?
17. Сколько существует перестановок чисел $1, 2, 3, \dots, n$, в которых 1 и 2 не стоят на своих исходных местах?

Вариант 9

1. Игральную кость бросают трижды. Среди последовательностей результатов есть такие, у которых хотя бы один раз встречается шестёрка или тройка. Сколько их?
2. Сколько существует пятизначных чисел, все цифры которых имеют одинаковую чётность?
3. Племя использует латинский алфавит. В словаре племени сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово *dsac*?
4. В лифт девятиэтажного дома на 1-ом этаже вошли 3 человека. Сколькими способами они могут выйти из лифта, если известно, что первую остановку лифт сделал на четвёртом этаже?
5. Пусть p_1, p_2, p_3 — различные простые числа. Найти количество различных делителей числа
 - (а) $p_1 p_2 p_3^8$;
 - (б) $169^3 51$.
6. На полке стоят 7 книг. Сколькими способами можно взять с полки несколько книг, если порядок извлечения книг с полки не важен?
7. Сколько имеется десятизначных чисел, в записи которых есть хотя бы две одинаковые цифры?
8. Сколько существует способов вытащить 4 карты из колоды, содержащей 52 карты?
9. В колоде 52 карты. Сколько существует бриджевых раздач (из 13 карт), содержащих 7 трефовых, 4 червовых, 1 пиковую и 1 бубновую карту?

10. Из колоды, состоящей из 52 карт, выбрали 10 карт. Определить, в скольких случаях среди них окажутся:
- (а) пиковый король;
 - (б) все четыре короля;
 - (в) все карты одной масти;
 - (г) ни одного короля;
 - (д) ровно один король;
 - (е) хотя бы один король;
 - (ж) ровно два короля;
 - (з) ровно три туза и три дамы;
 - (и) пять карт одной масти и пять карт другой масти;
 - (к) все девятки и все вальты?
11. Сколько существует семизначных чисел, сумма цифр которых равна 4?
12. Имеется 20 человек — 10 юношей и 10 девушек. Сколько существует способов составить из них компанию, в которой было одинаковое число юношей и девушек?
13. Сколько различных чисел можно получить, переставляя цифры числа 22345626236634?
14. Имеется m белых шаров и n чёрных, $m \geq n$. Сколькими способами можно разложить все шары в ряд так, чтобы никакие чёрные шары не лежали рядом? Рассмотреть два случая: все шары одного цвета одинаковые и все шары одного цвета разные. Перечислить все возможные способы взаимного расположения при $m = 3$ и $n = 2$.
15. Сколько решений имеет неравенство

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 7$$

- (а) в целых неотрицательных числах;
- (б) в целых положительных числах;

(в) в числах 1, 2?

16. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 210, не делящихся ни на 8, ни на 12, ни на 20.
17. Сколько существует перестановок чисел $1, 2, 3, \dots, n$, в которых ни один из элементов 1, 2, 3 не стоит на своём месте?

Вариант 10

1. Бросают две игральные кости.
 - (а) Сколькими способами они могут упасть?
 - (б) Сколькими способами они могут упасть так, что на каждой грани выпадет чётное число очков?
2. Сколько существует пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево?(Например, 54345, 60206 и т.д.)
3. Племя использует латинский алфавит. В словаре племени сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово cbba?
4. Сколькими способами можно расселить 7 гостей по четырём комнатам?(Некоторые комнаты при этом могут остаться пустыми.)
5. Пусть p_1, p_2, p_3 — различные простые числа. Найти количество различных делителей числа
 - (а) $p_1^2 p_2 p_3^7$;
 - (б) 2500.
6. Лестница состоит из 6 ступенек, не считая верхней и нижней площадок. Спускаясь, можно перепрыгивать через несколько ступенек. Сколькими способами можно спуститься по этой лестнице?
7. Сколькими способами 7 человек могут разместиться в очереди, если А не должен находиться рядом с В?
8. Сколько существует способов вытащить 5 карт из колоды, содержащей 52 карты?

9. В колоде 52 карты. Сколько существует бриджевых раздач (из 13 карт), содержащих 8 трефовых, 3 червовых и 2 пиковых карты?
10. Из колоды, состоящей из 52 карт, выбрали 8 карт. Определить, в скольких случаях среди них окажутся:
- (а) бубновый туз;
 - (б) все четыре туза
 - (в) все карты одной масти;
 - (г) ни одного туза;
 - (д) ровно один туз;
 - (е) хотя бы один туз;
 - (ж) ровно два туза;
 - (з) ровно два короля и три вальта;
 - (и) четыре карты одной масти и четыре карты другой масти;
 - (к) все дамы и все восьмёрки?
11. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых участвуют три чётных и три нечётных цифры?(Все цифры разные.)
12. На школьном вечере присутствуют 13 юношей и 10 девушек. Сколькими способами можно выбрать из них 6 пар для танца?
13. Сколько буквенных последовательностей можно получить, переставляя буквы в слове ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ?
14. Сколькими способами можно разместить 9 кроватей в четырёх комнатах, если требуется, чтобы в каждой комнате была хотя бы одна кровать?
15. Сколько решений имеет неравенство

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 6$$

- (а) в целых неотрицательных числах;
- (б) в целых положительных числах?

16. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 210, не делящихся ни на 6, ни на 12, ни на 14.
17. Сколько существует перестановок чисел $1, 2, 3, \dots, n$, в которых, по крайней мере, 2 элемента стоят на своих местах?

Вариант 11

1. Бросают две игральные кости. Сколькими способами они могут упасть? Сколькими способами они могут упасть так, что на каждой грани выпадет нечётное число очков?
2. Сколько существует пятизначных чисел, в запись которых входит цифра 5?
3. Племя использует латинский алфавит. В словаре племени сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово dscb?
4. Сколькими способами может произойти голосование по выбору председателя в обществе из 20 членов, если каждый голосует за одного человека (быть может, и за себя)?
5. Пусть p_1, p_2, p_3 — различные простые числа. Найти количество различных делителей числа
 - (а) $p_1^3 p_2^2 p_3^7$;
 - (б) 28^{11} .
6. В столовой предложено на выбор 7 блюд. Каждый день студент берёт некоторый набор блюд, причём этот набор должен быть отличен от всех наборов, которые он брал в предыдущие дни. Какое наибольшее количество дней студент сможет питаться по таким правилам?
7. Сколько различных (возможно бессмысленных) слов разной длины можно составить из букв слова ЛОЗА, если буквы в слове не должны повторяться?
8. Сколько существует способов вытащить 2 карты из колоды, содержащей 52 карты?

9. В колоде 52 карты. Сколько существует бриджевых раздач (из 13 карт), содержащих 5 трефовых, 2 червовых, 3 пиковых и 3 бубновых карты?
10. Из колоды, состоящей из 52 карт, выбрали 16 карт. Определить, в скольких случаях среди них окажутся:
- (а) трефовая дама;
 - (б) все четыре дамы;
 - (в) все карты одной масти;
 - (г) ни одной дамы;
 - (д) ровно одна дама;
 - (е) хотя бы одна дама;
 - (ж) ровно две дамы;
 - (з) ровно два короля и три дамы;
 - (и) десять карт одной масти и шесть карт другой масти;
 - (к) все четвёрки и все тузы?
11. Сколькими способами можно составить комиссию из 3 человек, выбирая её членов из 8 супружеских пар, но так, чтобы члены одной семьи не входили в комиссию одновременно?
12. Сколькими способами из 12 юношей и 14 девушек можно выбрать 4 пары для танца?
13. Сколько существует способов разложить 16 различных шаров по восьми различным ящикам так, чтобы в каждом ящике было по два шара?
14. Ящики занумерованы числами от 1 до 7. Сколькими способами можно разложить по этим ящикам 18 одинаковых шаров?
15. Сколько решений имеет неравенство $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 5$
- (а) в целых неотрицательных числах;
 - (б) в целых положительных числах?
16. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 210, не делящихся ни на 8, ни на 12, ни на 18.

17. Переплётчик должен переплести 7 различных книг в красный, жёлтый и зелёный переплёты. Сколькими способами он может это сделать, если в каждый цвет должна быть переплетена хотя бы одна книга?

Вариант 12

1. Бросают две игральные кости. Сколькими способами они могут упасть? Сколькими способами они могут упасть так, что на каждой грани выпадет число очков одинаковой чётности?
2. Сколько существует пятизначных чисел, которые делятся на 4 и состоят из цифр 5, 2, 3, 4?
3. Племя использует латинский алфавит. В словаре племени сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово dbab?
4. В отделе работает 10 сотрудников. По итогам каждого месяца работы ровно один (лучший) сотрудник получает премию. Сколько можно составить различных вариантов годового графика выплаты премий?
5. Пусть p_1, p_2, p_3 — различные простые числа. Найти количество различных делителей числа
 - (а) $p_1^2 p_2 p_3^4$;
 - (б) 999^{10} .
6. У человека 32 зуба. Может ли случиться так, что в нашем городе не найдётся двух человек с одинаковым набором зубов?(Имеется в виду наличие или отсутствие того или иного зуба на месте)
7. Сколькими способами 11 человек могут выстроиться в очередь, если Иванов, Петров и Сидоров хотят стоять подряд (в произвольном порядке)?
8. Сколько существует способов вытащить 32 карты из колоды, содержащей 52 карты?
9. В колоде 52 карты. Сколько существует бриджевых раздач (из 13 карт), содержащих 5 трефовых, 3 червовых, 1 пиковую и 4 бубновых карты?

10. Из колоды, состоящей из 52 карт, выбрали 17 карт. Определить, в скольких случаях среди них окажутся:
- (а) трефовый король;
 - (б) все четыре короля;
 - (в) все карты одной масти;
 - (г) ни одного короля;
 - (д) ровно один король;
 - (е) хотя бы один король;
 - (ж) ровно два короля;
 - (з) ровно два вальта и три тройки;
 - (и) четыре карты одной масти и тринадцать карт другой масти;
 - (к) все пятёрки, все тузы и все короли?
11. Сколькими способами можно разделить колоду из 36 карт пополам так, чтобы в каждой половине было по 2 туза?
12. У Вани 10 марок, а у Пети 12 марок. Сколькими способами они могут обменяться друг с другом четырьмя марками (4 на 4)?
13. Есть 11 цветков разного цвета. Сколькими способами можно раздать их трём девочкам так, чтобы одной досталось 5 цветков, а другим по 3 цветка?
14. Сколькими способами можно разделить 90 одинаковых акций между 6-ю людьми так, чтобы каждому досталась хотя бы одна акция?
15. Сколько решений имеет уравнение

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

- (а) в целых неотрицательных числах;
 - (б) в целых положительных числах?
16. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 210, не делящихся ни на 6, ни на 9, ни на 12.

17. Маляр должен покрасить 6 скамеек на детской площадке в белый, голубой и розовый цвета. Сколькими способами он может это сделать, если в каждый цвет должна быть покрашена хотя бы одна скамейка?

Вариант 13

1. В магазине продаются 5 видов чашек, 4 вида блюдец и 7 видов чайных ложек. Все предметы разные. Сколькими способами можно купить два предмета с разными названиями?
2. Сколько существует пятизначных чисел, которые делятся на 4 и состоят из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, причём каждая цифра может встречаться в записи числа только один раз?
3. Племя использует латинский алфавит. В словаре племени сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово *ssab*?
4. Переплётчик должен переплести 13 разных книг в красный, зелёный и синий переплёты. Сколькими способами он может это сделать?
5. Пусть p_1, p_2, p_3 — различные простые числа. Найти количество различных делителей числа
 - (а) $p_1^4 p_2 p_3^5$;
 - (б) $3^7 5^3 14$.
6. Сколько всего букетов можно составить из 11 различных цветов? Сколько среди них будет букетов с нечётным количеством цветов?
7. Сколькими способами 12 человек могут выстроиться в очередь, если Иванов и Петров не хотят стоять в очереди рядом друг с другом?
8. Сколько существует способов вытащить 31 карту из колоды, содержащей 52 карты?
9. В колоде 52 карты. Сколько существует бриджевых раздач (из 13 карт), содержащих 5 трефовых, 2 червовых, 2 пиковых и 4 бубновых карты?

10. Из колоды, состоящей из 52 карт, выбрали 15 карт. Определить, в скольких случаях среди них окажутся:
- (а) червовый валет;
 - (б) все четыре вальта;
 - (в) все карты одной масти;
 - (г) ни одного вальта;
 - (д) ровно один валет;
 - (е) хотя бы один валет;
 - (ж) ровно два вальта;
 - (з) ровно три туза и три восьмёрки;
 - (и) четыре карты одной масти и одиннадцать карт другой масти;
 - (к) все короли, все тузы и все дамы?
11. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды (52 карты) 6 карт так, чтобы были представители только одной масти?
12. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых первые три позиции заняты различными нечётными цифрами, а последние три — различными чётными?
13. Определить количество различных слов, получаемых перестановкой букв в слове ПАПАРАЦЦИ.
14. С понедельника по пятницу доктор должен осуществить 12 приёмов пациентов. Сколькими способами можно составить расписание приёмов, если ежедневно он может принимать любое количество пациентов?
15. Сколько решений имеет уравнение

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$$

- (а) в целых неотрицательных числах;
- (б) в целых положительных числах?

16. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 210, не делящихся ни на 6, ни на 12, ни на 15.
17. Сколькими способами можно расселить 8 туристов по трём домикам так, чтобы ни один домик не остался пустым?

Вариант 14

1. В магазине продаются 5 видов чашек, 4 вида блюдец и 7 видов чайных ложек. Все предметы разные. Сколькими способами можно купить два комплекта, состоящего из чашки, блюдца и ложки?
2. Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых некоторая цифра встречается ровно 4 раза?
3. Племя использует латинский алфавит. В словаре племени сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово `cbbc`?
4. Каждая из трёх посылок может содержать не более 9 книг. Сколькими способами можно распределить 10 различных книг по трём посылкам? (Некоторые посылки могут не содержать книг.)
5. Пусть p_1, p_2, p_3 — различные простые числа. Найти количество различных делителей числа
 - (а) $p_1^2 p_2^3 p_3^2$;
 - (б) 100^{10} .
6. У крокодила 68 зубов. Доказать, что среди 16^{17} крокодилов можно не найти двух крокодилов с одинаковым набором зубов. (Имеется в виду наличие или отсутствие зуба на той или иной позиции)
7. Сколькими способами 11 человек могут выстроиться в очередь, если Иванов хочет стоять рядом с Петровым?
8. Сколько существует способов вытащить 33 карты из колоды, содержащей 52 карты?

9. В колоде 52 карты. Сколько существует бриджевых раздач (из 13 карт), содержащих 1 трефовую, 2 червовых, 5 пиковых и 5 бубновых карт?
10. Из колоды, состоящей из 52 карт, выбрали 16 карт. Определить, в скольких случаях среди них окажутся:
- (а) червовый король;
 - (б) все четыре короля;
 - (в) все карты одной масти;
 - (г) ни одного короля;
 - (д) ровно один король;
 - (е) хотя бы один король;
 - (ж) ровно две дамы;
 - (з) ровно два туза и три дамы;
 - (и) четыре карты одной масти и двенадцать карт другой масти;
 - (к) все короли, все четвёрки и все тузы?
11. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды (52 карты) 6 карт так, чтобы среди них был ровно один туз?
12. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых все цифры разные и нечётные цифры чередуются с чётными?
13. Сколькими способами можно распределить 13 задач между четырьмя студентами так, чтобы один получил 4 задачи, а остальные — по 3 задачи?
14. Сколькими способами можно выложить в ряд 5 синих, 5 красных и 5 зелёных шаров так, чтобы никакие зелёные шары не лежали рядом?
15. Сколько решений имеет уравнение

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$$

- (а) в целых неотрицательных числах;
- (б) в целых положительных числах;

(в) в числах 0, 1, 2?

16. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 210, не делящихся ни на 4, ни на 14, ни на 20.
17. Сколькими способами можно расселить 7 гостей по четырём комнатам так, чтобы ни одна из комнат не осталась пустой?

Вариант 15

1. Петя и Коля — начинающие коллекционеры. У Пети 10 марок, а у Коли 8 марок. Все марки разные. Сколькими способами они могут осуществить обмен одной марки на одну марку?
2. Сколько существует пятизначных чисел, которые не содержат цифру 2 в своей записи?
3. Племя использует латинский алфавит. В словаре племени сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово *saad*?
4. Сколькими способами можно разложить 10 монет различного достоинства по четырём кошелькам?
5. Пусть p_1, p_2, p_3 — различные простые числа. Найти количество различных делителей числа
 - (а) $p_1^7 p_2 p_3^3$;
 - (б) 450^4 .
6. На полке стоят 9 книг. Сколькими способами можно взять с полки несколько книг, если порядок извлечения книг с полки не важен?
7. Сколькими способами 11 человек могут выстроиться в очередь, если Иванов и Петров не хотят стоять друг за другом?
8. Сколько существует способов вытащить 34 карты из колоды, содержащей 52 карты?
9. В колоде 52 карты. Сколько существует бриджевых раздач (из 13 карт), содержащих 1 трефовую, 3 червовых, 4 пиковых и 5 бубновых карт?

10. Из колоды, состоящей из 52 карт, выбрали 15 карт. Определить, в скольких случаях среди них окажутся:
- (а) пиковый туз;
 - (б) все четыре туза;
 - (в) все карты одной масти;
 - (г) ни одного туза;
 - (д) ровно один туз;
 - (е) хотя бы один туз;
 - (ж) ровно два туза;
 - (з) ровно три туза и три короля;
 - (и) четыре карты одной масти и одиннадцать карт другой масти;
 - (к) все короли, все девятки и все тузы?
11. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды (52 карты) 6 карт так, чтобы среди них был хотя бы один туз?
12. Рота состоит из 3 офицеров, 6 сержантов и 44 рядовых. Сколькими способами можно выделить из них отряд, состоящий из одного офицера, трёх сержантов и 20 рядовых?
13. У продавца антиквариата 15 различных монет. Нумизматы А, Б, В, Г купили эти монеты: А купил 4 монеты, Б — 5 монет, В — 3 монеты и Г — 3 монеты. Сколькими способами они могли осуществить свои покупки?
14. Сколькими способами m пассажиров могут выйти на n остановках? (Учитывается лишь количество пассажиров, вышедших на каждой остановке.)
15. Сколько решений, удовлетворяющих условиям: x_1, x_2 — чётные, x_3, x_4 — нечётные, имеет уравнение

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 40$$

- (а) в целых неотрицательных числах;
- (б) в целых положительных числах?

16. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 210, не делящихся ни на 15, ни на 21, ни на 35.
17. Четверо друзей собрались на празднование Нового года. Каждый пришёл с подарком. Сколько существует способов раздачи подарков, при которых
- (а) каждый из друзей получает не свой подарок;
 - (б) каждый из друзей обменивается с кем-нибудь подарками?

Вариант 16

1. Имеется материя пяти различных цветов. Сколькими способами можно сделать трёхцветный флаг с полосками одинаковой ширины, если все полосы на флаге должны быть разных цветов?
2. Сколько существует чётных пятизначных чисел, все цифры в записи которых различны?
3. Племя использует латинский алфавит. В словаре племени сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово *daac*?
4. В лифт девятиэтажного дома на 1-ом этаже вошли 3 человека. Сколькими способами они могут выйти из лифта, если известно, что первую остановку лифт сделал на шестом этаже?
5. Пусть p_1, p_2, p_3 — различные простые числа. Найти количество различных делителей числа
 - (а) $p_1^2 p_2^3 p_3^4$;
 - (б) 1620^5 .
6. Человек имеет 11 друзей и в течение нескольких дней приглашает их в гости так, что компания ни разу не повторяется. Сколько дней он может так делать?
7. Сколько существует способов размещения 12 человек за круглым столом, если А не должен сидеть рядом с В?

8. Сколько существует способов вытащить 35 карт из колоды, содержащей 52 карты?
9. В колоде 52 карты. Сколько существует бриджевых раздач (из 13 карт), содержащих 1 трефовую, 4 червовых, 4 пиковых и 4 бубновых карт?
10. Из колоды, состоящей из 52 карт, выбрали 14 карт. Определить, в скольких случаях среди них окажутся:
- (а) пиковый валет;
 - (б) все четыре вальта;
 - (в) все карты одной масти;
 - (г) ни одного вальта;
 - (д) ровно один валет;
 - (е) хотя бы один валет;
 - (ж) ровно два вальта;
 - (з) ровно три туза и три шестёрки;
 - (и) три карты одной масти и одиннадцать карт другой масти;
 - (к) все короли, все дамы и все тузы?
11. Сколькими способами можно переставить буквы слова ИВОЛГА так, чтобы и гласные, и согласные шли в алфавитном порядке?
12. Сколько существует способов составить компанию из 8 юношей и 12 девушек, в которой было одинаковое число юношей и девушек?
13. У продавца антиквариата 16 различных монет. Двое нумизматов купили у него по три монеты, а другие двое по пять монет. Сколькими способами они могли купить?
14. Каждый из n членов общества голосует за одного человека (быть может и за себя). Сколько существует возможных исходов голосования (по количеству проголосовавших за каждого из членов общества)?

15. Сколько решений имеет система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 36, \\ x_1 \geq 3, x_2 \geq 2, x_3 \geq 4, x_4 \geq 6 \end{cases}$$

в целых положительных числах?

16. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 210, не делящихся ни на 10, ни на 15, ни на 35.
17. Сколько существует перестановок чисел $1, 2, \dots, n$, в которых ровно три элемента стоят на своих исходных местах?

Вариант 17

1. Группа изучает 11 предметов. В среду по расписанию 5 пар по разным предметам. Сколькими способами можно составить расписание на среду?
2. Сколько существует нечётных пятизначных чисел, все цифры в записи которых различны?
3. Племя использует латинский алфавит. В словаре племени сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово *ssab*?
4. Сколькими способами можно рассадить 8 кроликов по трём клеткам?
5. Пусть p_1, p_2, p_3 — различные простые числа. Найти количество различных делителей числа
 - (а) $p_1 p_2 p_3^{17}$;
 - (б) 122^{10} .
6. Лестница состоит из 5 ступенек, не считая верхней и нижней площадок. Спускаясь, можно перепрыгивать через несколько ступенек. Сколькими способами можно спуститься по этой лестнице?
7. Сколько существует способов размещения 12 человек за столом с занумерованными местами, если А должен сидеть во главе стола (на месте № 1)?

8. Сколько существует способов вытащить 16 карт из колоды, содержащей 52 карты?
9. В колоде 52 карты. Сколько существует бриджевых раздач (из 13 карт), содержащих 9 трефовых, 1 червовую и 3 пиковых карты?
10. Из колоды, состоящей из 52 карт, выбрали 13 карт. Определить, в скольких случаях среди них окажутся:
 - (а) бубновый король;
 - (б) все четыре короля;
 - (в) все карты одной масти;
 - (г) ни одного короля;
 - (д) ровно один король;
 - (е) хотя бы один король;
 - (ж) ровно два короля;
 - (з) ровно два вальта и четыре туза;
 - (и) шесть карт одной масти и семь карт другой масти;
 - (к) все короли, все тройки и все тузы?
11. Сколькими способами можно разрезать ожерелье, состоящее из 32 различных бус, на 8 частей?
12. В шахматном кружке занимаются 4 девочки и 7 мальчиков. Сколькими способами из них можно составить команду из четырёх человек, если в неё обязательно должна входить хотя бы одна девочка?
13. Сколькими способами могут распределиться медали между 24 футбольными командами, если золотые медали получает команда — победитель, серебряные — команда, проигравшая в финале, бронзовые — две команды, которые проиграли в полуфинале?
14. Каждый из 34 человек может проголосовать только за одно предложение из пяти, и учитывается лишь количество голосов, поданных за каждое предложение. Сколькими способами могут распределиться голоса?

15. Сколько решений имеет система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 32, \\ x_1 + x_2 > 2 \end{cases}$$

(а) в целых неотрицательных числах;

(б) в целых положительных числах?

16. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 210, не делящихся ни на 4, ни на 10, ни на 18.

17. Сколько существует перестановок чисел $1, 2, 3, \dots, n$, в которых 1 и 3 не стоят на своих исходных местах?

Вариант 18

1. Сколькими способами в лотерее "Спортпрогноз" можно заполнить карточку? (В этой лотерее нужно предсказать итог 13 матчей. Итог каждого матча — это победа одной из команд или ничья. Счёт роли не играет.)

2. Сколько существует пятизначных чисел, все цифры в записи которых различны?

3. Племя использует латинский алфавит. В словаре племени сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово сбас?

4. Сколькими способами можно разместить 10 книг на трёх полках, если каждая полка может вместить все 10 книг, а порядок расположения книг на полке не имеет значения?

5. Пусть p_1, p_2, p_3 — различные простые числа. Найти количество различных делителей числа

(а) $p_1^3 p_2^3 p_3^3$;

(б) 1400.

6. В столовой предложено на выбор 7 блюд. Каждый день студент берёт некоторый набор блюд, причём этот набор должен быть отличен от всех наборов, которые он брал в предыдущие дни. Какое наибольшее количество дней студент сможет питаться по таким правилам?
7. Сколько существует способов размещения 12 человек за столом с занумерованными местами, если А должен сидеть во главе стола (на месте № 1), а В не должен сидеть рядом с А?
8. Сколько существует способов вытащить 15 карт из колоды, содержащей 52 карты?
9. В колоде 52 карты. Сколько существует бриджевых раздач (из 13 карт), содержащих 2 трефовых, 1 червовую, 2 пиковых и 8 бубновых карт?
10. Из колоды, состоящей из 52 карт, выбрали 12 карт. Определить, в скольких случаях среди них окажутся:
 - (а) бубновый валет;
 - (б) все четыре вальта;
 - (в) все карты одной масти;
 - (г) ни одного вальта;
 - (д) ровно один валет;
 - (е) хотя бы один валет;
 - (ж) ровно два вальта;
 - (з) ровно три туза и три шестёрки;
 - (и) восемь карты одной масти и четыре карты другой масти;
 - (к) все тройки и все тузы?
11. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды (52 карты) 6 карт так, чтобы среди них было ровно два туза?
12. Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых есть две чётных цифры и три нечётных?

13. Сколькими способами класс, в котором учатся 24 школьника, можно разбить на четыре разные группы для углубленного изучения английского языка, если в каждой группе должно быть ровно 6 школьников?
14. В почтовом отделении продаются 12 видов открыток. Сколькими способами можно купить в нём 9 открыток?
15. Сколько решений имеет система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 33, \\ x_1 + x_2 \leq 2 \end{cases}$$

- (а) в целых неотрицательных числах;
- (б) в целых положительных числах?
16. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 210, не делящихся ни на 6, ни на 14, ни на 21.
17. Сколько существует перестановок чисел $1, 2, 3, \dots, n$, в которых 1 и 4 не стоят на своих исходных местах?

Вариант 19

1. Монету бросают 10 раз. Сколько различных последовательностей орлов и решек можно получить?
2. Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых чётные цифры чередуются с нечётными?
3. Племя использует латинский алфавит. В словаре племени сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово dbaa?
4. Вася привёз из путешествия 5 различных сувениров и хочет подарить их двум девушкам Оле и Тане. Сколькими способами он может это сделать, если хочет, чтобы у каждой девушки было хотя бы по одному подарку?

5. Пусть p_1, p_2, p_3 — различные простые числа. Найти количество различных делителей числа
- (а) $p_1^4 p_2^4 p_3^5$;
 - (б) $315^7 5$.
6. Стоматолог выяснил, что в его районе любые два человека отличаются набором зубов (имеется в виду наличие или отсутствие зубов). Максимальное количество зубов у человека — 32. Каким может быть максимальное население района?
7. Сколько существует способов размещения 12 человек за столом с занумерованными местами, если А должен сидеть во главе стола (на месте № 1), а В не должен сидеть рядом с С?
8. Сколько существует способов вытащить 14 карт из колоды, содержащей 52 карты?
9. В колоде 52 карты. Сколько существует бриджевых раздач (из 13 карт), содержащих 1 трефовую, 1 червовую, 4 пиковых и 7 бубновых карт?
10. Из колоды, состоящей из 52 карт, выбрали 10 карт. Определить, в скольких случаях среди них окажутся:
- (а) червовая дама;
 - (б) все четыре дамы;
 - (в) все карты одной масти;
 - (г) ни одной дамы;
 - (д) ровно одна дама;
 - (е) хотя бы одна дама;
 - (ж) ровно две дамы;
 - (з) ровно три туза и три дамы;
 - (и) пять карт одной масти и пять карт другой масти;
 - (к) все дамы и все десятки?

11. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды (52 карты) 6 карт так, чтобы среди них был хотя бы один туз?
12. Из 22 девушек и 10 юношей выбирают команду, состоящую из 5 человек. Сколькими способами можно выбрать эту команду, чтобы в неё вошло не более трёх девушек?
13. Сколькими способами можно расположить в 19 лузах 2 белых и 7 чёрных шаров?
14. Сколькими способами можно разложить 5 чёрных, 3 белых и 4 серых шара в шесть различных ящиков, если одноцветные шары не отличаются между собой?
15. Сколько решений имеет система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 40, \\ x_1 + x_2 = x_3 + x_4 + x_5 \end{cases}$$

- (а) в целых неотрицательных числах;
 - (б) в целых положительных числах?
16. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 210, не делящихся ни на 4, ни на 6, ни на 9.
 17. Сколько существует перестановок чисел $1, 2, 3, \dots, n$, в которых ни один из элементов 1, 3, 5 не стоит на своём месте?

Вариант 20

1. В районе есть 4 города: А, Б, В, Г. Из А в Б ведёт 4 дороги, из Б в В — 3 дороги, из А в Г — 5 дорог, из Г в В — 2 дороги. Сколькими способами можно проехать из А в В?
2. Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых есть хотя бы один 0?

3. Племя использует латинский алфавит. В словаре племени сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово *saab*?
4. Три человека должны унести 8 предметов. Сколькими способами это можно сделать, если каждый способен унести любое количество имеющихся предметов?
5. Пусть p_1, p_2, p_3 — различные простые числа. Найти количество различных делителей числа
 - (а) $p_1^3 p_2^4 p_3^5$;
 - (б) 48^{29} .
6. У человека 32 зуба. Может ли случиться так, что в России не найдётся двух человек с одинаковым набором зубов? (Имеется в виду наличие или отсутствие зуба на той или иной позиции.)
7. Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых цифры 1, 2, 3, 4, 5 встречаются ровно по одному разу, а числа 1 и 2 не стоят рядом?
8. Сколько существует способов вытащить 7 карт из колоды, содержащей 52 карты?
9. В колоде 52 карты. Сколько существует бриджевых раздач (из 13 карт), содержащих 3 трефовых, 3 червовых, 2 пиковых и 5 бубновых карт?
10. Из колоды, состоящей из 52 карт, выбрали 10 карт. Определить, в скольких случаях среди них окажутся:
 - (а) бубновая дама;
 - (б) все четыре дамы;
 - (в) все карты одной масти;
 - (г) ни одной дамы;
 - (д) ровно одна дама;
 - (е) хотя бы одна дама;
 - (ж) ровно две дамы;

(з) ровно два туза и три дамы;

(и) четыре карты одной масти и шесть карт другой масти;

(к) все короли и все тузы?

11. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды (52 карты) 6 карт так, чтобы среди них было четыре туза?

12. На школьном вечере присутствуют 15 юношей и 20 девушек. Сколькими способами можно выбрать из них 5 пар для танца?

13. Есть 23 шара: 4 белых, 5 красных, 6 синих и 8 зелёных. Шары одного цвета неразличимы. Сколько различных гирлянд можно создать, располагая шары друг за другом?

14. В большой коробке лежат шарики k цветов (одноцветные шарики ничем не отличаются). Для игры Петя хочет взять m шариков и положить их в n коробок. Сколькими способами это можно сделать?

15. Сколько решений имеет система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 45, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 17 \end{cases}$$

(а) в целых неотрицательных числах;

(б) в целых положительных числах?

16. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 210, не делящихся ни на 6, ни на 10, ни на 15.

17. Сколько существует перестановок чисел $1, 2, 3, \dots, n$, в которых ни один из элементов 2, 4, 6 не стоит на своём месте?

Библиографический список

1. Гаврилов Г.П. Задачи и упражнения по дискретной математике / Г.П. Гаврилов, А.А. Сапоженко. – М.: Физматлит. 2005. – 222 с.
2. Основы комбинаторики и теории чисел. Сборник задач / А.А. Глибичук, Д.Г. Ильинский, Д.В. Мусатов [и др.]. – М. : ИД Интеллект, 2019. – 104 с.
3. Ильинская И.П., Ильинский А.И. Дискретная математика. Сборник задач. Комбинаторика, графы, вероятность. Учебно-методическое пособие / И.П. Ильинская, А.И. Ильинский. – Х.: ХНУ имени В.Н. Каразина, 2008. – 103 с.
4. Нефёдов В.Н. Курс дискретной математики / В.Н. Нефёдов, В.А. Осипова. – М.: МАИ, 1992. – 264 с.
5. Шварц Д.А. Задачи по комбинаторике / Д.А. Шварц. – М. ВШЭ, 2018. – 66 с. – Режим доступа: <https://publications.hse.ru/books/225216295>