Теорема 1. Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей, α, β – автоморфизмы R и для всех $x \in R$ выполняется $\alpha(x^6) \pm \beta(x^5) \in Z(R)$. Тогда $2x \in Z(R)$. В частности, если R без 2 – кручения, то R коммутативно.

Теорема 2. Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей, α, β – автоморфизмы R и для всех $x \in R$ выполняется $\alpha(x^7) \pm \beta(x^6) \in Z(R)$. Тогда $16x \in Z(R)$. В частности, если R без 2 – кручения, то R коммутативно.

Основываясь на доказанных теоремах и результатах Хана, указанную гипотезу можно сузить до следующей:

Гипотеза**.** Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей, $n > 1$ – фиксированное целое, α и β – автоморфизмы R и для всех $x \in R$ выполняется $\alpha(x^{n+1}) \pm \beta(x^n) \in Z(R)$. Тогда $2^k x \in Z(R)$ для некоторого целого $k > 1$. В частности, если R без 2 – кручения, то R коммутативно.

Из теоремы 1, теоремы 2 и работы [1] следует, что сформулированная гипотеза справедлива при n = 1, 2, 3, 4, 5, 6. В общем же случае истинность гипотезы пока не установлена.

Литература

1. Khan M.A. Commutativity of rings with constraints on pair of automorphisms //Advances in Theoretical and Applied Mathematics. – 2006. – №2. – Vol 1. – P. 119–126.

2. Харченко В.К. Некоммутативная теория Галуа. – Новосибирск, Научная книга, 1996.

О строении конечных колец, имеющих планарные графы делителей нуля

А.С. Кузьмина

БГПУ, г. Барнаул

В данной работе рассматриваются ассоциативные кольца, не обязательно коммутативные и не обязательно имеющие единицу.

Графом делителей нуля кольца R называется граф, вершинами которого являются все ненулевые делители нуля кольца R (односторонние и двусторонние), причем две различные вершины x,y соединяются ребром тогда и только тогда, когда $xy=0$ или $yx=0$ [1].

Граф делителей нуля кольца R будем обозначать через $\Gamma(R)$.

Пусть для простого числа p

$$A_p = \begin{pmatrix} GF(p) & GF(p) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_p^0 = \begin{pmatrix} GF(p) & 0 \\ GF(p) & 0 \end{pmatrix};$$

$$T_{2,p} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}; a,b \in GF(p) \right\};$$

$$N_{o,p} = \left\langle a; a^2 = 0, pa = 0 \right\rangle; \quad N_{p^2} == \left\langle a; a^2 = pa, p^2 a = 0 \ \right\rangle;$$

$$N_{p,p} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; a,b \in GF(p) \right\}.$$

Радикал Джекобсона кольца R обозначим $J(R)$. Под термином «*локальное кольцо*» мы понимаем такое конечное кольцо R с единицей, для которого фактор-кольцо $R/J(R)$ является полем.

В работах [2, 3] полностью описаны конечные коммутативные кольца с единицей, графы делителей нуля которых планарны. Получены также некоторые результаты для коммутативных колец, графы делителей нуля которых бесконечны и планарны (см. [4]). В настоящей работе мы описываем подпрямо неразложимые конечные кольца (необязательно коммутативные и необязательно имеющие единицу), удовлетворяющие тождествам

$$x^2=x^3 f(x),\ p^t x=0, \tag{1}$$

где $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$, $p>2$ – простое число, и имеющие планарные графы делителей нуля.

Предложение 1. *Пусть R – подпрямо неразложимое конечное кольцо, удовлетворяющее тождествам (1), и граф $\Gamma(R)$ планарен. Тогда для кольца R выполняется одно из следующих условий:*

(1) $R \cong GF(p^n)$, $p>2$;

(2) $R^3=(0)$;

(3) R *– локальное кольцо, такое, что* $J(R)^3=(0)$;

(4) $R \cong A_3, A_3^0$.

Таким образом, мы видим, что задача описания колец из предложения 1, сводится к описанию локальных и нильпотентных колец, имеющих планарные графы делителей нуля.

Теорема 2. *Пусть R – локальное кольцо, удовлетворяющее тождеству $x^2=x^3 f(x)$, где $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$, и имеющее планарный граф делителей нуля. Тогда $J(R)^4= (0)$ и $|R| \leq 32$.*

Теорема 3. *Пусть R – конечное нильпотентное кольцо, имеющее планарный граф делителей нуля. Тогда R4=(0) и $|R| \leq 24$.*

Следствием предложения 1, теорем 1 и 2 является следующий результат.

Теорема 4. *Пусть R – подпрямо неразложимое конечное кольцо, удовлетворяющее тождествам (1). Граф Г(R) планарен тогда и только тогда, когда R изоморфно одному из следующих колец:*

(1) $R \cong GF(p^n)$, $p>2$;

(2) $R \cong A_3, A_3^0$;

(3) $R \cong N_{3,3}$;

(4) $R \cong N_9$;

(5) $R \cong N_{0,p}$, $p=3,5$;

(6) $R \cong \mathbb{Z}_{p^2}$, $p=3,5$;

(7) $R \cong T_{2,p}$, $p=3,5$.

Литература

1. Akbari S., Mohammadian A. On zero-divisor graphs of finite rings // Journal of Algebra. – 2007. – 314. – P. 168–184.

2. Akbari S., Maimani H.R., Yassemi S. When zero-divisor graph is planar or a complete r-partite graph // Journal of Algebra. – 2003. – 270. – pp. 169–180.

3. Belshoff R., Chapman J. Planar zero-divisor graphs // Journal of Algebra. – 2007. – 316. – P. 471–480.

4. Smith N. Infinite planar zero-divisor graphs // Communications in Algebra. – 2007. – 35. – P. 171–180.

Евклидовы кольца и их применения для решения диофантовых уравнений

А.Ю. Тюрина

БГПУ, г. Барнаул

В данной работе рассматривается решение уравнения $x^2 + y^2 = z^2$ в ряде евклидовых колец.

Определение. Пусть R-коммутативная область целостности, т.е. кольцо с 1, не содержащее делителей нуля. R называется евклидовым