

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
АЛТАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Сибин Антон Николаевич

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ДВУХФАЗНЫХ
СМЕСЕЙ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ С ПЕРЕМЕННОЙ
ПОРИСТОСТЬЮ И С УЧЕТОМ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ**

01.02.05 - механика жидкости, газа и плазмы

**Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
Папин Александр Алексеевич

Барнаул – 2021

Оглавление

Введение	3
1 Моделирование движения смеси твердых частиц и жидкости в пористых средах с учетом внутренней суффозии	20
1.1 Постановка задачи	20
1.2 Суффозионный поток	27
1.3 Алгоритм численного решения одномерной задачи	31
1.4 Одномерная задача внутренней суффозии	35
1.5 Экспериментальное определение порядков сходимости разностного решения	38
1.6 Результаты тестовых расчетов	41
1.7 Одномерная задачи внутренней суффозии грунта при заданной суммарной скорости фильтрации	44
2 Разрешимость первой краевой задачи для одномерных уравнений внутренней эрозии	48
2.1 Вспомогательные сведения	48
Функциональные пространства	48
Специальные неравенства и теорема вложения	51
2.2 Постановка задачи	52
2.3 Разрешимость задачи	55
3 Профильная задача внутренней суффозии	66

3.1	Математическая модель фильтрации грунтовых вод, контактирующих с многолетнемерзлыми породами	67
	Упругие мерзлые породы	67
	Фазовый переход	70
	Моделирование деформации грунтов	70
3.2	Численное исследование профильной задачи внутренней эрозии в межмерзлотном водоносном слое при заданной концентрации подвижных частиц грунта	72
3.3	Двумерная задача фильтрации в верхних слоях почвогрунтов с учетом суффозионных процессов	76
	Постановка задачи	77
	Алгоритм численного решения задачи	78
	Результаты численных расчетов	81
4	Тепломассоперенос в тающем снеге	83
4.1	Постановка задачи	83
4.2	Физические свойства снега	85
4.3	Преобразование системы уравнений	89
4.4	Алгоритм численного решения одномерной задачи	91
4.5	Одномерная задача тепломассопереноса в тающем снеге	94
	Заключение	101
	Литература	102

Введение

Актуальность темы исследования

Актуальность теоретического исследования моделей механики многофазных сред с переменной пористостью и учетом фазовых переходов обусловлена их широким применением к решению важных практических задач: ирригации и дренажа сельскохозяйственных полей [1–3]; фильтрации вблизи речных плотин, дамб и других гидротехнических сооружений [4–7]; разработки трудноизвлекаемых запасов нефти и газа [8, 9]; движение магмы в земной коре [10]; прогноза возникновения и роста опухолей [11]; очистки с помощью фильтров воды, жидкого топлива, смазочных масел [12, 13].

Многочисленные исследования, проведенные как в нашей стране (В. Н. Николаевский, А. М. Блохин, В. Н. Доровский, Л. С. Кучмент, Г. Г. Ципкин, Ю. М. Шехтман, А. Н. Коновалов и др.), так и за рубежом (К. Terzaghi, S. C. Colbeck, J.M.N.T. Gray, I. Vardoulakis и др.), посвящены фильтрации многофазных смесей. Однако, проведенные до настоящего времени исследования не включали в себя множество задач, в частности, задачи о фильтрации воды и воздуха в тающем снеге и внутренней суффозии с учетом переменной пористости (пористость может изменяться, в частности, из-за деформации пористого скелета [14]), фазовых переходов и определения скоростей фильтрующихся фаз.

Степень разработанности темы исследования

Результаты систематического исследования динамики многофазных сред изложены в монографиях Р. И. Нигматулина [15, 16], К. Л. Rajagopal и L. Tao [17], В. Н. Николаевского [18, 19]. Система уравнений многофазного течения выводится из законов сохранения массы, импульса и энергии сплошной среды и, как пра-

вило, является недоопределенной. Для ее замыкания необходимо конкретизировать величины, описывающие внутрифазные и межфазные массовые, силовые и энергетические взаимодействия. Примерами такой конкретизации служат работы Н. Е. Жуковского, связанные с выводом уравнений фильтрации; Л. Д. Ландау и Е. М. Лившица по гидродинамике жидкого гелия; С. С. Кутателадзе, М. А. Стыриковича, М. Е. Дейча и Г. А. Филиппова по газожидкостным системам; Н. Н. Яненко, Р. И. Солоухина по сверхзвуковым двухфазным течениям; Я. И. Френкеля, В. Н. Николаевского по деформированию водонасыщенных грунтов и выносу песка в работающую скважину [19]; А. М. Блохина и В. Н. Доровского по моделям континуальной теории фильтрации, не использующим закон Дарси [20]; С. К. Годунова по термодинамически согласованным моделям многофазных сред; К. Wilmanski по моделированию процессов сорбции в деформируемой пористой среде; И. О. Протодяконова и Ю. Г. Чеснокова по моделированию движения псевдооживленного слоя [21]; Ю. М. Шехтмана по движению жидкости со взвешенными твердыми частицами через пористые среды [12].

Численному исследованию задач фильтрации многофазных смесей в пористых средах с заданной пористостью посвящено множество работ (см., например, [22, 24–26]). Обоснованию приближенных методов решения задач стационарной фильтрации с предельным градиентом посвящены работы А. Д. Ляшко и М. М. Карчевского [25, 26]. В работе Ю. М. Лаевского и соавторов для решения задач фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости используется метод конечных элементов [24]. В работах А. Н. Коновалова (см., например, [22]) исследуются разностные схемы для задач двухфазной фильтрации несжимаемой жидкости. Двумерные модели исследовались в работе [23]. Сравнению моделей фильтрации двухфазных жидкостей и анализу численных методов их решения посвящены работы [27, 28].

Если через слой неподвижных твердых частиц (со степенью неоднородности $\eta > 20$ [29]) пропускать восходящий поток жидкости (или газа), постепенно увеличивая его скорость, то при определенной скорости, называемой критической,

мелкая фракция перейдет в псевдооживленное состояние [21]. При этом мелкие твердые частицы приобретут подвижность и будут перемещаться между более крупными частицами. Данный процесс захвата и выноса частиц грунта называется внутренней суффозией (эрозией) грунта [30].

Следуя общепринятым положениям, грунт можно характеризовать двумя параметрами [31]: средним диаметром частиц d и степенью неоднородности $\eta = d_{60}/d_{10}$ (по Хазену), где d_{60} – контролирующий диаметр, меньше которого в данном грунте содержится 60 % частиц по массе; d_{10} – эффективный диаметр, меньше которого содержится 10 % частиц. Вынос мелкой фракции зависит от диаметра минимальных поровых каналов $d_{\text{пор}}$ между крупными зернами, который определяется экспериментально (см, например, [31]). Приведенные в монографии [29] данные измерений устойчивости разнородных грунтов показывают, что при $\eta < 10$ суффозия практически отсутствует и слой, после достижения модуля скорости фильтрации несущей фазы критического значения, переходит в псевдооживленное состояние без выделения мелких частиц. При $\eta > 20$, напротив, происходит интенсивная суффозия мелкозернистого “наполнителя” задолго до того, как основной “скелет” из крупнозернистых частиц потеряет устойчивость. В настоящей работе рассматриваются процессы фильтрации подземных вод и внутренней механической суффозии в грунтах со степенью неоднородности $\eta > 20$.

Одной из весьма острых проблем эксплуатации скважин в слабосцементированных породах является разрушение призабойной зоны пласта и поступление в скважины песка, что ведет к образованию глинисто-песчаных пробок на забое и в насосно-компрессорных трубах [8, 9]. Это приводит к снижению дебитов, разрушению обсадных колонн и фильтров, износу внутрискважинного и наземного оборудования, влечет значительные экономические потери вследствие снижения производительности, увеличения затрат на текущий и капитальный ремонт скважины, очистку газа от механических примесей. Проблема обостряется для месторождений, которые эксплуатируются в завершающей стадии и при разработке трудноизвлекаемых нефтегазовых запасов.

Проблемы, связанные с эрозией почвогрунтов, широко исследуются на протяжении последнего столетия. Существуют различные подходы при моделировании процесса внутренней эрозии. В работах В.Н. Николаевского процесс эрозии моделируется на основе моделей однофазной фильтрации и упругопластических критериев разрушения [18]. Для насыщенных водой почвогрунтов при рассмотрении процесса эрозии может быть использована модель Био [32].

Принципиально иные подходы к моделированию эрозии используются в работах Бонелли [33,34]. В этих работах вводится неизвестная граница раздела между твердым скелетом и водой с подвижными твердыми частицами со стандартной реологией. Для определения неизвестной границы используются аналоги кинематического и динамических условий в задачах со свободными границами.

Наиболее полные модели теории движения воды и подвижных твердых частиц в пористой среде предложены в работах I. Vardoulakis и его последователей (см., например, [8, 35–37]). Почвогрунты в данных работах, с одной стороны, рассматривались как многофазные среды, но в то же время предполагалась пропорциональность скоростей воды и подвижных частиц грунта. Это являлось следствием предположения о равенстве давлений подвижных фаз. Несовпадение давлений в фазах может иметь место, в частности, из-за капиллярных эффектов [15]. Основной проблемой при таком подходе является описание силового взаимодействия и совместного деформирования фаз. Подробное описание силового взаимодействия жидкости (газа) и твердых частиц, движущихся в потоке, изложено в работах [21, 38, 39]. Но в них процесс суффозии не описывался.

В серии работ (см., например, [40,41]) для моделирования движения смеси воды и подвижных твердых частиц в пористой среде используется следующий подход: рассматривается движение подвижных твердых частиц в потоке жидкости и два “вида” неподвижных твердых частиц, для нахождения концентраций которых используются уравнения кинетики. В этом подходе истинная скорость подвижных твердых частиц не определяется, скорость жидкости находится из закона Дарси. Отрыв частиц от матрицы породы описывается на основе уравнения кинетики.

В работе [41], как и в работах I. Vardoulakis [8, 36] предполагается, что скорость подвижных твердых частиц меньше скорости фильтрующейся жидкости и является заданным параметром, определяемым экспериментально [41]. Кроме того, скорость воды считается заданной функцией времени [41], изменяющаяся при отрыве частиц пористость не определяется в ходе решения задачи. Возникает ряд других параметров, связанных с уравнением кинетики и определяющихся экспериментально.

Следует также отметить, что не существует единого подхода к описанию процесса обмена массой между пористым скелетом и твердыми подвижными частицами грунта. Корректное описание фазового перехода должно гарантировать выполнение физических принципов максимума для пористости и концентрации фаз. В настоящей работе предложена математическая модель фильтрации жидкости в пористой среде, подверженной внутренней эрозии с учетом сил межфазного взаимодействия фильтрующихся фаз. Рассматриваемый подход позволяет определять скорости воды и подвижных частиц грунта в ходе решения начально-краевой задачи.

Вторая рассматриваемая в данной диссертации задача тепломассопереноса в тающем снеге не менее актуальна. Преобладающая часть стока северных рек формируется за счет таяния сезонного снежного покрова. Условия снеготаяния оказывают основное влияние не только на количество поступающих в водоемы-приемники талых вод, но и на их качество. Кроме того, величина снежного покрова (снегозапас) влияет на промерзание поверхностного слоя почв и, следовательно, его впитывающую способность, определяющую соотношение между склоновым и грунтовым стоками. Поэтому моделирование состояния снежного покрова и солепереноса в период снеготаяния имеет важное значение при разработке методов расчетов и прогнозов гидрографов весеннего половодья и качества воды в водоемах-приемниках [42]. Имеется большое количество работ, посвященных исследованию солемассопереноса в тающем снеге, в которых используются данные наблюдений и эмпирические зависимости (см. библиографию в работе [43]). Большая часть эм-

пирических моделей являются одномерными и не позволяют вычислить скорость фильтрации воды, а модели, позволяющие определить скорость фильтрации воды, обычно не учитывают фазовые переходы или пригодны только для специфичных режимов движения воды в снежном покрове и также не позволяют получить необходимую информацию о поле скоростей и насыщенности водной фазы для оценки водного стока и стока загрязняющих веществ.

Таким образом, для достоверного прогноза водного стока и стока загрязняющих веществ необходимы данные о поле скоростей и насыщенности водной фазы, т.е. предлагается использовать комплексные модели, описывающие совместное движение загрязняющих веществ и воды в снежном покрове с учетом различных краевых условий, фазовых переходов. Эти модели позволят рассчитать нестационарное движение загрязняющих веществ внутри снежного покрова и оценить поверхностный и подземный стоки веществ. Для этого они должны учитывать ряд важных факторов: переменную пористость снежного покрова; фазовые переходы; специфику граничных условий (в частности, наличие промерзшего или не промерзшего грунта). Основы теории движения воды и воздуха в тающем снеге заложены в работах S.C. Colbeck [44] и его последователей [45, 46]. Несмотря на то, что в [44–46] снег моделировался как многофазная среда, переменная пористость льда, его деформация и фазовые переходы не учитывались.

В работе [47] снежный покров рассматривается как трехфазная среда (вода, воздух, лед). Приведены эмпирические зависимости для капиллярного скачка (вода–воздух) и эмпирические формулы для коэффициента проницаемости снега. Однако, авторы пренебрегают движением воздуха и существенно упрощают уравнение для температуры. В результате трехфазная модель сводится к уравнению для температуры и уравнению для объемной концентрации водной фазы.

В работах [48, 49] построено автомодельное решение для модели двухфазной фильтрации при естественных граничных условиях. В [43] даны постановки следующих задач тепломассопереноса в тающем снеге: 1) о движении воды и воздуха в тающем снеге с учетом фазовых переходов и деформации ледового скелета; 2) о

распределении водного стока тающего снега между грунтовыми и поверхностными водами; 3) об абляции деформируемого снежно–ледового покрова. Также в [43] разработан алгоритм численного решения задачи о переносе консервативных солей в тающем снеге и построена модель движения грунтовых вод, контактирующих с промерзшим грунтом.

Цели и задачи исследования

Целью данной работы является аналитическое и численное исследование процесса взаимопроникающего движения двух сред в пористой среде с переменной пористостью и учетом фазовых переходов. Разработка математических методов и вычислительных алгоритмов для решения задач, возникающих при исследовании процесса внутренней изотермической эрозии грунта при напорном движении грунтовых вод и тепломассопереноса в тающем снеге.

Научная новизна исследуемых задач состоит в учете переменной пористости вмещающей среды. Рассматриваемые в диссертации задачи осложняются тем, что пористость изменяется в результате фазовых переходов, а фильтрующиеся фазы имеют различные скорости, определяемые в ходе решения задач. В рамках теории многофазной фильтрации с учетом переменной пористости и фазовых переходов получены следующие новые результаты:

1. Построена замкнутая математическая модель фильтрации смеси твердых частиц и жидкости в пористых средах с учетом внутренней суффозии. Подвижные частицы грунта рассматриваются как отдельная фаза, скорость которой определяется в ходе решения задачи. В рамках полученной модели численно решена одномерная задача внутренней суффозии грунта и проведено сравнение с экспериментальными данными для трех грунтов с различной суффозионной устойчивостью.

2. В случае одномерного движения доказана глобальная разрешимость начально-краевой задачи для невырожденных уравнений внутренней эрозии при заданной суммарной скорости фильтрации.

3. На основе уравнений двухфазной фильтрации с учетом суффозионных про-

цессов исследована профильная задача внутренней эрозии в межмерзлотном водоносном слое при заданной концентрации подвижных частиц грунта. Определена область, подверженная внутренней эрозии грунта.

4. Построена математическая модель теплопереноса в тающем снеге. Снег рассматривается как трехфазная среда, состоящая из воды, воздуха и неподвижного твердого пористого ледового скелета с переменной искомой пористостью. В рамках полученной модели численно решена одномерная задача фильтрации воды и воздуха с учетом фазового перехода, исследовано изменение пористости и водонасыщенности снега. Используя экспериментальные данные из литературных источников проведена верификация математической модели фильтрации воды и воздуха в тающем снеге, состоящем из двух слоев с разной плотностью.

Теоретическая и практическая значимость

Полученные результаты носят теоретический и прикладной характер и представляют интерес для специалистов в области гидродинамики, математической теории фильтрации и уравнений в частных производных. Работа вносит вклад в изучение фильтрации в пористых средах с переменной пористостью и учетом фазовых переходов. Полученные результаты развивают теорию фильтрации и дополняют результаты изученной ранее задачи движения двухфазной смеси в пористой среде с заданной пористостью (классической модели Маскета–Левретта). Результаты данной работы могут использоваться в решении прикладных задач по проектированию гидротехнических сооружений (речных плотин, водохранилищ, дамб и т.д.), ирригации и дренажа сельскохозяйственных полей, при оценки рисков механического разрушения коллекторов скважин, прогнозе гидрографа весеннего половодья, оценки распространения загрязнений талыми водами.

Полученные численные результаты могут использоваться для оценки рисков формирования пустот в грунте и образования суффозионных воронок. Результаты работы могут применяться для анализа экспериментов по определению суффозионной устойчивости грунтов и фильтрационных характеристик тающего снега. Модели и методы численного моделирования процессов фильтрации в средах

с переменной пористостью позволяют создать новые и усовершенствовать существующие прикладные расчетные комплексы программ. С теоретической точки зрения работа вносит вклад в изучение систем уравнений в частных производных и развитие методов решения данных систем.

Методология и методы исследования

В работе применяются математический аппарат механики сплошной среды и теории фильтрации; гидродинамики; уравнений математической физики; общей теории дифференциальных уравнений; методы функционального анализа, а именно теорема Шаудера о неподвижной точке. Для численного решения задач применялись конечно-разностные методы Рунге–Кутты и переменных направлений для дифференциальных уравнений второго порядка. При реализации конечно-разностных схем использовались метод "замороженных коэффициентов" и методы прогонки, для нахождения решения систем линейных алгебраических уравнений. Для проведения численных расчетов использованы авторские коды на языке C++.

Положения, выносимые на защиту

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Алтайский государственный университет». На защиту выносятся следующие результаты:

- построена математическая модель фильтрации смеси твердых частиц и жидкости в пористых средах с учетом внутренней суффозии, проведена верификация одномерной модели внутренней эрозии грунта на основе сравнения результатов численных расчетов изменения эродированной массы (частиц грунта вынесенных из области фильтрации) и экспериментальных данных из литературных источников для трех грунтов с различной суффозионной устойчивостью;
- для профильной задачи внутренней эрозии в межмерзлотном водоносном слое при заданной концентрации подвижных частиц грунта в фильтрующемся потоке найдена область, подверженная внутренней эрозии;
- выведена математическая модель фильтрации воды и воздуха в тающем снеге с переменной пористостью и учетом фазового перехода, проведено сравнение ре-

зультатов моделирования изменения водонасыщенности талого снега, состоящего из двух слоев с разной плотностью, и экспериментальных данных из литературных источников;

– доказана глобальная разрешимость начально-краевой задачи для невырожденных уравнений внутренней эрозии при заданной суммарной скорости фильтрации.

Степень достоверности и апробация результатов Обоснованность и достоверность научных положений, выводов и рекомендаций достигается: использованием классических подходов механики сплошных сред, гидродинамики и теории фильтрации при построении и анализе математических моделей; проверкой корректности результатов численных расчетов различными способами: устойчивость и порядок сходимости вычислительного алгоритма проверяются путем вычислительных экспериментов, применяя известное правило Рунге [50]; путем сравнения результатов вычислений с экспериментальными данными из литературных источников; опубликованием результатов исследований в ведущих журналах и обсуждением результатов на международных и всероссийских конференциях. Основные результаты работы докладывались на семинарах:

– ИГиЛ СО РАН "Математические модели механики сплошных сред" (руководители: член.-корр. РАН П.И. Плотников, д.ф.-м.н. В.Н. Старовойтов), Новосибирск, 2021;

– ИГиЛ СО РАН "Прикладная гидродинамика" (руководители: член.-корр. РАН В.В. Пухначев и д.ф.- м.н. Е.В. Ерманий), Новосибирск, 2021;

– ИМ СО РАН "Теоретические и вычислительные проблемы задач математической физики" (руководитель: д.ф.-м.н. Д.Л. Ткачев), Новосибирск, 2021;

– "Задачи индустриальной и прикладной математики" (руководитель: д.ф.-м.н. А.А. Папин), Барнаул, 2016-2021;

– кафедры дифференциальных уравнений Алтайского государственного университета, Барнаул, 2016-2021.

А также на следующих научных конференциях:

- Всероссийская конференция с участием зарубежных учёных по численным методам решения задач теории упругости и пластичности, посвященная 100-летию со дня рождения Н. Н. Яненко (Красноярск, 2021);
- Международный молодежный научный форум "ЛОМОНОСОВ-2021" (Москва, 2021);
- IX Международная конференция, посвященная 120-летию со дня рождения академика М. А. Лаврентьева (Новосибирск, 2020);
- Всероссийская конференция с участием зарубежных ученых "Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения" (Красноярск 2020, Барнаул 2017, Бийск, 2014);
- Всероссийская конференция с международным участием и школа для молодых ученых, посвященные 100-летию академика Л.В. Овсянникова "Математические проблемы механики сплошных сред" (Новосибирск, 2019);
- Международная школа-конференция "Соболевские чтения" (Новосибирск 2016, 2018);
- Международная школа-семинар "Ломоносовские чтения на Алтае" (Барнаул, 2012–2018);
- Всероссийская конференция с международным участием "Современные проблемы механики сплошных сред и физики взрыва" посвященная 60-летию Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН (Новосибирск, 2017);
- Всероссийская конференция «Нелинейные волны: теория и приложения» посвященная 70-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН В. М. Тешукова (Новосибирск, 2016).

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [51–61].

Личный вклад

Автор диссертации принимал активное участие в получении результатов, отражённых во всех совместных публикациях на равноправной основе: постановке задачи, доказательстве теорем, обсуждении полученных результатов, а также оформлении результатов в виде публикаций и научных докладов.

Объем и структура работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 113 страниц. Диссертация содержит 23 рисунка. Список литературы содержит 121 наименование.

Краткое изложение содержания работы

Во **введении** обосновывается актуальность задачи двухфазной фильтрации в пористых средах с переменной пористостью и учетом фазовых переходов, дается обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируются цели и задачи работы, а также ее научная новизна и практическая значимость, представлены основные положения, выносимые на защиту, обоснована достоверность результатов и описан личный вклад автора работы.

Первая глава диссертации посвящена численному исследованию одномерной задачи фильтрации смеси воды и твердых подвижных частиц в недеформируемом грунте при постоянной температуре в потоке и с учетом процессов внутренней суффозии. Грунт моделируется как трехфазная сплошная пористая среда. Поры полностью заполнены смесью воды и подвижных частиц грунта.

В разделе 1.1 приведена постановка трехмерной задачи и сделан вывод системы уравнений. В основе математической модели лежат уравнения сохранения массы каждой фазы и обобщенный закон Дарси для фильтрующейся смеси. Существуют различные подходы замыкания системы уравнений описывающей фильтрацию жидкости (газа) и подвижных частиц грунта: I. Vardoulakis постулировал, что модуль скорости подвижных частиц грунта меньше модуля скорости фильтрации воды [36]. В работе [38] вводится понятие эффективного давления жидкости p^e и эффективного давления псевдооживленной фазы p^{se} , так что давление жидкости есть $p_1 = sp^e$, а давление твердых подвижных частиц $p_2 = (1 - s)p^{se}$, причем $p^e = p^{se} + p_c(s)$ и функция $p_c(s)$ обладает свойствами $p_c(s) \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow 0$, $p_c(1) = 0$. Следуя изложенному выше подходу, для замыкания системы используем соотношение $p_2 - p_1 = p_c(s)$.

Наиболее эффективным при качественном исследовании системы, описываю-

щей фильтрацию двухфазной смеси в грунте при заданной пористости (модель Маскета–Левретта), оказалось использование С.Н. Антонцевым и В.Н. Монаховым в качестве искомым функций насыщенности и "приведенного" давления [62]. Особенностью рассматриваемой в данной диссертации задачи является переменная пористость. Исходная система уравнений сводится к равномерно эллиптическому уравнению для приведенного давления, уравнению первого порядка для пористости и вырождающемуся на решении параболическому уравнению для водонасыщенности.

В разделе 1.2 рассмотрены различные зависимости для интенсивности обмена массой между пористым скелетом и твердыми подвижными частицами грунта. Главной причиной фильтрационных деформаций и фильтрационных разрушений грунтов является вынос частиц грунта из области фильтрации.

Суффозионный процесс начинается после достижения модуля скорости фильтрации критического значения v_k . К. Терцаги получил условие равновесия грунта в виде $I_* = (\gamma - 1)(1 - \phi)$, где I_* – критический градиент напора, при котором грунт находится во взвешенном состоянии; γ – удельный вес грунта; ϕ – пористость [63]. В работе [9] J. Wang для интенсивности суффозионного процесса используется зависимость

$$I = \begin{cases} \lambda \rho_3^0 \phi (1 - \phi) (1 - s) |\vec{v}|, & |\vec{v}| \geq v_k; \\ 0, & |\vec{v}| < v_k; \end{cases}$$

где λ – функция, определяемая экспериментально [35] (отвечает за устойчивость грунта суффозионному воздействию); ρ_3^0 – плотность грунта; \vec{v} – скорость фильтрации смеси воды и подвижных частиц грунта; s – водонасыщенность. В работе [36] I. Vardoulakis использовал аналог приведенного выше соотношения для интенсивности суффозионного процесса (рассматривался частный случай $|\vec{v}_1| > v_k$).

В разделе 1.3 рассматривается алгоритм решения одномерной задачи фильтрации грунтовых вод с учетом внутренней суффозии. В разделе 1.4 приведены результаты численного моделирования. Для верификации предложенной математической модели фильтрации смеси воды и подвижных частиц грунта использу-

ются результаты эксперимента, представленного в работе [35]. Экспериментальная установка состоит из резервуара, наполненного жидкостью, и создающего гидравлическую нагрузку, приложенную к горизонтальной трубе, заполненной образцом грунта. В ходе эксперимента были исследованы несколько образцов грунта с разной суффозионной устойчивостью. Суффозионные тесты были проведены для смеси крупного песка, размеры частичек которого изменялись между 0.315 и 1.60 мм, и мелких частиц, размеры которых изменялись от 1 до 80 микрон. Концентрация мелких частиц в смеси песка изменялась от 2 до 8 процентов от веса [35].

Проведено сравнение рассчитанных значений вынесенной массы из области фильтрации и концентрации подвижных частиц грунта с экспериментальными данными, взятыми из работы [35].

В разделе 1.5 изложен метод определения приближенного (экспериментального) порядка сходимости разностного решения. В разделе 1.6 приводится пример тестирования численного алгоритма путем определения экспериментальных порядков сильной и слабой сходимости.

В разделе 1.7 численно исследована одномерная задача внутренней суффозии грунта при заданной суммарной скорости фильтрации. Проведено сравнение двух эмпирических зависимостей для интенсивности суффозионного процесса.

Во **второй главе** доказана теорема существования и единственности классического решения первой краевой задачи для одномерных уравнений внутренней эрозии при заданной суммарной скорости фильтрации и условии $|\vec{v}| > v_k$. В разделе 2.1, носящем вспомогательный характер, содержатся необходимые сведения из функционального анализа и теории дифференциальных уравнений.

В разделе 2.2 приводится постановка задачи и формулируется теорема об однозначной классической разрешимости.

В разделе 2.3 изложены семь лемм, в том числе установлены физические принципы максимума для насыщенности воды и пористости. Ключевым моментом является доказательство гильдеровской непрерывности насыщенности. После этого проверяются условия теоремы Шаудера о неподвижной точке.

Третья глава диссертации посвящена двумерной математической модели изотермической внутренней эрозии. В разделе 3.1 дана постановка задачи фильтрации подземных вод в водоносном горизонте, который соприкасается с промерзшим песчаным грунтом. В процессе оттаивания грунта и при достижении определенной величины скорости фильтрации происходит вынос частиц грунта из области течения и образование подземных полостей. В результате увеличения и достижения критических размеров этих полостей происходит обрушение свода многолетнемерзлых пород. В качестве математической модели используются уравнения сохранения массы для воды, подвижных твердых частиц и неподвижного пористого скелета, а также закон Дарси для воды и подвижных твердых частиц (аналог классической модели Маскета–Леверетта) и соотношение для интенсивности суффозионного потока. В разделе 3.2 рассмотрена двумерная задача изотермической фильтрации в недеформированном грунте при заданной концентрации подвижных твердых частиц в фильтрующемся потоке. Приведены результаты численного исследования процесса внутренней суффозии в межмерзлотном водоносном горизонте и найдена область, подверженная внутренней суффозии. В разделе 3.3 рассматривается алгоритм решения двумерной задачи фильтрации грунтовых вод с учетом внутренней суффозии в верхних слоях почвогрунтов.

Четвертая глава посвящена исследованию тепломассопереноса в тающем снеге, разработке алгоритма численного решения одномерной задачи. Проведены численные расчеты и сравнение полученных результатов с экспериментальными данными [64].

В разделе 4.1 тающий снег рассматривается как сплошная среда, состоящая из воды, воздуха и льда, составляющего твердый пористый скелет [46]. Фильтрация воды и воздуха в пористом ледовом скелете описывается уравнениями сохранения массы для каждой из фаз с учетом фазовых переходов [45], уравнениями двухфазной фильтрации и уравнением теплового баланса для трехфазной среды [42]. Система дополняется гипотезами: частицы льда неподвижны; сублимацией и обменом массами между водой и воздухом пренебрегаем, плотности фаз постоянны.

В рассматриваемом подходе важным моментом является корректное определение интенсивности фазового перехода "лед-вода". Следует отметить, что для моделирования интенсивности фазового перехода, как правило, используется методология задачи Стефана, т.е. предполагается, что существует межфазная граница, на которой при определенной температуре скачком происходит переход льда в воду. При таком подходе не требуется задавать интенсивность фазового перехода. Другой подход к процессу таяния снега подразумевает, что фазовый переход "лед-вода" происходит во всей толще снежно-ледового покрова и для описания распространения тепла нужно использовать уравнение теплопроводности для трехфазной среды с соответствующей правой частью [42]. Близкой по проблематике является задача тепломассопереноса в протаивающих (промерзающих) грунтах [65]. Имеется ряд экспериментальных результатов по зависимости концентрации льда в пористой среде от температуры [66]. Используемые в данной работе зависимости для интенсивности фазового перехода "лед-вода" опираются на идеи работ [65, 67]

$$I = \begin{cases} -\lambda_1 \phi \theta_s, & \theta < \theta^-; \\ 0, & \theta^- \leq \theta \leq \theta^+; \\ \lambda_2 (1 - \phi)^2 \exp(\beta(\theta - \theta^+)), & \theta > \theta^+. \end{cases}$$

Здесь θ – температура снега, θ^+ – температура плавления льда, θ^- – температура замерзания воды, $\beta, \lambda_1, \lambda_2$ – размерные постоянные, характеризующие интенсивность фазового перехода ($[\beta]=1/\text{K}, [\lambda_1]=\text{кг}/(\text{м}^3 \cdot \text{с} \cdot \text{K}), [\lambda_2]=\text{кг}/(\text{м}^3 \cdot \text{с})$).

В разделе 4.2 сделан обзор используемых эмпирических зависимостей для капиллярного давления, коэффициентов проницаемости и теплопроводности снега. Показано хорошее совпадение с экспериментальными данными из литературных источников коэффициента теплопроводности снега.

В разделе 4.3 исходная система уравнений сводится к равномерно эллиптическому уравнению для приведенного давления, уравнению первого порядка для пористости, параболическому уравнению для температуры и вырождающемуся на решении параболическому уравнению для водонасыщенности.

В разделе 4.4 рассматривается алгоритм решения одномерной задачи фильтрации воды в тающем снеге. Раздел 4.5 посвящен численному исследованию одномерной задачи и верификации рассматриваемой модели. Сравнение результатов расчетов и экспериментальных данных показало, что математическая модель хорошо описывает период постепенного таяния снега в верхнем слое и формирование слоя, насыщенного водой. Несовпадение экспериментальных данных и численного моделирования после выключения инфракрасных ламп, скорее всего связано с формированием в снеге областей с большей пористостью (предпочтительных путей фильтрации). На верхнем слое данный эффект имеет меньшее влияние, поскольку, протаивание происходит более равномерно.

В **заключении** сформулированы основные результаты диссертационной работы.

Благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю доктору физ.-мат. наук А. А. Папину за постоянное внимание и руководство работой, доктору техн. наук С. Г. Яковченко за ценные советы и поддержку в ходе подготовки данной диссертации. Автор также благодарит руководителей и участников научных семинаров, на которых были представлены результаты данной диссертации, за конструктивные вопросы и замечания.

Глава 1

Моделирование движения смеси твердых частиц и жидкости в пористых средах с учетом внутренней суффозии

1.1 Постановка задачи

Рассматриваются процессы фильтрации воды в грунте и внутренней суффозии. Если через слой неподвижно лежащих твердых частиц (со степенью неоднородности $\eta > 20$ [29]) пропускать восходящий поток жидкости (или газа), постепенно увеличивая его скорость, то при определенной скорости, называемой критической, мелкая фракция перейдет в псевдооживленное состояние [21]. При этом мелкие твердые частицы приобретут подвижность и будут перемещаться между более крупными частицами. Грунт моделируется как трехфазная сплошная пористая среда. Поры полностью заполнены смесью воды ($i = 1$) и подвижных частиц грунта (псевдооживленное состояние $i = 2$). Доля пор в грунте ($i = 3$) определяется пористостью $\phi = (V_1 + V_2)/V$, где $V = V_1 + V_2 + V_3$ – общий объем грунта, V_1 , V_2 , V_3 – соответственно объемы воды, подвижных твердых частиц и скелета грунта. Уравнения сохранения массы и импульса для каждой из фаз имеют вид [15]:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \vec{u}_i) = \sum_{j=1}^3 I_{ji}, \quad (1.1.1)$$

$$\frac{\partial \rho_i \vec{u}_i}{\partial t} + \nabla^k (\rho_i \vec{u}_i u_i^k) = \nabla^k \sigma_i^k + \rho_i \vec{g}_i + \sum_{j=1}^3 \vec{P}_{ji}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.1.2)$$

Здесь $\nabla^k \equiv \partial/\partial x_k$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – декартова система координат в R^3 ; $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$ – оператор градиента; $\vec{u}_i \cdot \nabla = u_i^k \nabla^k = \sum_{k=1}^3 u_i^k \partial/\partial x_k$, $\nabla \cdot \vec{u}_i = \sum_{k=1}^3 \partial u_i^k / \partial x_k$ и по повторяющемуся индексу используется "немое" суммирование; $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ – соответственно истинные скорости воды, подвижных твердых частиц грунта и скелета грунта; $\rho_1 = \phi s_1 \rho_1^0$, $\rho_2 = \phi s_2 \rho_2^0$, $\rho_3 = (1 - \phi) \rho_3^0$ – приведенные плотности воды, подвижных твердых частиц грунта и скелета; $s_1 = V_1/(V_1 + V_2)$, $s_2 = V_2/(V_1 + V_2)$ – концентрации воды (водонасыщенность) и подвижных твердых частиц в порах; $\rho_1^0, \rho_2^0, \rho_3^0$ – истинные плотности воды, подвижных твердых частиц грунта и скелета грунта. В рассматриваемом случае $\rho_3^0 = \rho_2^0$, так как подвижные частицы захватываются суффозионным потоком из грунта; I_{ji} – интенсивность перехода массы из j -й в i -ю составляющую (или наоборот, из i -й в j -ю, тогда $I_{ji} < 0$) в единице объема смеси за единицу времени. Из закона сохранения массы при различных физико-химических превращениях (формально полагая $I_{ii} = 0$) имеем $I_{ji} = -I_{ij}$. Аналогично \vec{P}_{ji} – интенсивность обмена импульсом между i -й и j -й составляющими. Из закона сохранения импульса следует $\vec{P}_{ji} = -\vec{P}_{ij}$ ($\vec{P}_{ii} = 0$). В уравнениях сохранения импульса σ_i – тензор напряжений i -й фазы; \vec{g}_i – вектор ускорения, обусловленный внешними силами.

Используя уравнения неразрывности (1.1.1) и обозначение $d_i/dt \equiv \partial/\partial t + \vec{u}_i \cdot \nabla$, уравнения (1.1.2) можно представить в виде [15]:

$$\rho_i \frac{d_i \vec{u}_i}{dt} = \nabla^k \sigma_i^k + \rho_i \vec{g}_i + \sum_{j=1}^N (\vec{P}_{ji} - I_{ji} \vec{u}_i), \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.1.3)$$

Система уравнений (1.1.1), (1.1.3) является недоопределенной. Для ее замыкания необходимо конкретизировать величины, описывающие внутрифазные (силовое σ_i) и межфазные (массовое I_{ji} , силовое \vec{P}_{ji}) взаимодействия.

Следуя [15, с. 28], положим

$$\vec{P}_{ji} = -\vec{P}_{ij} = \vec{R}_{ji} + I_{ji} \vec{u}_{ji},$$

где \vec{R}_{ji} – межфазная сила, $I_{ji}\vec{u}_{ji}$ – обмен импульсом из-за фазовых превращений, \vec{u}_{ji} – скорость вещества i -й фазы на границе с j -й (для гетерогенных смесей вязких жидкостей $\vec{u}_{ji} = \vec{u}_{ij}$ [15, с. 28] и, следовательно, $R_{ji} = -R_{ij}$).

Для тензора напряжений σ_i и вектора \vec{R}_{ji} используется схема Х. А. Рахматулина силового взаимодействия и совместного деформирования фаз [68,69]. В этой схеме тензор σ_i представляется в симметричном виде [18, с. 313]:

$$\sigma_i^{kl} = -\phi s_i p_i \delta^{kl} + \tau_i^{kl}, \quad \phi s_i p_i \equiv -\frac{1}{3}\sigma_i^{kk}, \quad \tau_i^{kl} = \tau_i^{lk}, \quad \tau_i^{kk} = 0. \quad (1.1.4)$$

Для вязких компонент τ_i^{kl} тензора напряжений и суммарной силы межфазного взаимодействия принимаются зависимости [15, с. 31] :

$$\tau_i^{kl} = \phi s_i \left(-\frac{2}{3}\mu_i e_i^{mm} \delta^{kl} + 2\mu_i e_i^{kl} \right), \quad e_i^{kl} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i^k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_i^l}{\partial x_k} \right), \quad (1.1.5)$$

$$\sum_{j=1}^3 \vec{R}_{ji} = p_i \nabla(\phi s_i) + \sum_{j=1}^3 \vec{F}_{ji}, \quad \vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij},$$

где δ^{kl} – символ Кронекера, $p_i \nabla s_i$ – сила, возникающая из-за "расширения трубки тока фазы" [15, с. 57], \vec{F}_{ji} – сила сопротивления. В работах [15, 70, 71] для определения силы сопротивления используется соотношение $\vec{F}_{ji} = K_{ji}(\vec{u}_j - \vec{u}_i)$.

При обтекании однородным потоком твердой частицы, без учета силы тяжести, выделяют три основных силы: сила сопротивления Стокса, сила присоединенных масс и сила Бассе [38]. В случае обтекания частицы неоднородным потоком, строго говоря, необходимо было бы учесть также силу, вызванную неравномерностью распределения давления [21]. Нужно отметить, что, помимо рассмотренных выше сил, на твердую частицу могут действовать силы, обусловленные вращением твердой частицы (сила Магнуса), наличием градиента скорости потока (сила Сэфмана) и выталкивающая сила Архимеда [39].

Поскольку ускорения малы, то силой Бассе и силой присоединенных масс можно пренебречь. Из всех перечисленных сил основное влияние на движение частиц в однородном потоке оказывает сила Стокса (см. вывод уравнений движения псевдооживленного слоя [21]), т.е. сила межфазного взаимодействия пропорциональна разности скоростей фаз.

Если учитывать вращение частицы, т.е. угловую скорость и размеры частицы, то модель существенно усложняется. С другой стороны, вектор угловой скорости твердых частиц может быть ориентирован случайным образом и вкладом силы Магнуса можно пренебречь. Силой Архимеда также пренебрегаем, поскольку объемы частиц малы. Силой Сэфмана пренебрегаем, так как градиент скорости потока мал.

Согласно работам [21, 38] совместное взаимопроникающее движение жидкости и твердых частиц рассматривается в рамках континуальной модели механики многофазных сплошных сред и, в частности, жидкость и подвижные твердые частицы рассматриваются как вязкие среды со своими характеристиками. Основной проблемой при таком подходе является описание силового взаимодействия и совместного деформирования фаз. Подробное описание силового взаимодействия жидкости (газа) и твердых частиц, движущихся в потоке, изложено в работах [21, 38, 39]. В работе [38] вводится понятие эффективного давления жидкости p^e и эффективного давления псевдооживленной фазы p^{se} , так что давление жидкости есть $p_1 = s_1 p^e$, а давление твердых подвижных частиц $p_2 = s_2 p^{se}$, причем $p^e = p^{se} + p_c(s_1)$ и функция $p_c(s_1)$ обладает свойствами $p_c(s_1) \rightarrow \infty$ при $s_1 \rightarrow 0$, $p_c(1) = 0$. Следуя изложенному выше подходу, положим

$$p_2 - p_1 = p_c(s), \quad (1.1.6)$$

Здесь $s = s_1$ — концентрация жидкости (водонасыщенность, $s_2 = 1 - s$); p_c — заданная функция, обладающая свойствами:

$$p_c(s) > 0, \quad p_c(1) = 0, \quad \frac{\partial p_c}{\partial s} < 0, \quad p_c(s) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad s \rightarrow 0.$$

Такой же подход принят в работах [38, 72]. Следует отметить, что несовпадение давлений в фазах может иметь место, в частности, из-за капиллярных эффектов. Так, в классических моделях двухфазной фильтрации предполагается, что давления в фазах отличаются на величину капиллярного скачка [62, 73–77].

Используя сделанные предположения (1.1.4) и (1.1.5), считая малыми вязкие компоненты тензора напряжений ($\tau_i^{kl} = 0$) и силы взаимодействия воды и псевдо-

ожиженных частиц грунта ($K_{12} = K_{21} = 0$), запишем уравнение (1.1.3) в виде [78]:

$$\rho_1^0 s \phi \frac{d_1 \vec{u}_1}{dt} = -s \phi \nabla p_1 + K_{31}(\vec{u}_3 - \vec{u}_1) + \rho_1^0 s \phi \vec{g}, \quad (1.1.7)$$

$$\rho_2^0 (1-s) \phi \frac{d_2 \vec{u}_2}{dt} = -(1-s) \phi \nabla p_2 + K_{32}(\vec{u}_3 - \vec{u}_2) + \rho_2^0 (1-s) \phi \vec{g}. \quad (1.1.8)$$

При моделировании фильтрационных течений можно пренебречь инерциальными силами [78]. Отбрасывая левые части уравнений (1.1.7), (1.1.8) получим обобщенный закон Дарси

$$\phi s (\vec{u}_1 - \vec{u}_3) = -\frac{\phi^2 s^2}{K_{31}} (\nabla p_1 - \rho_1^0 \vec{g}) = -K_0 \frac{\bar{k}_{01}}{\mu_1} (\nabla p_1 - \rho_1^0 \vec{g}), \quad (1.1.9)$$

$$\phi (1-s) (\vec{u}_2 - \vec{u}_3) = -\frac{\phi^2 (1-s)^2}{K_{32}} (\nabla p_2 - \rho_2^0 \vec{g}) = -K_0 \frac{\bar{k}_{02}}{\mu_2} (\nabla p_2 - \rho_2^0 \vec{g}). \quad (1.1.10)$$

Удобно использовать следующие обозначения (по аналогии с обобщенным законом Дарси для двухфазной фильтрации) $\phi^2 s_i^2 / K_{3i} = K_0 \bar{k}_{0i} / \mu_i$, где $K_0(\phi)$ – симметрический тензор проницаемости пористой среды; \bar{k}_{0i} – коэффициенты, обладающие свойствами $\bar{k}_{0i} = \bar{k}_{0i}(s_i) \geq 0$, $\bar{k}_{0i}|_{s_i=0} = 0$, $0 \leq s_i \leq 1$; μ_i – коэффициенты динамической вязкости; \vec{g} – ускорение силы тяжести. Эффективная динамическая вязкость псевдоожиженного слоя и коэффициенты $K_0(\phi)$, \bar{k}_{0i} могут быть измерены экспериментально [21, 38, 77].

В дальнейшем рассматривается изотермический суффозионный процесс в недеформируемой пористой среде (скорость скелета грунта $\vec{u}_3 = 0$). Положим $I_{32} = I$ и будем считать истинные плотности ρ_i^0 постоянными. В этом случае система (1.1.1), (1.1.9), (1.1.10) приводится к эллиптико – параболической системе [62] и уравнению кинетики. Действительно, используя сделанные предположения вместо (1.1.1), (1.1.9), (1.1.10) получим

$$\frac{\partial(s\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (s\phi \vec{u}_1) = 0, \quad (1.1.11)$$

$$\frac{\partial(1-s)\phi}{\partial t} + \nabla \cdot ((1-s)\phi \vec{u}_2) = \frac{I}{\rho_2^0}, \quad (1.1.12)$$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} = -\frac{I}{\rho_3^0}, \quad (1.1.13)$$

$$s_i \phi \vec{u}_i = -K_0(\phi) k_{0i} (\nabla p_i - \rho_i^0 \vec{g}), \quad k_{0i} = \frac{\bar{k}_{0i}}{\mu_i}. \quad (1.1.14)$$

Сложив уравнения (1.1.11), (1.1.12) и (1.1.13), выводим

$$\nabla \cdot (s \phi \vec{u}_1 + (1-s) \phi \vec{u}_2) = 0. \quad (1.1.15)$$

Положим

$$\vec{v} = s \phi \vec{u}_1 + (1-s) \phi \vec{u}_2.$$

Используя (1.1.14) и (1.1.6), получим следующее представление для \vec{v} :

$$\begin{aligned} -\vec{v} &= K_0(\phi) (k_{01} (\nabla(p_2 - p_c) - \rho_1^0 \vec{g}) + k_{02} (\nabla p_2 - \rho_2^0 \vec{g})) = \\ &= K_0 \left(k (\nabla p_2 - \frac{k_{01}}{k} \frac{\partial p_c}{\partial s} \nabla s) - \vec{g} (\rho_2^0 k_{02} + \rho_1^0 k_{01}) \right) = \\ &= K_0 \left(k \nabla(p_2 + \int_s^1 \frac{k_{01}(\xi)}{k(\xi)} \frac{\partial p_c}{\partial \xi} d\xi) - \vec{g} (\rho_2^0 k_{02} + \rho_1^0 k_{01}) \right) = K \nabla p + \vec{f}, \end{aligned} \quad (1.1.16)$$

где p – так называемое "приведенное" давление [62]

$$p = p_2 + \int_s^1 \frac{k_{01}(\xi)}{k(\xi)} \frac{\partial p_c}{\partial \xi} d\xi. \quad (1.1.17)$$

Здесь введены обозначения:

$$k(s) = k_{01} + k_{02},$$

$$K(s, \phi) = K_0(\phi) k(s),$$

$$\vec{f}(s, \phi) = -K_0 \vec{g} (k_{01} \rho_1^0 + k_{02} \rho_2^0),$$

С учетом (1.1.17), для $\vec{v}_2 = (1-s) \phi \vec{u}_2$ имеем

$$-\vec{v}_2 = -a \nabla s + K_0 k_{02} \nabla p + \vec{f}_0, \quad (1.1.18)$$

$$a(s, \phi) = -K_0 \frac{k_{01} k_{02}}{k} \frac{\partial p_c}{\partial s},$$

$$\vec{f}_0(s, \phi) = -K_0 k_{02} \rho_2^0 \vec{g}.$$

Используя (1.1.16), находим

$$K_0 k_{02} \nabla p = -\frac{k_{02}(\vec{v} + \vec{f})}{k}.$$

Тогда вместо (1.1.18) получим

$$-\vec{v}_2 = -a\nabla s - b\vec{v} - \vec{F}, \quad (1.1.19)$$

$$\vec{F}(s, \phi) = b\vec{f} - \vec{f}_0 = \frac{k_{01}k_{02}K_0\vec{g}}{k}(\rho_2^0 - \rho_1^0), \quad b(s) = \frac{k_{02}}{k}.$$

Складывая уравнения (1.1.12), (1.1.13) и привлекая соотношение (1.1.18), приходим к уравнению

$$\frac{\partial(s\phi)}{\partial t} = \nabla \cdot (a\nabla s - K_0 k_{02} \nabla p - \vec{f}_0). \quad (1.1.20)$$

Уравнения (1.1.13) и (1.1.15) можно переписать в виде

$$\nabla \cdot (K\nabla p + \vec{f}) = 0, \quad (1.1.21)$$

$$\rho_3^0 \frac{\partial(1 - \phi)}{\partial t} = -I. \quad (1.1.22)$$

Система уравнений (1.1.20), (1.1.21) и (1.1.22) рассматривается относительно s , p и ϕ . Последнюю систему с учетом (1.1.19) можно привести к следующей эквивалентной форме

$$\frac{\partial s\phi}{\partial t} = \nabla \cdot (a\nabla s + b\vec{v} + \vec{F}), \quad (1.1.23)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (1.1.24)$$

$$\rho_3^0 \frac{\partial(1 - \phi)}{\partial t} = -I, \quad (1.1.25)$$

$$-\vec{v} = K\nabla p + \vec{f}. \quad (1.1.26)$$

Особенностью рассматриваемой задачи является возможное вырождение на решении уравнения (1.1.20), поскольку $a(0, \varphi) = a(1, \varphi) = 0$, а коэффициент фильтрации, как правило, задается следующим образом $K_0 = B\phi^3/(1 - \phi)^2$ или $K_0 = B\varphi^\alpha$, $3 \leq \alpha \leq 5$ [76]. Кроме того, пористость и насыщенность должны удовлетворять условиям $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq \phi < 1$ (см. раздел 2.3).

1.2 Суффозионный поток

Для замыкания система уравнений (1.1.23) – (1.1.26) необходимо задать интенсивность суффозионного процесса I . Главной причиной фильтрационных деформаций и фильтрационных разрушений грунтов является вынос частиц грунта из области фильтрации. Многочисленные эксперименты показали, что суффозионный процесс начинается только если модуль скорости фильтрации больше критического значения v_k . В работах К. Терцаги (см., например, [63]) сделана оценка критического градиента напора при котором начинается вынос частиц грунта

$$I_* = (\gamma - 1)(1 - \phi). \quad (1.2.1)$$

Здесь I_* – критический градиент напора, при котором грунт находится во взвешенном состоянии; γ – удельный вес грунта.

В книге [79] на основе экспериментальных данных сделан вывод, что формула (1.2.1) дает заниженные результаты, так как не учитывает веса воды в порах грунта, и вместо (1.2.1) предложена зависимость

$$I_* = (\gamma - 1)(1 - \phi) + 0.5\phi.$$

Эта формула подтверждалась лабораторными опытами [79]. Однако, в этих опытах не было учтено влияние стенок прибора, что привело к завышению критических градиентов напора [80, с. 316].

В работе [80, с. 319] модуль критической скорости v_k , при достижении которой начинается суффозионный процесс, рекомендуется находить по формуле, полученной на основе достаточно обширных натуральных данных

$$v_k = 60\sqrt[3]{K_0},$$

где K_0 - коэффициент фильтрации грунта. В [80] показано, что все несвязанные грунты, механические составы которых выражаются в полулогарифмических координатах прямой линией или кривой, близкой к ней, практически могут оцениваться как несуффозионные.

На основе обработки экспериментальных данных были предложены различные формулы для интенсивности фазового перехода. В работе [81] суффозионный поток определяется следующим образом

$$I_{er} = \rho_2^0 \lambda (1 - \phi) s_2 \|\vec{v}\|, \quad (1.2.2)$$

где λ – определяемая экспериментально функция (отвечает за устойчивость грунта суффозионному воздействию), $\|\vec{v}\|$ – модуль вектора скорости смеси воды и подвижных частиц грунта.

В работе [81] интенсивность суффозионного процесса предложено определять как разность

$$I = I_{er} - I_{dep}, \quad (1.2.3)$$

где I_{er} – поток твердых частиц (процесс суффозии), I_{dep} – поток осевших твердых частиц (процесс кольматации).

Для определения I_{dep} в работе [81] предлагается использовать соотношение

$$I_{dep} = \rho_2^0 \lambda (1 - \phi) \frac{s_2^2}{s_{cr}} \|\vec{v}\|. \quad (1.2.4)$$

Здесь s_{cr} – критическое значение концентрации подвижных твердых частиц грунта при достижении которой ($s_2 = s_{cr}$) процессы суффозии и кольматации уравниваются друг друга. Подставив (1.2.2) и (1.2.4) в (1.2.3), получим соотношение [81]

$$I = \rho_2^0 \lambda (1 - \phi) \left(s_2 - \frac{s_2^2}{s_{cr}} \right) \|\vec{v}\|.$$

В работе [36] скорость подвижных частиц грунта определялась из гипотезы $\vec{v}_2 = \chi \vec{v}_1$ ($0 < \chi < 1$), а интенсивность суффозионного процесса определялся следующим образом

$$I_{er} = \rho_2^0 \lambda (1 - \phi) s_2 \|\vec{v}_2\|.$$

В работе [41] предложено использовать соотношение не зависящее от пористости грунта

$$I_{er} = \rho_2^0 \lambda s_2 \|\vec{v}_2\|.$$

В работе [30] проведен анализ экспериментальных данных, из которого следует, что суффозионный процесс начинается после достижения модуля скорости

фильтрации критического значения v_k . Так же из обработки результатов экспериментов получено соотношение для определения модуля критической скорости фильтрации воды

$$v_k = 4.2 \frac{\nu}{D_0} \sqrt[9]{\frac{D_0^3 g}{n^3 \nu^2}},$$

где D_0 характерный диаметр пор, n – коэффициент формы сечения порового канала, ν – кинематический коэффициент вязкости воды, g – модуль ускорения силы тяжести.

В работе [9] для I используется зависимость

$$I = \begin{cases} \lambda \rho_3^0 (1 - \phi)(1 - s)(1 - \frac{1-s}{1-s_{cr}}) |\vec{v}|, & |\vec{v}| \geq v_k; \\ 0, & |\vec{v}| < v_k. \end{cases} \quad (1.2.5)$$

В работе [35] используется упрощенная зависимость не учитывающая влияние концентрации подвижных частиц грунта в фильтрующемся потоке

$$I = \lambda \rho_3^0 (C_{me} \phi_0 - \phi) |\vec{v}_1|. \quad (1.2.6)$$

Здесь ϕ_0 – начальное значение пористости, заданный параметр C_{me} позволил учесть замедление суффозионного процесса при уменьшении в составе грунта мелких частиц грунта (диаметр которых меньше диаметра пор образованных крупными частицами). В результате суффозионного процесса мелкие частицы выносятся из области фильтрации в составе скелета грунта остаются только крупные частицы. Если крупные частицы однородны (с одинаковым диаметром), суффозионный процесс прекращается и грунт может сохранять устойчивость даже при существенном увеличении скорости фильтрации [31].

В работах S. Vonelli (см., например, [82, с. 187]) движение воды, подвижных частиц и отрыв частиц от скелета моделируется на основе подходов, развитых в задачах с неизвестной границей. Вода и подвижные частицы грунта рассматриваются как однородная смесь (несжимаемая вязкая жидкость со стандартной реологией), которая движется со скоростью \vec{u} и имеет плотность $\rho = \phi \rho_1^0 + (1 - \phi) \rho_3^0$. Неизвестная граница Γ между областями, занятыми смесью и твердым скелетом, определяется из уравнения переноса вида

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \vec{c} \cdot \nabla \psi = 0,$$

где функция ψ имеет следующие свойства: $\psi = 0$ на Γ , $\psi > 0$ в твердом скелете, а в области фильтрации $\psi < 0$; $\vec{c} = c_\Gamma \vec{n}$, \vec{n} – вектор нормали к границе Γ . Модуль скорости движения границы равен

$$c_\Gamma = \begin{cases} k_d(\tau - \tau_c), & \tau \geq \tau_c; \\ 0, & \tau < \tau_c, \end{cases}$$

где k_d – коэффициент пропорциональности, τ – модуль касательного напряжения

$$\tau = \sqrt{(T\vec{n})^2 - (\vec{n}T\vec{n})^2},$$

τ_c – критическое значение модуля касательного напряжения, при достижении которого, начинается суффозионный процесс.

Тензор напряжений и тензор скоростей деформации имеют вид

$$T = -PI + 2\mu_1 D(\vec{u}),$$

$$D(\vec{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^*).$$

В данном подходе интенсивность фазового перехода определяется формулой

$$I = \rho(c_\Gamma - \vec{u} \cdot \vec{n}).$$

В работе [59] рассматривалось двухфазное течение (вода ($i = 1$), подвижные частицы ($i = 2$), $s_1 + s_2 = 1$) и использовалось следующее соотношение для определения интенсивности суффозионного процесса

$$I = \rho_3^0 \lambda \delta(s) R(\phi) \max\{|\vec{v}_1| - v_k, 0\}, \quad (1.2.7)$$

$$\delta(s) = \begin{cases} 0, & s \geq 1; \\ 1 - s, & 0 < s < 1; \\ 1, & s \leq 0; \end{cases}$$

$$R(\phi) = \begin{cases} 1, & \phi \geq 1; \\ \phi(\phi_{cr} - \phi), & 0 < \phi < 1; \\ 0, & \phi \leq 0; \end{cases}$$

Здесь ϕ_{cr} – заданный безразмерный параметр, отвечающий за замедления суффозионного процесса если грунт после выноса мелкой фракции становится однородным ($\phi_0 < \phi_{cr} \leq 1$, где ϕ_0 – начальное значение пористости, в работе [59] рассматривался предельный случай при $\phi_{cr} = 1$).

В дальнейшем будем использовать для замыкания системы (1.1.23) – (1.1.26) соотношение (1.2.7). Такой выбор интенсивности фазового перехода позволяет гарантировать выполнение физического принципа максимума для пористости и водонасыщенности (см. раздел 2.3).

1.3 Алгоритм численного решения одномерной задачи

В одномерном случае система уравнений (1.1.23) – (1.1.26) примет вид

$$\phi \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial s}{\partial x} + bv + F \right) - s \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (1.3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial p}{\partial x} + f \right) = 0, \quad (1.3.2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{I}{\rho_3^0}. \quad (1.3.3)$$

Для системы (1.3.1) – (1.3.3) рассматривается следующая начально-краевая задача:

$$s(x, 0) = s_1(x), \quad s(0, t) = s_0(t), \quad \frac{\partial s}{\partial x}(l, t) = s_l(t), \quad (1.3.4)$$

$$\phi(x, 0) = \phi_0(x), \quad \frac{\partial p}{\partial x}(0, t) = p_0(t), \quad p(l, t) = p_l(t), \quad x \in [0, l].$$

Здесь $s_1, s_0, s_l, \phi_0, p_0, p_l$ – заданные функции.

Пусть t_{sc}, x_{sc} – время и длина есть заданные постоянные. Положим

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \frac{t}{t_{sc}}, & \tilde{x} &= \frac{x}{x_{sc}}, & \tilde{p} &= \frac{p}{p_{sc}}, & \tilde{v} &= \frac{v}{v_{sc}}, \\ v_{sc} &= \frac{x_{sc}}{t_{sc}}, & \mu &= \frac{\mu_2}{\mu_1}, & g &= \tilde{g} \frac{x_{sc}}{t_{sc}^2}, & p_{sc} &= \frac{\rho_1^0 x_{sc}^2}{t_{sc}^2}. \end{aligned}$$

В безразмерных переменных система (1.3.1) – (1.3.3) принимает следующую форму:

$$\begin{aligned}\phi \frac{\partial s}{\partial \tilde{t}} &= \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(\tilde{a} \frac{\partial s}{\partial \tilde{x}} + b\tilde{v} + \tilde{F} \right) - s \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{t}}, \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(\tilde{K} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{f} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{t}} &= \tilde{I}.\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\tilde{a}(s, \varphi) &= -\tilde{K}_0 \frac{\bar{k}_{01} \bar{k}_{02}}{\mu \bar{k}_{01} + \bar{k}_{02}} \frac{\partial \tilde{p}_c}{\partial s}, \\ v &= \tilde{v} \frac{x_{sc}}{t_{sc}} = \tilde{v}_1 + \tilde{v}_2, \quad \tilde{v}_1 = -\tilde{K}_0 \bar{k}_{01} \left(\frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial \tilde{x}} - \tilde{g} \right), \\ \tilde{v}_2 &= -\tilde{K}_0 \frac{\bar{k}_{02}}{\mu} \left(\frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial \tilde{x}} - \frac{\rho_2^0}{\rho_1^0} \tilde{g} \right), \quad b(s) = \frac{\bar{k}_{02}}{\mu \bar{k}_{01} + \bar{k}_{02}}, \\ \tilde{F} &= \tilde{K}_0 \tilde{g} \frac{\bar{k}_{01} \bar{k}_{02} (\frac{\rho_2^0}{\rho_1^0} - 1)}{\mu \bar{k}_{01} + \bar{k}_{02}}, \quad \tilde{K}_0 = \frac{B p_{sct_{sc}} \hat{K}_0}{x_{sc}^2 \mu_1}, \\ \hat{K}_0 &= \frac{\varphi^3}{(1 - \varphi)^2}, \\ \tilde{f} &= -\tilde{K}_0 (\bar{k}_{01} + \frac{\rho_2^0 \mu_1}{\rho_1^0 \mu_2} \bar{k}_{02}) \tilde{g}, \quad \tilde{k} = \bar{k}_{01} + \frac{\mu_1}{\mu_2} \bar{k}_{02}, \\ \tilde{K} &= \tilde{K}_0 \tilde{k}, \\ \tilde{I} &= \begin{cases} \tilde{\lambda} \phi (\phi_{cr} - \phi) (1 - s) (|\tilde{v}_1| - \tilde{v}_k), & |\tilde{v}_1| \geq \tilde{v}_k; \\ 0, & |\tilde{v}_1| < \tilde{v}_k, \end{cases} \\ \tilde{\lambda} &= \lambda x_{sc}, \quad \tilde{v}_k = \tilde{v}_k \frac{x_{sc}}{t_{sc}}.\end{aligned}$$

Опуская крышки и волны, получим

$$\phi \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a(s, \phi) \frac{\partial s}{\partial x} + b(s)v(t) + F(s, \phi) \right) - s \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (1.3.5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(s, \phi) \frac{\partial p}{\partial x} + f(s, \phi) \right) = 0, \quad (1.3.6)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = I(s, \phi, p). \quad (1.3.7)$$

Следует отметить, что суммарная скорость фильтрации v является искомой функцией и определяется из равенства (1.1.16) в ходе решения задачи. В пункте 1.7 рассмотрен частный случай при заданной суммарной скорости фильтрации.

Введем сетку с равномерно распределенными узлами $x_i = ih$, $t_n = n\tau$; $i = 0, \dots, N$, $n = 0, \dots, T$, h - шаг по пространственной координате, τ - шаг по времени.

В работе [22] численно исследуется фильтрация двухфазной смеси в пористой среде с заданной пористостью (модель Маскета–Леверетта). Существенным отличие моделей исследуемых в данной работе является учет изменения пористости. При аппроксимации уравнения (1.3.5) за основу взята разностная схема используемая в работе [22, с. 102] для модели Маскета–Леверетта с использованием направленной разности для конвективного слагаемого. В результате получаем разностное уравнение:

$$\begin{aligned} \phi_i^n \frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{\tau} &= a_{i+1/2}^n \frac{s_{i+1}^{n+1} - s_i^{n+1}}{h^2} - a_{i-1/2}^n \frac{s_i^{n+1} - s_{i-1}^{n+1}}{h^2} + \\ &+ \frac{(|G_i^n| + G_i^n) s_{i+1}^{n+1} - 2|G_i^n| s_i^{n+1} + (|G_i^n| - G_i^n) s_{i-1}^{n+1}}{2h} + \\ &+ F_{\phi_i}^n \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2h} - s_i^n \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\tau}. \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

Здесь $i = 1, \dots, N - 1$, $\tau = 0, \dots, T - 1$,

$$\begin{aligned} a_{i-1/2}^n &= \frac{2K_0(\phi_{i-1}^n) a(s_{i-1}^n) K_0(\phi_i^n) a(s_i^n)}{K_0(\phi_{i-1}^n) a(s_{i-1}^n) + K_0(\phi_i^n) a(s_i^n)}, \\ a_{i+1/2}^n &= \frac{2K_0(\phi_{i+1}^n) a(s_{i+1}^n) K_0(\phi_i^n) a(s_i^n)}{K_0(\phi_{i+1}^n) a(s_{i+1}^n) + K_0(\phi_i^n) a(s_i^n)}, \\ F_{\phi_i}^n &= \frac{\partial F}{\partial \phi}(s_i^n, \phi_i^n), \quad G_i^n = \frac{\partial F}{\partial s}(s_i^n, \phi_i^n) + v(t_n) \frac{\partial b}{\partial s}(s_i^n). \end{aligned}$$

Уравнение (1.3.6) аппроксимируется неявной схемой второго порядка точности

$$K_{i+1/2}^n \frac{p_{i+1}^n - p_i^n}{h^2} - K_{i-1/2}^n \frac{p_i^n - p_{i-1}^n}{h^2} + \quad (1.3.9)$$

$$+ f_{si}^n \frac{s_{i+1}^n - s_{i-1}^n}{2h} + f_{\phi i}^n \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2h} = 0.$$

Здесь $i = 1, \dots, N - 1$, $\tau = 0, \dots, T - 1$,

$$f_{si}^n = \frac{\partial f}{\partial s}(s_i^n, \phi_i^n), \quad f_{\phi i}^n = \frac{\partial f}{\partial \phi}(s_i^n, \phi_i^n),$$

$$K_{i-1/2}^n = \frac{2K(\phi_{i-1}^n, s_{i-1}^n)K(\phi_i^n, s_i^n)}{K(\phi_{i-1}^n, s_{i-1}^n) + K(\phi_i^n, s_i^n)},$$

$$K_{i+1/2}^n = \frac{2K(\phi_{i+1}^n, s_{i+1}^n)K(\phi_i^n, s_i^n)}{K(\phi_{i+1}^n, s_{i+1}^n) + K(\phi_i^n, s_i^n)}.$$

Уравнение (1.3.7) аппроксимируется неявной схемой Рунге-Кутты второго порядка точности. Причем найденное на первом этапе значение $\tilde{\phi}_i^{n+1}$

$$\tilde{\phi}_i^{n+1} = \phi_i^n + \tau I_i^n, \quad (1.3.10)$$

затем уточняется следующим образом:

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n + \tau \frac{I(\phi_i^n, s_i^n) + I(\tilde{\phi}_i^n, s_i^n)}{2}, \quad (1.3.11)$$

$$I_i^n = \begin{cases} \lambda \phi_i^n (\phi_{cr} - \phi_i^n) (1 - s_i^n) (|v_{1i}^n| - |v_k|), & |v_{1i}^n| \geq v_k; \\ 0, & |v_{1i}^n| < v_k. \end{cases}$$

Алгоритм численного решения начально-краевой задачи следующий: используя начальное значение пористости ϕ_i^0 и концентрации s_i^0 , находим начальное распределение приведенного давления p_i^0 ($i = 0, \dots, N$) из уравнения (1.3.6). Используя найденное давление, определяем скорости фильтрации воды и подвижных частиц грунта v_{1i}^0 и v_{2i}^0 . Из равенства (1.3.10) находим пористость грунта ϕ_i^1 на следующем шаге по времени. Из уравнения (1.3.5) находим концентрацию воды s_i^1 . Рассчитываем давление на следующем шаге по времени ($n = 1$). Используя найденные значения искомым функций $\tilde{\phi}_i^1$, s_i^1 , p_i^0 , p_i^1 , делаем коррекцию значения пористости на первом шаге по времени, используя формулу (1.3.11). Повторяя данный алгоритм для следующих шагов по времени, найдем значения искомым функций на всем временном интервале.

1.4 Одномерная задача внутренней суффозии

В работе [35] численно исследована математическая модель внутренней суффозии на основе уравнения диффузии. Для замыкания модели использовалась гипотеза равенства скоростей подвижных частиц грунта и воды. Сравнение результатов вычислений с экспериментальными данными показало, что модель дает хорошее совпадение с результатами эксперимента [35] в случае, когда эффектом физико-химических процессов на эрозию можно пренебречь (мала ионная сила раствора, составляющего несущую фазу) и грунт подвержен внутренней суффозии ($\lambda = 8.5$), но завышает значения эродированной и вынесенной массы грунта из области фильтрации для грунтов, слабо подверженных суффозии ($\lambda = 4$ и $\lambda = 1$ см. Рисунок 1.1а). В работе [36] предложено определять скорости подвижных частиц грунта из соотношения $v_1 = \beta v_2$ ($0 < \beta < 1$), т.е. постулировалось, что скорость частиц грунта меньше скорости фильтрации воды, но из каких соображений выбирается коэффициент $\beta = const$, не разъясняется.

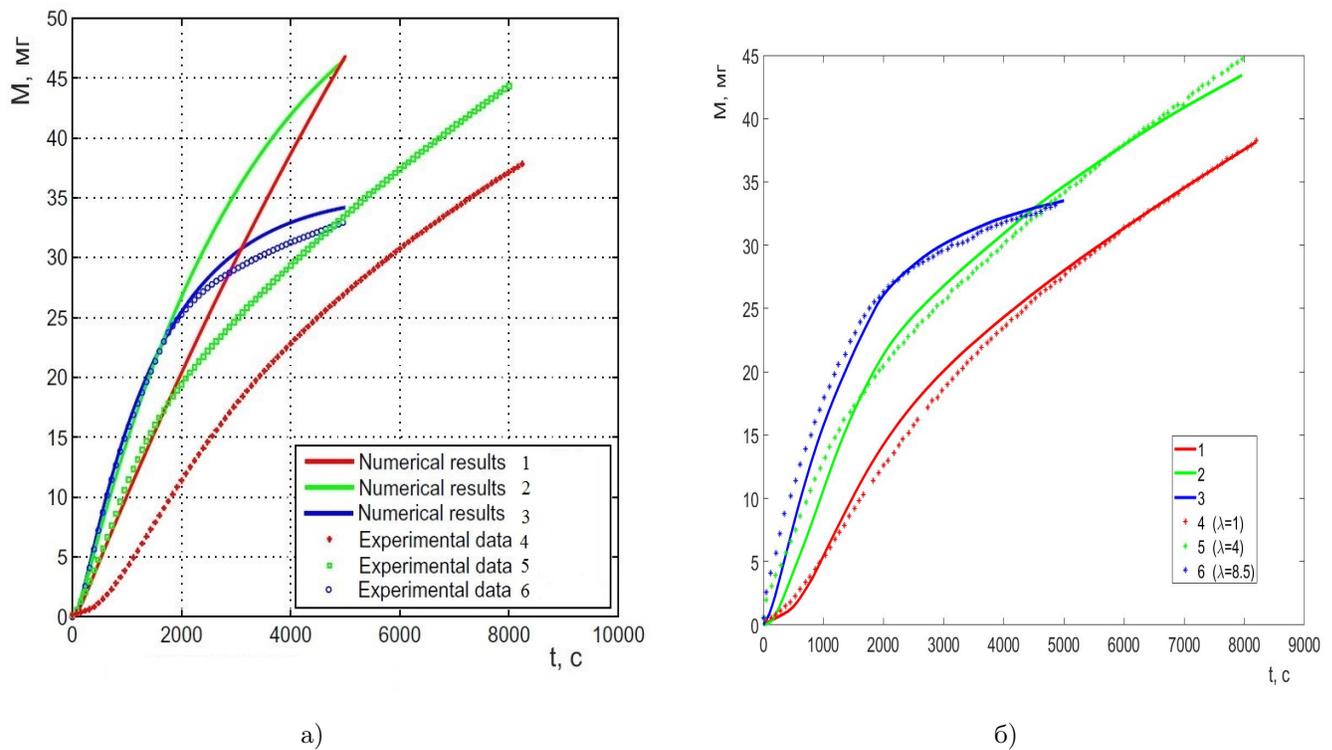


Рис. 1.1: (а): результаты моделирования (1-3), представленные в работе [35]; 4-6 – экспериментальные данные, $\lambda = 1, 4, 8.5$ (1-3) и (4-6). (б): результаты (1-3) численного моделирования; 4-6 – экспериментальные данные; M – эродированная масса грунта, t – время.

В данной работе для верификации предложенной математической модели (1.3.5) – (1.3.7) используются результаты эксперимента, представленного в работе [35]. Экспериментальная установка состоит из резервуара, наполненного жидкостью, и создающего гидравлическую нагрузку, приложенную к горизонтальной трубе, заполненной образцом грунта. В ходе эксперимента были исследованы несколько образцов грунта с разной суффозионной устойчивостью (за суффозионную устойчивость отвечает параметр λ). Суффозионные тесты были проведены для смеси крупного песка, размеры частичек которого изменялись между 0.315 и 1.60 мм, и мелких частиц, размеры которых изменялись от 1 до 80 микрон. Концентрация мелких частиц в смеси песка изменялась от 2 до 8 процентов от веса. Смеси были подготовлены смешиванием песка и мелких частиц с 3-х процентным содержанием воды, затем смесь хранилась в течение 24 часов перед тем, как она загружалась в экспериментальную установку методом двукратного прессования.

При численном исследовании начально краевой задачи (1.3.1)-(1.3.4) для капиллярного давления использовалась следующая эмпирической зависимость [14] $p_c(s) = \gamma(1/s - 1)$, здесь γ – размерный параметр [Па] (в численных расчетах $\gamma = 10$ кПа определялся подбором в ходе решения задачи и сопоставления результатов моделирования и экспериментальных данных). Полученные результаты вычислений сравнивались с экспериментальными данными из работы [35]. Скорость движения подвижных частиц грунта определяется в ходе решения задачи, используя уравнение (1.1.14) (см. также [84]).

В численных расчетах использовался следующий набор модельных параметров: $g = 0$ м/с², $v_k = 0$, $K_0(\phi) = B\phi^3/(1 - \phi)^2$, $B = 14 \cdot 10^{-7}$ м², $k_{0i} = s_i^2$ если $0 \leq s \leq 1$, $k_{0i} = 0$ если $s_i \leq 0$, $k_{0i} = 1$ если $s_i \geq 1$. Начальные и граничные условия задавались в виде $\frac{\partial p_1}{\partial x}(0, t) = H$, $\frac{\partial p}{\partial x}(0, t) = H + \frac{k_{02}(s)}{k(s)} \frac{\partial p_c}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x}$, где H – градиент напора воды (в численных расчетах $H = 2.4$). Предполагалось что $s(0, t) = s_0 = 1 - s_2^0$, где s_2^0 – концентрация подвижных частиц грунта, определяется экспериментально. На другом конце рассматриваемой области $x = l$ граничное условие задавалось в виде $p(l, t) = 101$ кПа (атмосферное давление). Для концентрации подвижных частиц

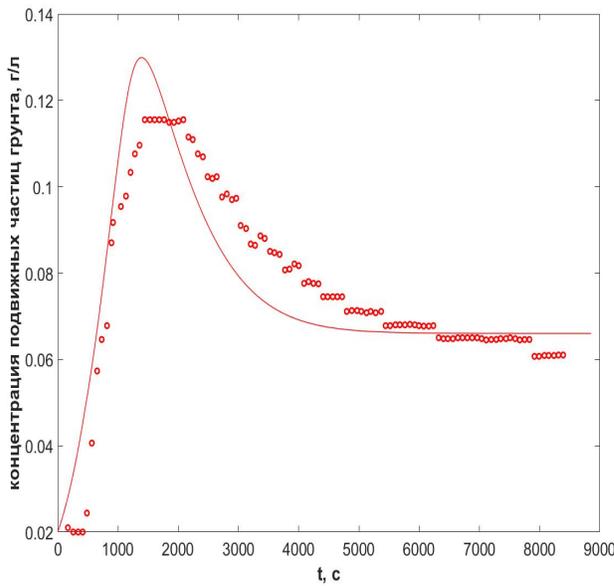
грунта на границе рассматривались два варианта: $\frac{\partial s}{\partial x}(l, t) = 0$ и $s(l, t) = s_h(t)$, где s_h – дискретная функция, значения которой определялись экспериментально в работе [35]. В начальный момент времени пористость является постоянной $\phi(x, 0) = 0.35$, а водонасыщенность s задавалась равной экспериментально измеренному значению $s(x, 0) = s_h(0)$ ($s_2^0 = 1 - s_h(0)$).

В численных расчетах использовались следующие параметры [35]:

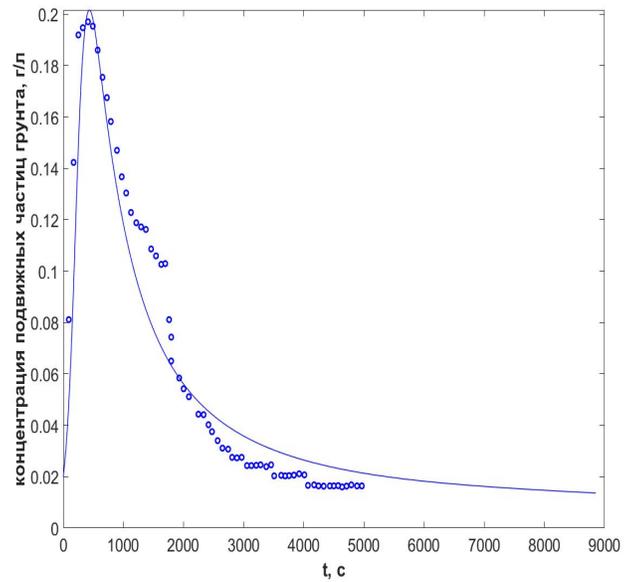
$$\rho_1^0 = 1000 \text{ кг/м}^3, \quad \rho_2^0 = 1800 \text{ кг/м}^3, \quad l = 123 \text{ мм},$$

$$\mu_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг/(м} \cdot \text{с)}, \quad \mu_2 = 3.6 \cdot 10^{-3} \text{ кг/(м} \cdot \text{с)}.$$

$$k_{01} = \begin{cases} 0, & s \leq 0; \\ s^2, & 0 < s < 1; \\ 1, & s \geq 1; \end{cases} \quad k_{02} = \begin{cases} 1, & s \leq 0; \\ (1 - s)^2, & 0 < s < 1; \\ 0, & s \geq 1. \end{cases}$$



а)



б)

Рис. 1.2: Результаты численного моделирования изменения концентрации псевдооживленных частиц (прямая линия) и экспериментальные данные (точки): $\lambda = 1$ (а), $\lambda = 8.5$ (б) при $x = 123$ мм.

На Рисунках 1.2 и 1.3 приведены концентрации подвижных частиц грунта. На Рисунке 1.1 б представлено сравнение рассчитанных значений вынесенной массы грунта из области фильтрации с экспериментальными данными, взятыми из

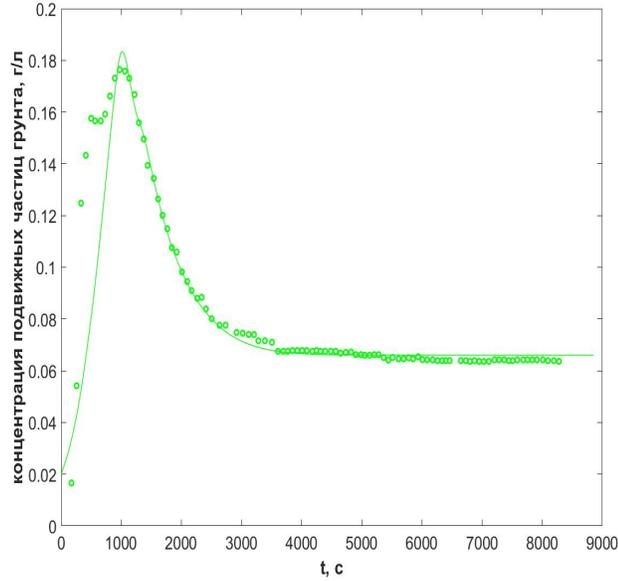


Рис. 1.3: Результаты численного моделирования изменения концентрации псевдооживленных частиц (прямая линия) и экспериментальные данные (точки): $\lambda = 4$ при $x = 123$ мм.

работы [35]. Сравнение рассчитанных значений скоростей фильтрации воды и подвижных частиц грунта показало, что модуль скорости воды заметно превосходит модуль скорости подвижных частиц грунта.

Устойчивость и порядок сходимости вычислительного алгоритма проверяются путем вычислительных экспериментов, применяя известное правило Рунге [50, с. 75]: достаточно провести три расчета на сетках с шагами $h_1 = h$, $h_2 = h/2$, $h_3 = h/4$, $\tau_i = \kappa h_i$, $\kappa = const$, $i = 1, 2, 3$. Наблюдение ведется за концентрацией воды s , пористостью ϕ , приведенным давлением p и скоростями фильтрации v_1 и v_2 . Экспериментальный порядок сходимости $R \approx 1$ и приближенно определяемая относительная погрешность $\varepsilon \approx 0.1\%$.

1.5 Экспериментальное определение порядков сходимости разностного решения

Поскольку точное решение задачи (1.3.1) – (1.3.4) заранее не известно, то необходимо определять приближенный (экспериментальный) порядок сходимости разностного решения $s_h(T, x)$ в заданный момент времени $T = n\tau$ каждой фиксированной

точке

$$(x, T) : \quad x = ih, \quad i = 0 \dots N, \quad N = X/h \quad (1.5.1)$$

в расчетной области $\{t \geq 0, 0 \leq x \leq X\}$. Для этого применяется известное правило Рунге [50, с. 75], заключающееся в том, что необходимо провести несколько расчетов этой задачи с достаточно малыми шагами

$$h_j = h/2^{j-1}, \quad \tau_j = \kappa h_j, \quad \kappa = \text{const}, \quad j = 1, \dots, N_h. \quad (1.5.2)$$

Предполагая, что получаемое разностное решение s_h при $h \rightarrow 0$ в некоторой точке (1.5.1) расчетной области сходится с порядком r к искомому точному решению s , получим, что его погрешность $\delta s_j = s_j - s$ с точностью до $O(h^r)$ удовлетворяет условию

$$\delta s_j(x, T) = s_j(x, T) - s(x, T) \approx C_1 h^{r(x, T)}, \quad (1.5.3)$$

где C_1 – ограниченный функционал, не зависящий от h , $T = n\tau$ – некоторый момент времени. Вычитая из формулы (1.5.3), в которой $h = h_j$, эту же формулу, в которой h заменено на $h_j + 1$, найдем

$$\delta^* s_j(x, T) = s_j(x, T) - s_{j+1}(x, T) \approx C_1 (h_j^r - h_{j+1}^r). \quad (1.5.4)$$

Предполагая, что $|C_1| \leq \varepsilon > 0$, получим

$$\frac{|\delta^* s_j|}{|\delta^* s_{j+1}|} \approx \frac{h_j^r - h_{j+1}^r}{h_{j+1}^r - h_{j+2}^r} = \frac{h^r - (h/2)^r}{(h/2)^r - (h/4)^r} = 2^{r_j}.$$

Из последнего соотношения можно вывести формулу для экспериментального определения порядков сильной локальной сходимости разностного решения [28, 83]:

$$r_j = \log_2 \frac{|\delta^* s_j|}{|\delta^* s_{j+1}|}, \quad j = 1, \dots, N_h. \quad (1.5.5)$$

При проведении расчетов на нескольких сетках $N_h > 3$ можно найти осредненный порядок r :

$$r = \sum_{j=1}^{N_h-2} \frac{r_j}{N_h - 2}.$$

Для введения понятия слабой сходимости сеточного решения s_j дополним его путем линейной интерполяции до кусочно-линейной по x функции

$$\bar{s}_j(x, T) = s_{j_i}^n + (x - x_i)(s_{j_{i+1}}^n - s_{j_i}^n)/h, \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, \dots, N - 1, \quad (1.5.6)$$

где $T = n\tau$, $x_i = ih$. Зафиксируем число $\bar{a} \in (0, X)$ и зададим следующие интегралы

$$S^{\bar{a}}(x, T) = \int_{\bar{a}}^x s(y, T) dy, \quad S_j^{\bar{a}}(x, T) = \int_{\bar{a}}^x s_j(y, T) dy.$$

Следуя работам [28, 83], разностное решение $\bar{s}_j(x, T)$ слабо сходится с R -м порядком ($0 < R \leq 2$) на отрезке $[\bar{a}, x]$ к точному решению $s(x, T)$, если с точностью до $O(h^R)$

$$\delta S_j^{\bar{a}}(x, T) = S_j^{\bar{a}}(x, T) - S^{\bar{a}}(x, T) \approx C_2 h^{R(x, T)}, \quad (1.5.7)$$

где C_1 – ограниченный функционал, не зависящий от h .

Ограничение $R \leq 2$ связано с тем, что интеграл $S_j^{\bar{a}}(x, T)$ (с учетом линейной интерполяции (1.5.6)) вычисляется по формуле трапеций, которая сама имеет лишь второй порядок точности на гладких функциях. Использование же интегроинтерполяционных формул более высокого порядка точности на гладких функциях (например, формул парабол) может привести к существенным ошибкам на разрывах, поскольку (в отличие от формулы трапеций) они не являются точными для кусочно-линейных функций.

Формула для приближенного экспериментального определения порядков слабой сходимости R получается из (1.5.7) точно так же, как формула (1.5.5) была получена из (1.5.3). Искомое соотношение имеет вид

$$R_j \approx \log_2 \frac{|\delta^* S_j^{\bar{a}}|}{|\delta^* S_{j+1}^{\bar{a}}|}, \quad j = 1, \dots, N_h. \quad (1.5.8)$$

Осредненный порядок слабой сходимости определяется по формуле [28, 83]:

$$R = \sum_{j=1}^{N_h-2} \frac{R_j}{N_h - 2}.$$

1.6 Результаты тестовых расчетов

В данном разделе рассматривается фильтрация воды через горизонтальную трубу (радиус трубы равен 20 мм, длина трубы равна 123 мм) заполненную суффозионно неустойчивым грунтом. Параметры трубы взяты из работы [35], в которой проводилось экспериментальное исследование грунтов на суффозионную устойчивость. Параметры модели откалиброваны на экспериментальных данных (см. пункт 1.4). Численно исследуется система (1.3.5) – (1.3.7) с заданными начальными и граничными условиями.

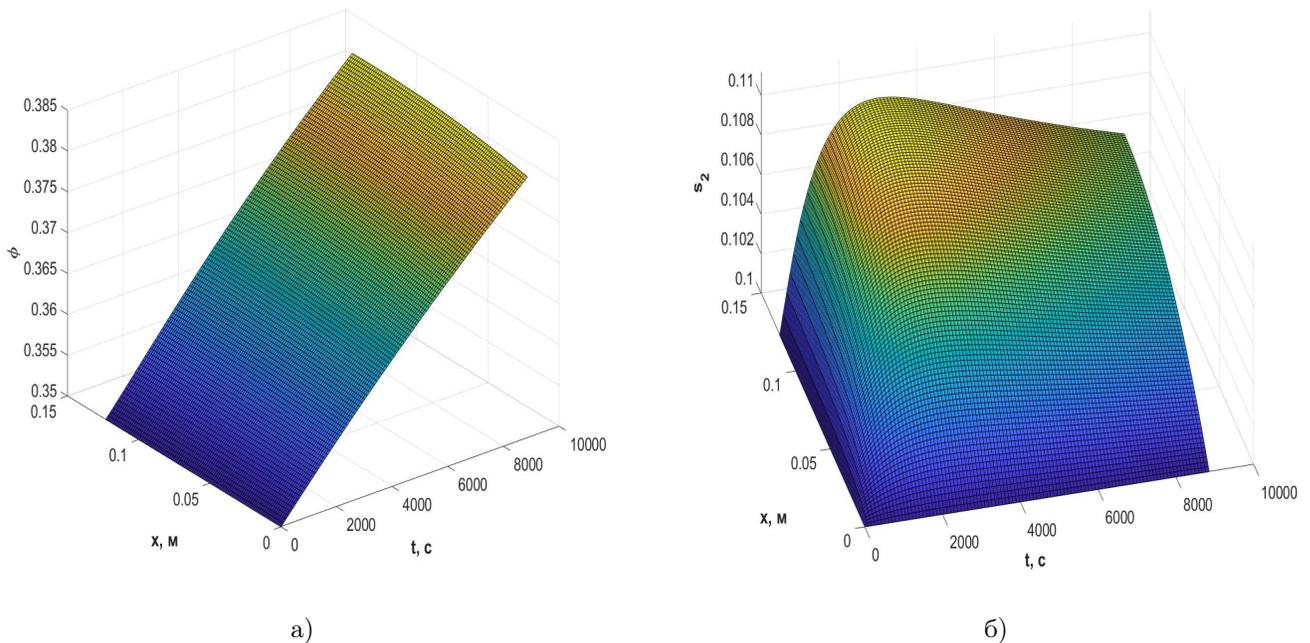


Рис. 1.4: Результаты численного моделирования изменения пористости грунта ϕ (а) и концентрации подвижных частиц грунта s_2 (б).

При численном исследовании начально краевой задачи (1.3.1)-(1.3.4) для капиллярного давления использовалась следующая эмпирической зависимость [14] $p_c(s) = \gamma(1/s - 1)$, здесь γ – размерный параметр [Па] (в численных расчетах $\gamma = 10$ кПа). Скорость движения подвижных частиц грунта определяется в ходе решения задачи, используя уравнение (1.1.14) (см. также [84]).

В численных расчетах использовался следующий набор модельных параметров: $g = 0$ м/с², $v_k = 0$, $K_0(\phi) = B\phi^3/(1 - \phi)^2$, $B = 14 \cdot 10^{-7}$ м², $k_{0i} = s_i^2$ если $0 \leq s \leq 1$,

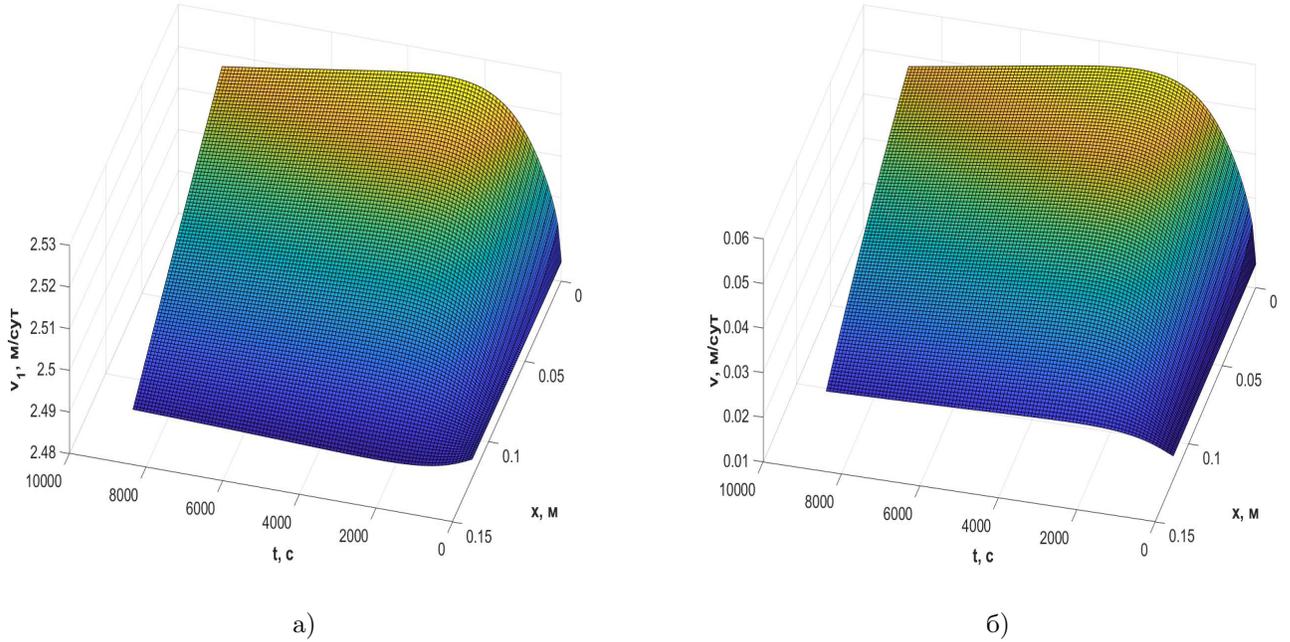


Рис. 1.5: Скорости фильтрации воды v_1 (а) и подвижных частиц грунта v_2 (б).

$k_{0i} = 0$ если $s_i \leq 0$, $k_{0i} = 1$ если $s_i \geq 1$.

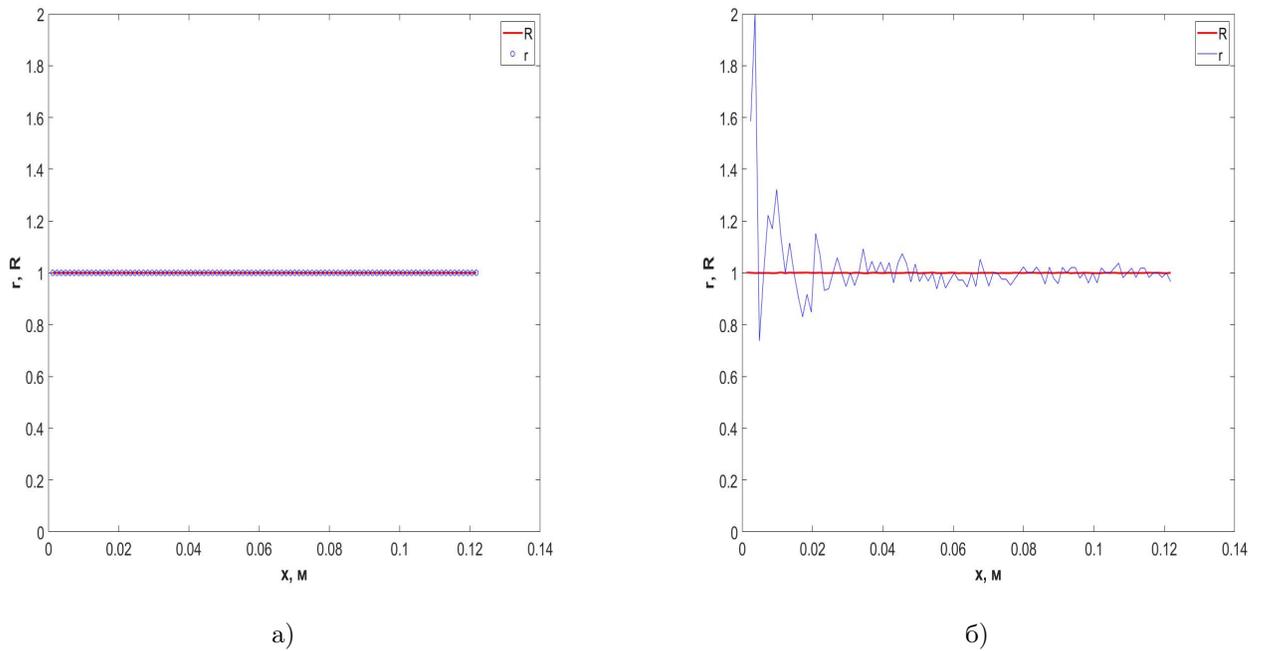


Рис. 1.6: Сильная r (синяя линия) и слабая R (красная линия) сходимость p (а) и s (б).

Начальные и граничные условия задавались в виде:

$$s(x, 0) = 0.9, \quad s(0, t) = 0.9, \quad \frac{\partial s}{\partial x}(l, t) = 0, \quad (1.6.1)$$

$$\phi(x, 0) = 0.35, \quad v = 2.5 \text{ м/сут} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x}(0, t) = -v/(K_0(\phi)k(s)),$$

$$p(l, t) = 101 \text{ кПа}, \quad x \in [0, l].$$

В численных расчетах использовались следующие параметры [35]:

$$\rho_1^0 = 1000 \text{ кг/м}^3, \quad \rho_2^0 = 1800 \text{ кг/м}^3, \quad l = 123 \text{ мм},$$

$$\mu_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг/(м} \cdot \text{с)}, \quad \mu_2 = 3.6 \cdot 10^{-3} \text{ кг/(м} \cdot \text{с)}.$$

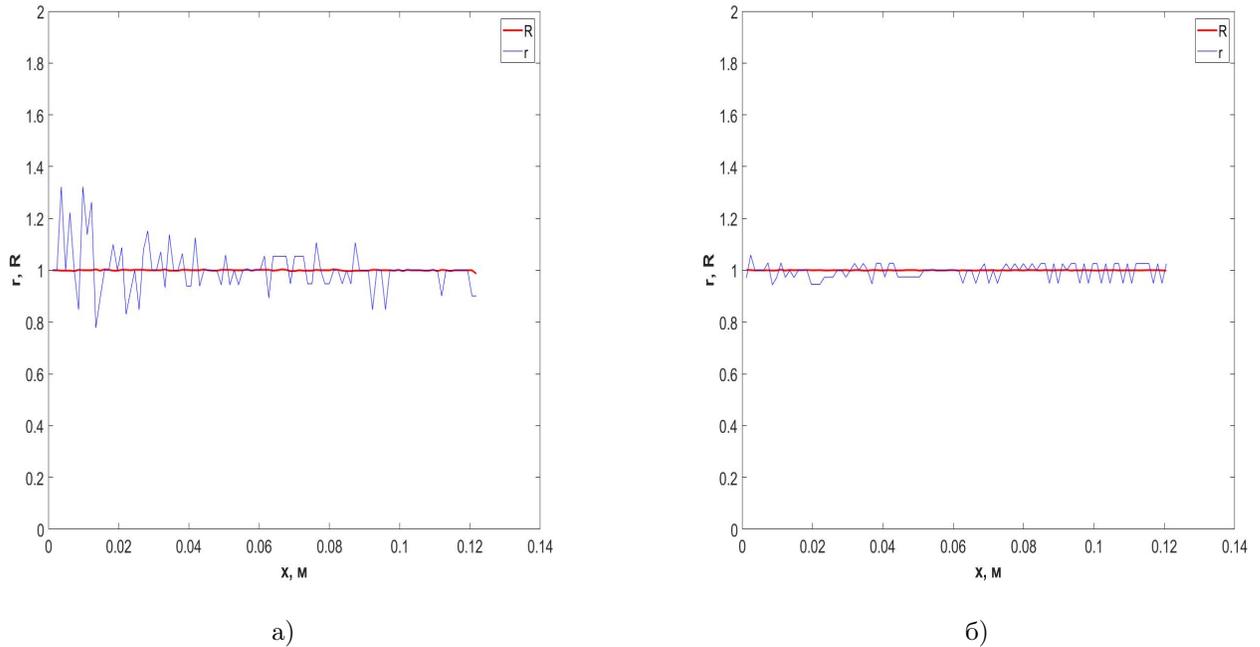


Рис. 1.7: Сильная r (синяя линия) и слабая R (красная линия) сходимость ϕ (а) и v_1 (б).

На Рисунке 1.6.1 приведены результаты численного моделирования изменения пористости грунта (см. Рисунок 1.6.1 а) и концентрации подвижных частиц грунта (см. Рисунок 1.6.1 б). Скорости фильтрации воды v_1 и подвижных частиц грунта v_2 представлены на Рисунке 1.5. Экспериментальный порядок сильной сходимости r определялся из соотношения (1.5.5), для определения слабой сходимости R используя равенство (1.5.8). Проводилось три расчета на разных сетках (1.5.2) при $h = 0.001$ и $\kappa = 0.2$. На Рисунках 1.6 и 1.7 представлены результаты расчета сильной и слабой сходимости при $t = 3000$ с. Приблизительно определяемая относительная погрешность $\varepsilon \approx 0.1\%$.

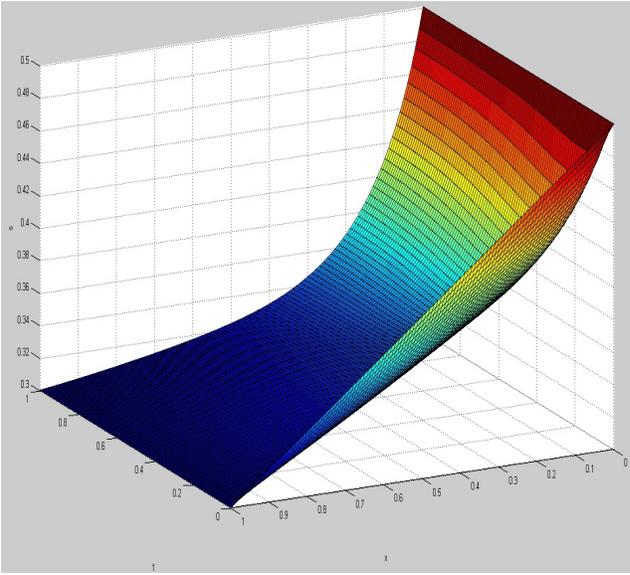
Осцилляции сильной локальной сходимости разностного решения r (см. Рисунки 1.6 и 1.7), по видимому, связаны со структурой исходной дифференциальной задачи. По мимо сильной нелинейности задачи имеет место вырождение на решении. Известно [62], что для классической модели двухфазной фильтрации Маскета–Левретта (с известной пористостью) установлено существование слабого решение в котором s и p являются измеримыми ограниченными функциями [62, с. 214]. В рассматриваемом случае пористость ϕ является искомой функцией, что создает дополнительные трудности. Слабая сходимость разностных решений $R \approx 1$ для всех искомых функций во всей расчетной области, что вполне приемлемо для практических расчетов.

1.7 Одномерная задачи внутренней суффозии грунта при заданной суммарной скорости фильтрации

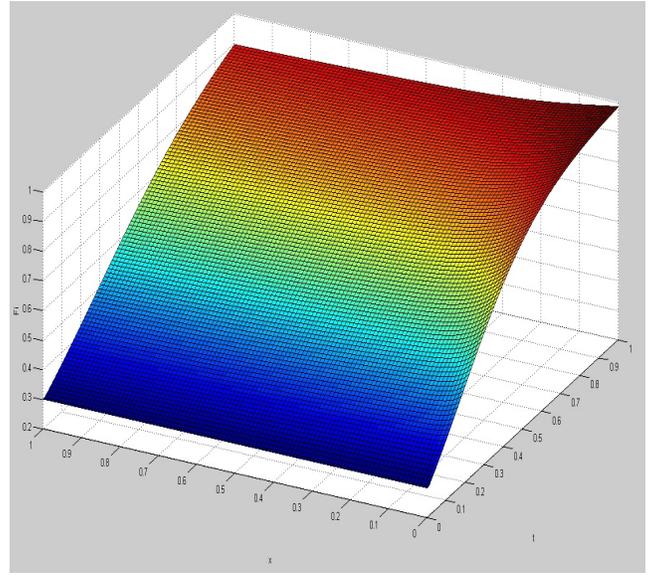
В данном разделе рассматривается система дифференциальных уравнений (1.3.1) и (1.3.3) при заданной суммарной скорости фильтрации $v(t)$. Граничные и начальные условия задаются следующим образом:

$$s(x, 0) = s_0(x), \quad s(0, t) = f_0(t), \quad s(l, t) = f_l(t), \quad \phi(x, 0) = \phi^0(x). \quad (1.7.1)$$

Расчет проводился без учета силы тяжести, при $l = 1$, $\phi(x, 0) = 0.3$, $K_0(\phi) = B\phi^3$ и суммарной скорости фильтрации $v(t) = 1$. Для интенсивности суффозионного процесса использовалась зависимость (1.2.5) при $v_k = 0$ и $s_{cr} = 0$. На левом конце рассматриваемой области ($x = 1$) задавалось постоянное значение концентрации подвижных частиц грунта $s_2(1, t) = 0.3$ ($s(1, t) = 0.7$), т. е. в рассматриваемую область втекает смесь воды и подвижных частиц грунта. На правом конце рассматриваемой области задавалось фиксированное значение концентрации подвижных частиц грунта $s_2(0, t) = 0.5$. Начальное значение водонасыщенности задавалось линейной функцией от пространственной координаты $s_0 = 0.2x + 0.5$. На Рисунке 1.8 представлено изменение значений концентрации подвижных частиц грунта и пористости. Во всей области происходит интенсивный процесс внутрен-



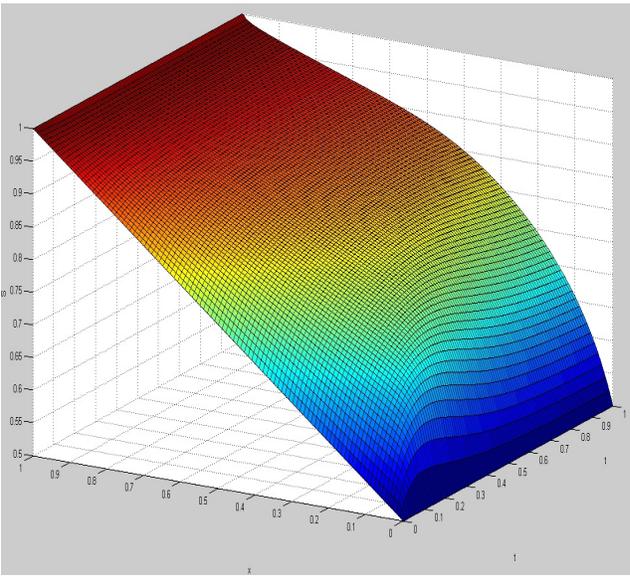
а)



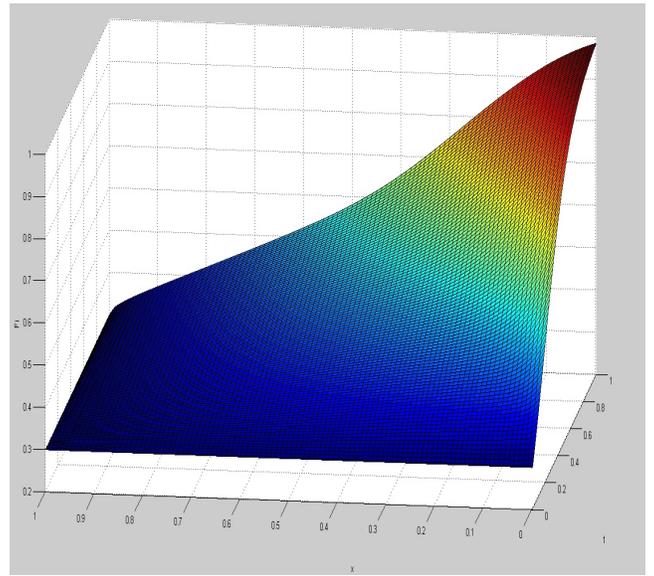
б)

Рис. 1.8: Рассчитанные значения концентрации подвижных твердых частиц грунта (а) и пористости грунта (б), при $s(x, 0) = 0.2x/l + 0.5$, $s(0, t) = 0.5$, $s(l, t) = 0.7$.

ней суффозии (см. Рисунок 1.8 б), пористость стремится к 1.



а)



б)

Рис. 1.9: Рассчитанные значения водонасыщенности s (а) и пористости грунта (б), при $s(x, 0) = (0.5x)/l + 0.5$, $s(0, t) = 0.5$, $s(l, t) = 1$.

Второй расчет проводился с другими граничными условиями. На левом конце рассматриваемой области ($x = 1$) задавалось постоянное значение водонасыщенности $s(1, t) = 1$, т. е. в рассматриваемую область втекает только вода. На

правом конце рассматриваемой области задавалось фиксированное значение концентрации подвижных частиц грунта $s_2(0, t) = 0.5$. Начальное значение водонасыщенности задавалось линейной функцией от пространственной координаты $s_0 = 0.5x + 0.5$. На левом конце рассматриваемой области суффозионный процесс отсутствует, так как концентрация подвижных частиц грунта равна нулю, а на правом конце грунт интенсивно размывается (см. Рисунок 1.9 б). Процесс внутренней суффозии сильно зависит от концентрации подвижных частиц в фильтрующемся потоке при использовании для интенсивности суффозионного процесса зависимости (1.2.5). При экспериментальном исследовании грунта на суффозионную устойчивость значение концентрации подвижных частиц грунта может быть измерено на концах рассматриваемой области [35].

Третий расчет проводился с другими граничными условиями и использовалась зависимость интенсивности суффозионного процесса (1.2.6), независящая от концентрации подвижных частиц грунта.

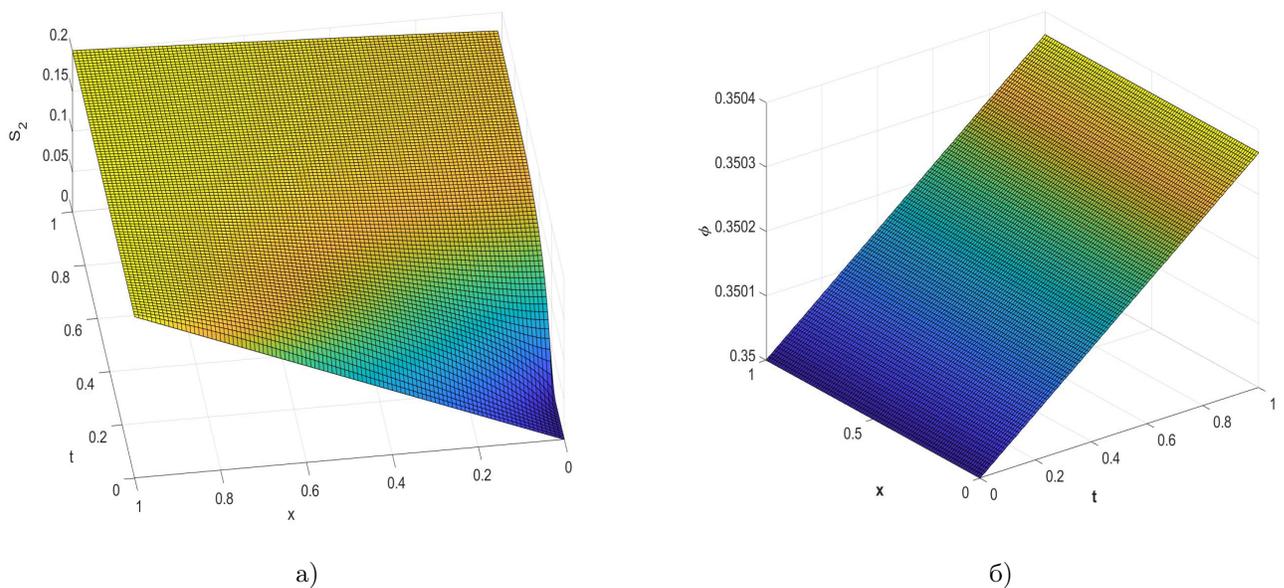


Рис. 1.10: Рассчитанные значения концентрации подвижных твердых частиц грунта (а) и пористости грунта (б), при $s(x, 0) = 1 - 0.2x$, $s(0, t) = 0.8$, $s(1, t) = 1$.

На левом конце рассматриваемой области ($x = 1$) задавалось постоянное значение водонасыщенности $s(1, t) = 1$, т. е. в рассматриваемую область втекает только вода. На правом конце рассматриваемой области задавалось фиксированное зна-

чение концентрации подвижных частиц грунта $s_2(0, t) = 0.2$. Начальное значение водонасыщенности задавалось линейной функцией от пространственной координаты $s_0 = 1 - 0.2x$. Пористость изменяется во всей рассматриваемой области (см. Рисунок 1.10), концентрация стремится к заданному значению на границе ($x = 0$) даже при незначительном изменении пористости, так как пористость увеличивается и в фильтрующемся потоке добавляются подвижные частицы грунта.

Рассчитанные значение пористости и концентрации сильно зависят от выбора интенсивности суффозионного процесса. На данный момент не существует общепринятой зависимости, возможно, что для разных типов грунтов не применима одна зависимость. Необходимо проводить верификацию интенсивности суффозионного процесса и калибровать параметры модели на экспериментальных данных для исследуемых грунтов [30].

Глава 2

Разрешимость первой краевой задачи для одномерных уравнений внутренней эрозии

В данной главе доказана теорема существования и единственности классического решения первой краевой задачи для одномерных уравнений внутренней эрозии (1.3.1), (1.3.3) и (1.7.1) при заданной суммарной скорости фильтрации.

2.1 Вспомогательные сведения

Функциональные пространства

Пусть Q – ограниченная область с кусочно-гладкой границей $S = \partial Q$ в евклидовом пространстве R^n , $n \geq 1$. Как правило, используем обозначение $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$, где x_i , $i = 1, \dots, n$ – декартовы координаты в R^n . Кроме того, для каждого числа $t \in (0, T)$, $T = \text{const} > 0$ полагаем $Q_t = Q \times (0, t)$. Также используются обозначения $\bar{Q}_t = \bar{Q} \times [0, t]$, где \bar{Q} – замыкание множества Q , $\bar{Q} = Q \cup S$.

Приведем ряд функциональных пространств на \bar{Q} и Q которые используются в дальнейшем [62].

Пространство Лебега $L_q(Q)$, $1 \leq q \leq \infty$ – множество вещественных измеримых функций, суммируемых с показателем q . Норма в $L_q(Q)$ определяется следующей

формулой:

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_q(Q)} &= \left(\int_Q |u(x)|^q dQ \right)^{\frac{1}{q}}, \quad 1 \leq q < \infty, \\ \|u\|_{L_\infty(Q)} &= \overline{\lim}_{q \rightarrow \infty} \|u\|_{L_q(Q)}. \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

Пространство $L_{p,q}(Q)$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ – анизотропное пространство Лебега вещественных измеримых функций с нормой

$$\|u\|_{L_{p,q}(Q)} = \left(\int_0^T \left(\int_Q |u(x,t)|^p dQ \right)^{\frac{q}{p}} dt \right)^{\frac{1}{q}}, \quad 1 \leq p, q < \infty, \quad (2.1.2)$$

Иногда, для краткости записи, будем использовать обозначения

$$\|u\|_{L_q(Q)} = \|u\|_{q,Q}, \quad \|u\|_{L_{p,q}(Q)} = \|u\|_{p,q,Q}, \quad \left(\int_Q |u(x,t)|^2 dQ \right)^{\frac{1}{2}} = \|u(t)\|.$$

Пространство $C(\overline{Q})$ – множество непрерывных функций, определенных на множестве \overline{Q} , с нормой

$$\|u\|_{C(\overline{Q})} = \max_{x \in \overline{Q}} |u(x)|. \quad (2.1.3)$$

Пространство $C(Q)$ – множество непрерывных функций, определенных на множестве Q , с конечной нормой

$$\|u\|_{C(Q)} = \sup_{x \in Q} |u(x)|. \quad (2.1.4)$$

Аналогично определяются функциональные пространства $C(Q)$, $C(\overline{Q})$.

Для областей с кусочно-гладкой границей без двойных точек пространства Гельдера могут быть определены следующим образом.

Пространство $C^\alpha(\overline{Q})$, $\alpha \in (0, 1]$ – множество вещественных функций, определенных на \overline{Q} и удовлетворяющих условию Гельдера с показателем α . Норма в $C^\alpha(\overline{Q})$ определяется формулой

$$\|u\|_{C^\alpha(\overline{Q})} = \max_{x \in \overline{Q}} |u(x)| + \sup_{x_1, x_2 \in \overline{Q}} \frac{|u(x_1) - u(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\alpha}. \quad (2.1.5)$$

Пространство $C^k(\overline{Q})$, k – натуральное число – множество вещественных непрерывных функций, определенных на \overline{Q} , имеющих в \overline{Q} непрерывные производные

до порядка k включительно. Норма в $C^k(\bar{Q})$ задается формулой

$$\|u\|_{C^k(\bar{Q})} = \sum_{|m|=0}^k \sum_{(m)} \|D_x^m\|_{C(\bar{Q})}. \quad (2.1.6)$$

Аналогично определяется функциональное пространство $C^k(\bar{Q})$.

Введем обозначение (константа Гельдера)

$$H^\alpha(u) = \sup_{x_1, x_2 \in \bar{Q}} \frac{|u(x_1) - u(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\alpha}.$$

Пространство $C^{k+\alpha}(\bar{Q})$, k – натуральное число, $\alpha \in (0, 1]$ – множество вещественных непрерывных функций, определенных на \bar{Q} , имеющих в \bar{Q} производные до порядка k включительно, непрерывные по Гельдеру с показателем α . Норма в $C^{k+\alpha}(\bar{Q})$ определяется формулой

$$\|u\|_{C^{k+\alpha}(\bar{Q})} = \sum_{|m|=0}^k \sum_{(m)} \|D_x^m\|_{C(\bar{Q})} + \sum_{(k)} H^\alpha(D_x^k u). \quad (2.1.7)$$

Пространство $C^{k+\alpha, m+\beta}(\bar{Q})$, $0 < \alpha \leq 1$, $0 < \beta \leq 1$, k, m – целые неотрицательные числа – множество вещественных непрерывных функций в \bar{Q} , имеющих в \bar{Q} по переменным x производные до порядка k , а по переменной t – до порядка m , причем эти производные непрерывны по Гельдеру по x с показателем α , а по t – с показателем β . Норма в этом пространстве определяется по формуле

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^{k+\alpha, m+\beta}(\bar{Q})} &= \sum_{|i|=0}^k \sum_{(i)} \|D_x^i u\|_{C(\bar{Q})} + \sum_{j=1}^m \|D_t^j u\|_{C(\bar{Q})} + \\ &+ H_x^\alpha(D_x^k u) + H_t^\beta(D_t^m u) + H_x^\alpha(D_t^m u) + H_t^\beta(D_x^k u). \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Здесь $D_x^i u$ – производные порядка $|i| = i_1 + \dots + i_n$ по переменной x , D_t^j – производная по t порядка j , символами H_x^α и H_t^β обозначаются константы гельдеровской непрерывности по x и t , т.е.

$$\begin{aligned} H_x^\alpha(u(x, t)) &= \sup_{x_1, x_2 \in \bar{Q}, t \in [0, T]} \left(\frac{|u(x_1, t) - u(x_2, t)|}{|x_1 - x_2|^\alpha} \right), \\ H_t^\beta(u(x, t)) &= \sup_{x \in \bar{Q}, t_1, t_2 \in [0, T]} \left(\frac{|u(x, t_1) - u(x, t_2)|}{|t_1 - t_2|^\beta} \right), \end{aligned}$$

а величина $H_x^\alpha(D_x^k u)$ – сумма констант Гельдера по всевозможным производным порядка $|k|$ по переменной x , величина $H_t^\beta(D_x^k u)$ – сумма констант Гельдера по переменной t .

Отметим, что все перечисленные пространства функций являются полными нормированными, т.е. банаховыми.

Специальные неравенства и теорема вложения

Неравенство Юнга

Для любых чисел $a \geq 0$, $b \geq 0$, $\varepsilon > 0$, $p > 1$ справедливо неравенство

$$ab \leq \frac{\varepsilon^p a^p}{p} + \frac{1}{q} \left(\frac{b}{\varepsilon}\right)^q, \quad q = \frac{p}{p-1}.$$

Неравенство Гельдера [62, 86]. Для любых положительных чисел p и q с условием $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и для любых функций $u \in L_p(Q)$, $v \in L_q(Q)$ справедливо неравенство

$$\|uv\|_{L_1(Q)} \leq \|u\|_{L_p(Q)} \cdot \|v\|_{L_q(Q)}.$$

Частным случаем является неравенство Коши.

Неравенство Гронуолла Далее приведены аналоги известного неравенства Гронуолла

Лемма 1. [86, с. 112]. Пусть неотрицательная абсолютно непрерывная на $[0, T]$ функция $y(t)$ удовлетворяет для почти всех $t \in (0, T)$ неравенству

$$\frac{dy(t)}{dt} \leq a(t)y(t) + b(t)$$

с неотрицательными и суммируемыми на $(0, T)$ функциями $a(t)$ и $b(t)$. Тогда для всех $t \in (0, T)$ справедливо неравенство

$$y(t) \leq \left(y(0) + \int_0^t b(s) \exp\left(-\int_0^s a(\tau) d\tau\right) ds \right) \exp\left(\int_0^t a(s) ds\right).$$

Лемма 2. Пусть неотрицательная функция $y(t) \in L_\infty(0, T)$ удовлетворяет для почти всех значений $t \in (0, T)$ неравенству

$$y(t) \leq c + \int_0^t (a(s)y(s) + b(s))ds,$$

где $c = \text{const} \geq 0$, $a(t) \in L_1(0, T)$, $b(t) \in L_1(0, T)$, $b(t) \geq 0$.

Тогда для почти всех значений $t \in (0, T)$ справедливо неравенство

$$y(t) \leq \left(c + \int_0^t b(s) \exp\left(-\int_0^s a(\tau)d\tau\right) ds \right) \exp\left(\int_0^t a(s)ds\right).$$

Теорема 1. (Шаудера) [62, 86]. Если Λ - вполне непрерывный оператор и отображает ограниченное замкнутое выпуклое множество в K в себя, то существует по крайней мере одна неподвижная точка $u \in K$.

Напомним, что вполне непрерывным называется непрерывный оператор, отображающий любое ограниченное замкнутое множество в компактное.

Срезки

Пусть $u(x) \in L_p(Q)$, $p \geq 1$ - произвольная функция. Для произвольного k , $|k| < \infty$, положим

$$u^{(k)}(x) = \max(u(x) - k, 0).$$

Функция $u^{(k)}(x)$ называется срезкой функции $u(x)$. По определению $u^{(k)} \in L_p(Q)$ и для любой пары $(u(x), v(x)) \in L_p(Q)$ для почти всех $x \in Q$

$$|u^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)| \leq |u(x) - v(x)|.$$

2.2 Постановка задачи

В данной главе изучается следующая система уравнений составного типа:

$$\frac{\partial s \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (K_0(\phi) a(s) \nabla s - b(s) v(t) + F(s, \phi)), \quad (2.2.1)$$

$$\frac{\partial(1 - \phi)}{\partial t} = -I(s, \phi), \quad (2.2.2)$$

решаемая в области $(x, t) \in Q_T = Q \times (0, T)$, $Q = (0, 1)$, при краевых и начальных условиях

$$s(0, t) = s_0(t), \quad s(1, t) = s_1(t), \quad (2.2.3)$$

$$s(x, 0) = s^0(x), \quad \phi(x, 0) = \phi^0(x).$$

Данная начально-краевая задача описывает одномерное движение в неподвижной пористой среде двухфазной смеси, состоящей из твердых частиц и жидкости [8]. Здесь ϕ – пористость, s – насыщенность воды, I – интенсивность перехода массы из твердого скелета; кроме того $K_0(\phi)$, $a(s)$, $b(s)$, $F(s, \phi)$ – заданные функции. Задача записана в эйлеровых координатах x, t . Искомыми являются величины s и ϕ . Математическое обоснование постановок задач отсутствует, за исключением рассмотрения частных решений [52, 60, 62]. Вывод уравнений (2.2.1) и (2.2.2) сделан в разделе 1.1. Система уравнений близка по структуре уравнениям двухфазной фильтрации несмешивающихся жидкостей в случае известной пористости [62]. Особенностью данной задачи является необходимость обоснования физического принципа максимума для пористости ϕ и насыщенности s вида $0 \leq \phi \leq 1$, $0 \leq s \leq 1$. Кроме того, коэффициент $a(s)$ в общем случае обладает свойствами $a(0) = a(1) = 0$, $a(s) > 0$ при $s \in (0, 1)$, то есть уравнение (2.2.1) является вырождающимся на решении, а переменная неизвестная пористость существенно усложняет структуру системы (2.2.1), (2.2.2).

Поэтому на первом этапе исследования задачи (2.2.1) – (2.2.3) рассматривается случай невырождающегося уравнения (2.2.1) ($a(s) > 0$ при $s \in [0, 1]$, $0 < \phi \leq 1$). Целью работы является доказательство классической разрешимости задачи (2.2.1) – (2.2.3). Ключевым моментом является доказательство гельдеровской непрерывности насыщенности. После этого проверяются условия теоремы Шаудера о неподвижной точке.

Для интенсивности фазовых переходов принимается следующая модельная за-

зависимость [8, 9]: $I = \lambda \delta(s) R(\phi) \max\{|v(t)| - v_k, 0\}$,

$$\delta(s) = \begin{cases} 0, & s \geq 1; \\ 1 - s, & 0 < s < 1; \\ 1, & s \leq 0. \end{cases}$$

$$R(\phi) = \begin{cases} 0, & \phi \geq 1; \\ \phi(1 - \phi), & 0 < \phi < 1; \\ 0, & \phi \leq 0. \end{cases}$$

где $v(t)$ – суммарная скорость фильтрации (заданная функция), v_k – предельное значение скорости фильтрации при превышении которой "запускается" процесс суффозии.

Определение 1. Классическим решением задачи (2.2.1) – (2.2.3) в цилиндре Q_T будем называть пару функций $s(x, t), \phi(x, t) \in C^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(Q_T)$, удовлетворяющую уравнениям (2.2.1), (2.2.2) и условиям (2.2.3) как непрерывные функции. Причем $0 \leq s \leq 1, 0 < \phi < 1$.

Теорема 2. Пусть данные задачи (2.2.1) – (2.2.3) подчиняются условиям:

1. функции $K_0(\phi), a(s), b(s), F(s, \phi)$ и их производные до второго порядка непрерывны для $s \in [0, 1], \phi \in [0, 1]$ и удовлетворяют условиям

$$0 < m \leq K_0(\phi), a(s) \leq M < \infty,$$

$$F(s, \phi) = 0 \text{ при } s < 0, s > 1.$$

2. функции $v(t), s_0(t), s_1(t), s^0(x), \phi^0(x)$ удовлетворяют следующим условиям гладкости

$$v(t), s_0(t), s_1(t) \in C^{2+\alpha}[0, T]; s^0(x), \phi^0(x) \in C^{2+\alpha}(\bar{Q})$$

и условиям согласования

$$s_0(0) = s^0(0), s_1(0) = s^0(1),$$

а также удовлетворяют неравенствам

$$|v(t)| > v_k, 0 \leq s^0(x) \leq 1, 0 < m_0 \leq \phi^0 \leq M_0 < 1,$$

$$0 \leq s_0(t) \leq 1, 0 \leq s_1(t) \leq 1,$$

где t_0, t, M, v_k, M_0 – известные положительные постоянные.

Тогда для любого конечного интервала $(0, T)$ задача (2.2.1) – (2.2.3) имеет единственное классическое решение:

$$\phi(x, t), s(x, t) \in C^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(Q_T).$$

Более того

$$0 \leq s(x, t) \leq 1, 0 < \phi(x, t) < 1, (x, t) \in Q_T.$$

2.3 Разрешимость задачи

Для классического решения справедливы следующие утверждения.

Лемма 3. Пусть пара (s, ϕ) – решение задачи (2.2.1) – (2.2.3) и выполнены условия теоремы, тогда $\phi_0 \leq \phi \leq 1$.

Доказательство. Оценка слева $\phi_0 \leq \phi$ следует из свойств правой части уравнения (2.2.2) ($\phi_t > 0$), ϕ – монотонно возрастающая функция.

Умножив уравнение (2.2.2) на срезку $\bar{\phi} = \max\{\phi - 1, 0\}$ и проинтегрировав по области Q_T , получим

$$(\bar{\phi}_t, \bar{\phi})_{Q_T} = (\delta(s)R(\phi)\max\{|\vec{v}(t)| - v_k, 0\}, \bar{\phi})_{Q_T}. \quad (2.3.1)$$

Отметим, что в силу определения срезки $\bar{\phi}$ интегралы в (2.3.1) берутся на самом деле по области $Q_T^* = \{(x, t) \in Q_T, \phi > 1\}$, в которой $\bar{\phi} = \phi - 1$, $\phi_t = \bar{\phi}_t$ и $R(\phi) = 0$. Из равенства (2.3.1) следует, что $\bar{\phi} \equiv 0$. Оценка справа доказана.

Замечание 1. Если $|\vec{v}(t)| < M$ ограниченная функция и выполнены условия леммы 3, то для пористости справедливо соотношение

$$\phi = \frac{\phi^0}{\phi^0 + (1 - \phi^0)e^{-\int_0^t \delta(s)\max\{|\vec{v}(t)| - v_k, 0\}d\tau}},$$

заметим, что 1 является асимптотой функции ϕ (т.е. $\phi < 1$).

Заменяем $a(s)$ в уравнении (2.2.1) на $\bar{a}(s) = a(s) + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Лемма 4. Пусть пара (s, ϕ) – решение задачи (2.2.1) – (2.2.3), выполнены условия теоремы и $\phi_0 \leq \phi < 1$, тогда $0 \leq s \leq 1$.

Доказательство. Умножив уравнение (2.2.1) на срезку $\bar{s} = \max\{s - 1, 0\}$ и проинтегрировав по области Q_T получим

$$(s\phi_t, \bar{s})_{Q_T} + (\phi\bar{s}_t, \bar{s})_{Q_T} = \left(\frac{\partial}{\partial x}(K_0 a \bar{s}_x + F), \bar{s}\right)_{Q_T} - (v(t)b_s \bar{s}_x, \bar{s})_{Q_T}. \quad (2.3.2)$$

Заметим, что в силу определения срезки \bar{s} интегралы в (2.3.2) берутся на самом деле по области $Q_T^* = \{(x, t) \in Q_T, s > 1\}$, в которой $\bar{s} = s - 1$, $s_t = \bar{s}_t$, $s_x = \bar{s}_x$, $\phi_t > 0$ и $F = 0$. Из равенства (2.3.2) следует оценка

$$\|\sqrt{\phi\bar{s}}\|_{2,Q}^2 \leq C \int_0^t \|\sqrt{\phi\bar{s}}\|_{2,Q}^2 d\tau,$$

где C – положительная постоянная. Следовательно, $\bar{s} \equiv 0$, т.е. $s \leq 1$.

Аналогично проводится доказательство $s \geq 0$. Рассмотрим вместо \bar{s} функцию $\underline{s} = \max\{-s, 0\}$ получим

$$\frac{1}{2}\|\sqrt{\phi\underline{s}}\|_{2,Q}^2 + \frac{1}{2}(\underline{s}\phi_t, \underline{s})_{Q_T} + (K_0\varepsilon\underline{s}_x, \underline{s}_x)_{Q_T} = -(v(t)b_s\underline{s}_x, \underline{s})_{Q_T}.$$

Отсюда, проводя аналогичные доказательствам $s \leq 1$ оценки слагаемых, получаем, что $\underline{s} \equiv 0$ и, следовательно, $s \geq 0$.

Лемма 5. Пусть дважды непрерывно дифференцируемая на $[0, T]$ неотрицательная функция $y(t)$ равна нулю при $t = 0$ и удовлетворяет неравенству

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} \leq C\left(\frac{dy(t)}{dt} + y(t) + B(t)\right), \quad (2.3.3)$$

с постоянной $C > 0$ и неотрицательной суммируемой на $[0, T]$ функцией $B(t)$.

Тогда

$$y(t) \leq \Phi(t) \equiv \frac{1}{C+2}(e^{(C+2)t} - 1)\frac{dy}{dt}(0) + C e^{(C+1)t} \int_0^t e^{-(C+2)t_1} \left(\int_0^{t_1} e^\tau B(\tau) d\tau \right) dt_1, \quad (2.3.4)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} \leq (C + 1)\Phi(t) + e^{-t} \left(\frac{dy}{dt}(0) + C \int_0^t e^\tau B(\tau) d\tau \right). \quad (2.3.5)$$

Доказательство. Умножим обе части (2.3.3) на e^t и результат запишем в виде неравенства

$$\frac{d}{dt} \left(e^t \left(\frac{dy}{dt} - (C + 1)y \right) \right) + e^t y \leq C e^t B(t).$$

Отбрасывая неотрицательное второе слагаемое левой части и интегрируя полученное неравенство по t от 0 до t_1 , выводим

$$\frac{dy(t_1)}{dt_1} - (C + 1)y(t_1) \leq e^{-t_1} \left(\frac{dy}{dt_1}(0) + C \int_0^{t_1} e^\tau B(\tau) d\tau \right).$$

Откуда имеем

$$\frac{d}{dt_1} \left(e^{-(C+1)t_1} y(t_1) \right) \leq e^{-(C+2)t_1} \left(\frac{dy}{dt_1}(0) + C \int_0^{t_1} e^\tau B(\tau) d\tau \right)$$

и, следовательно,

$$y(t) \leq \frac{1}{C + 2} (e^{(C+1)t} - e^{-t}) \frac{dy}{dt}(0) + C e^{(C+1)t} \int_0^t e^{-(C+2)t_1} \left(\int_0^{t_1} e^\tau B(\tau) d\tau \right) dt_1.$$

Из этого неравенства следуют (2.3.4) и (2.3.5). Лемма 5 доказана.

Лемма 6. Пусть две пары (s_i, ϕ_i) , $i = 1, 2$, являются классическими решениями задачи (2.2.1) – (2.2.2) с граничными $s_0^{(i)}, s_1^{(i)}$ и начальными s_i^0, ϕ_i^0 условиями соответственно. Пусть

$$\|s_0^1 - s_0^2\| + \|s_1^1 - s_1^2\| + \|s_1^0 - s_2^0\| + \|\phi_1^0 - \phi_2^0\| = \delta,$$

тогда верны оценки

$$\int_0^1 (s^2 + \phi_t^2 + \phi^2) dx \leq C\delta, \quad (2.3.6)$$

$$\int_0^t \int_0^1 (\phi_x^2 + \phi_{xt}^2 + s_x^2) dx d\tau \leq C\delta, \quad (2.3.7)$$

где постоянная C зависит только от m_0, m, M, v_k .

Доказательство. Пара функций $s = s^{(1)} - s^{(2)}, \phi = \phi^{(1)} - \phi^{(2)}$ есть решение системы

$$\frac{\partial(a_0s + a_1\phi)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(b_0s_x - b_1sb_2\phi), \quad (2.3.8)$$

$$\frac{\partial(h_0\phi)}{\partial t} = hs. \quad (2.3.9)$$

Здесь

$$a_0 = \phi^{(1)} > 0, \quad a_1 = s^{(2)} > 0, \quad b_0 = K_0(\phi^{(2)})a(s^{(2)}) > 0,$$

$$b_1 = \frac{v(t)(b(s^{(1)}) - b(s^{(2)})) + F(s^{(1)}, \phi^{(1)}) - F(s^{(2)}, \phi^{(2)})}{s^{(1)} - s^{(2)}},$$

$$b_2 = \frac{(K_0(\phi^{(1)})a(s^{(1)}) - K_0(\phi^{(2)})a(s^{(2)}))s_x^{(1)}}{\phi^{(1)} - \phi^{(2)}},$$

$$h_0 = \frac{G(\phi^{(1)}) - G(\phi^{(2)})}{\phi^{(1)} - \phi^{(2)}}, \quad G(\phi) = \int_0^\phi \frac{1}{R(\zeta)} d\zeta,$$

$$h = \frac{(\delta(s^{(1)}) - \delta(s^{(2)}))\max\{|\vec{v}(t)| - v_k, 0\}}{s^{(1)} - s^{(2)}},$$

$$s|_{x=0} = s_0^{(1)} - s_0^{(2)} = s_0(t),$$

$$s|_{x=1} = s_1^{(1)} - s_1^{(2)} = s_1(t),$$

$$s|_{t=0} = s_1^0 - s_2^0 = s^0(x),$$

$$\phi|_{t=0} = \phi_1^0 - \phi_2^0 = \phi^0(x).$$

После замены $u = h_0\phi$, $w = s - \psi(x, t)$, $\psi(x, t) = (1 - x)s_0(t) + xs_1(t)$ уравнения (2.3.8) и (2.3.9) примут вид

$$a_0w_t + \bar{a}_1w + a_0\psi_t + \tilde{a}_{1t}u = (b_0w_x + b_1w + \tilde{b}_2u + b_0\psi_x + b_1\psi)_x, \quad (2.3.10)$$

$$u_t = hw + h\psi(x, t), \quad (2.3.11)$$

где $\bar{a}_1 = a_{0t} + a_1 h/h_0$, $\tilde{a}_1 = a_1/h_0$, $\tilde{b}_2 = b_1/h_0$, Заметим, что $w|_{x=0} = w|_{x=1} = 0$. Умножив уравнение (2.3.10) на w и представив первое слагаемое в виде

$$a_0 w w_t = \frac{1}{2} (a_0 w^2)_t - \frac{1}{2} \frac{\partial a_0}{\partial t} w^2,$$

проинтегрируем полученное равенство по x от 0 до 1. Проводя интегрирование по частям в преобразованном уравнении (2.3.10), получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 a_0 w^2 dx + \int_0^1 b_0 w_x^2 dx = \\ & = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \frac{\partial a_0}{\partial t} w^2 - \bar{a}_1 w^2 - a_0 \psi_t w - \right. \\ & \left. - \bar{a}_1 \psi w - \frac{\partial a_1}{\partial t} u w - b_1 w w_x - \tilde{b}_2 u w_x + b_0 \psi_x w_x + b_1 \psi w_x \right) dx. \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

Слагаемые правой части оцениваются следующим образом:

$$\begin{aligned} a_0 \psi_t w &\leq \frac{1}{2} a_0 w^2 + \frac{1}{2} a_0 \psi_t^2, \\ \bar{a}_1 \psi w &\leq \frac{1}{2} a_0 w^2 + \frac{\bar{a}_1^2}{2a_0} \psi^2, \quad \frac{\partial a_1}{\partial t} u w \leq \frac{1}{2} a_0 w^2 + \frac{\bar{a}_{1t}^2}{2a_0} u^2, \\ b_1 w w_x &\leq \frac{\varepsilon}{2} b_0 w_x^2 + \frac{b_1^2}{2b_0 \varepsilon} w^2, \quad \tilde{b}_2 u w_x \leq \frac{\varepsilon}{2} b_0 w_x^2 + \frac{\tilde{b}_2^2}{2b_0 \varepsilon} u^2, \\ b_0 \psi_x w_x &\leq \frac{\varepsilon}{2} b_0 w_x^2 + \frac{b_0^2}{2\varepsilon} \psi_x^2, \quad b_1 \psi w_x \leq \frac{\varepsilon}{2} b_0 w_x^2 + \frac{b_1^2}{2\varepsilon b_0} \psi^2. \end{aligned}$$

Проинтегрировав по t от 0 до текущего значения t уравнение (2.3.11), выводим

$$u \equiv u(x, 0) + \int_0^t h w d\tau + \int_0^t h \psi d\tau.$$

Используя последнее равенство, получим оценку

$$\int_0^1 u^2 dx \leq \int_0^1 \left(u^2(x, 0) + \int_0^t \frac{h^2}{a_0} a_0 w^2 d\tau + \int_0^t h^2 \psi^2 d\tau \right) dx. \quad (2.3.13)$$

Из (2.3.12) следует оценка

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 a_0 w^2 dx + \int_0^1 b_0 w_x^2 dx \leq C \left(\int_0^1 a_0 w^2 dx + \int_0^t \int_0^1 a_0 w^2 dx dt + B(t) \right), \quad (2.3.14)$$

$$B(t) = \int_0^t \int_0^1 (\psi_t^2 + \psi^2 + \psi_x^2 + |u(x, 0)|^2) dx dt,$$

где постоянная C зависит только от m_0, m, M, v_k . Если

$$y = \int_0^t \int_0^1 a_0 w^2 dx \geq 0,$$

то неравенство (2.3.14) примет вид (2.3.3) и из леммы 5 следует выполнение оценок (2.3.6). Оценки (2.3.7) следует из (2.3.13). Лемма 6 доказана.

Заменой $V = \int_0^s a(\tau) d\tau$ ($s_t = V_t/a(s(V))$, $s_x = V_x/a(s(V))$) уравнение (2.2.1) приведем к виду

$$V_t - \frac{K_0(\phi)}{\phi} a(s(V)) V_{xx} = f. \quad (2.3.15)$$

$$f = -a(s(V)) s(V) \frac{\phi_t}{\phi} + a \frac{1}{\phi} \frac{\partial K_0}{\partial \phi} \phi_x V_x + \frac{1}{\phi} \frac{\partial F}{\partial V} V_x + a \frac{1}{\phi} \frac{\partial F}{\partial \phi} \phi_x - a \frac{v(t)}{\phi} \frac{\partial b}{\partial V} V_x.$$

Лемма 7. Если ϕ и s классическое решение, то справедливо неравенство

$$\int_0^1 V_x^2 dx + \int_0^t \int_0^1 V_{xx}^2 dx dt \leq C_1(m_0, m, M, v_k). \quad (2.3.16)$$

Доказательство. Сначала докажем выполнение оценки

$$\int_0^t \int_0^1 (\phi_x^2 + s_x^2) dx dt \leq C(m_0, m, M, v_k). \quad (2.3.17)$$

Заменой $w = s - \psi(x, t)$ уравнение (2.2.1) приведем к виду

$$\phi_t w + \phi_t \psi + w_t \phi + \psi_t \phi = (K_0(\phi) a(s) w_x + K_0(\phi) a(s) \psi_x - b(s) v(t) + F(s, \phi))_x, \quad (2.3.18)$$

где $\psi(x, t) = (1 - x)s_0(t) + xs_1(t)$. Заметим, что функция w на границе равна нулю ($w|_{x=0} = w|_{x=1} = 0$). Умножив (2.3.18) на w и проинтегрировав полученное равенство от 0 до 1, с учетом формулы

$$\frac{1}{2}(w^2)_t\phi = \frac{1}{2}(w^2\phi)_t - \frac{1}{2}w^2\phi_t,$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1\varphi w^2 dx + \int_0^1 K_0(\phi)a(s)w_x^2 dx = - \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\phi_t w + \phi_t \psi w + \right. \\ \left. + \psi_t \phi w + K_0(\phi)a(s)\psi_x w_x - bv w_x + F(\phi, s)w_x\right) dx. \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

Оценим слагаемые правой части равенства (2.3.19):

$$\begin{aligned} \phi_t w &\leq \frac{\phi_t^2}{2} + \frac{w^2}{2}, \\ \phi_t \psi w &\leq \frac{\phi w^2}{2} + \frac{\phi_t \psi^2}{2\phi}, \\ \phi_t \phi w &\leq \frac{\phi w^2}{2} + \frac{\phi_t^2 \phi}{2}, \\ K_0 a \psi_x w_x &\leq \frac{\varepsilon}{2} K_0 a w_x^2 + \frac{1}{2\varepsilon} K_0 a \psi_x^2, \\ b(s)v(t)w_x &\leq \frac{\varepsilon}{2} w_x^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2 v^2, \\ F(s, \phi)w_x &\leq \frac{\varepsilon}{2} w_x^2 + \frac{1}{2\varepsilon} F^2. \end{aligned}$$

Используя полученные оценки, из равенства (2.3.19) выводим

$$\frac{d}{dt}\int_0^1\phi w^2 dx \leq C\int_0^1\phi w^2 dx. \quad (2.3.20)$$

Из (2.3.20), используя лемму Гронуолла получим оценки

$$\int_0^1 w^2 dx \leq C, \quad \int_0^t \int_0^1 w_x^2 dx d\tau \leq C,$$

а следовательно, и

$$\int_0^1 s^2 dx \leq C, \quad \int_0^t \int_0^1 s_x^2 dx d\tau \leq C. \quad (2.3.21)$$

Уравнение (2.2.2) можно представить в следующем виде

$$\frac{\partial G(\phi)}{\partial t} = \delta(s) \max\{|v(t)| - v_k, 0\}, \quad (2.3.22)$$

Проинтегрировав по t уравнение (2.3.22), получим

$$G(\phi) = G(\phi(x, 0)) + \int_0^t \delta(s) \max\{|v(\tau)| - v_k, 0\} d\tau. \quad (2.3.23)$$

Продифференцировав по x равенство (2.3.23), получим

$$G_\phi(\phi) \phi_x = G_x(\phi(x, 0)) + \int_0^t \delta_s(s) s_x \max\{|v(\tau)| - v_k, 0\} d\tau. \quad (2.3.24)$$

Возведя в квадрат и проинтегрировав по x равенство (2.3.24), получим оценку

$$\int_0^1 \phi_x^2 dx \leq C. \quad (2.3.25)$$

Из (2.3.25) и (2.3.21) следует выполнение оценки (2.3.17).

Умножив (2.3.15) на V_{xx} и проинтегрировав по x от 0 до 1 с учетом равенства

$$V_t V_{xx} = (V_t V_x)_x - \frac{1}{2} (V_x^2)_t,$$

получим

$$V_t V_x|_0^1 - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 V_x^2 dx - \int_0^1 \frac{K_0(\phi)}{\phi} a(s(V)) V_{xx}^2 dx = \int_0^1 f V_{xx} dx. \quad (2.3.26)$$

Оценим слагаемые правой части (2.3.26):

$$I_1 = \int_0^1 \frac{as}{\phi} \phi_t V_{xx} dx \leq C \int_0^1 \phi_t V_{xx} dx \leq$$

$$\leq C \left(\int_0^1 \phi_t^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 V_{xx}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 V_{xx}^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^1 \phi_t^2 dx,$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{a}{\phi} \frac{\partial K_0}{\partial \phi} \phi_x V_x V_{xx} dx \leq C \max_{x \in Q} |V_x| \int_0^1 |\phi_x| |V_{xx}| dx. \quad (2.3.27)$$

Введем функцию

$$z = V_x^2 - \int_0^1 V_x^2 dx. \quad (2.3.28)$$

Проинтегрировав последнее равенство по x от 0 до 1 получим

$$\int_0^1 z(x, t) dx = \int_0^1 V_x^2 dx - \int_0^1 V_x^2 dx \int_0^1 1 dx = 0.$$

Следовательно, существует точка $x_0(t)$ такая, что $z(x_0, t) = 0$. Для z справедливо неравенство

$$|z(x, t) - z(x_0, t)| = |z(x, t)| \leq \int_0^1 |z_x| dx.$$

Подставив в правую часть последнего неравенства (2.3.28), получим

$$|z(x, t)| \leq 2 \int_0^1 |V_x V_{xx}| dx \leq 2 \left(\int_0^1 V_x^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 V_{xx}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Из последнего неравенства следует

$$V_x^2 \leq \int_0^1 V_x^2 dx + 2 \left(\int_0^1 V_x^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 V_{xx}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.3.29)$$

Возведем в степень $1/2$ левую и правую часть неравенства (2.3.29), получим

$$V_x \leq \sqrt{\int_0^1 V_x^2 dx + 2 \left(\int_0^1 V_x^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 V_{xx}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}} \leq$$

$$\leq \left(\int_0^1 V_x^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \left(\int_0^1 V_x^2 dx \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_0^1 V_{xx}^2 dx \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (2.3.30)$$

Используя (2.3.30) неравенство (2.3.27) приведем к виду

$$I_2 \leq C \left(\left(\int_0^1 V_x^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \phi_x^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 V_{xx}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \left(\int_0^1 V_x^2 dx \right)^{\frac{3}{4}} \left(\int_0^1 V_{xx}^2 dx \right)^{\frac{1}{4}} \right) \leq \\ \leq C \left(\frac{1}{2\varepsilon} \int_0^1 |V_x|^2 dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 |V_{xx}|^2 dx \right).$$

Остальные слагаемые правой части оцениваются, так же как I_1, I_2 . Оценка (2.3.16) получается стандартным образом из леммы Гронуолла. Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Если ϕ и s классическое решение, то справедливо неравенство*

$$\int_0^1 V_t^2 dx + \int_0^t \int_0^1 V_{xt}^2 dx dt \leq C_2(m_0, m, M, v_k). \quad (2.3.31)$$

Доказательство. Продифференцируем уравнение (2.3.15) по t , умножим на V_t и полученное соотношение проинтегрируем по x и t . Основное нелинейное слагаемое оценивается следующим образом

$$\int_0^1 |\phi_t V_t^2 V_x| dx \leq C(1 + (\max_x V_x^2 + \max_x \phi_x^2)) \int_0^1 V_t^2 dx \leq C_2.$$

Замечание 2. *Из оценок (2.3.6), (2.3.16) и (2.3.31) получим*

$$\|s\|_Q^{(\alpha)} \leq C_3(m_0, m, M, v_k),$$

$$\|\phi\|_Q^{(\alpha)} \leq C_4(m_0, m, M, v_k).$$

Доказательство теоремы. Подставим в коэффициенты уравнения (2.2.2) произвольную непрерывную функцию $\tilde{s}(x, t)$ удовлетворяющую неравенству $|\tilde{s}| \leq M$, где постоянная $M > 0$ будет выбрана ниже. Полученная при этом линейная задача

$$\frac{\partial s \tilde{\phi}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (K_0(\tilde{\phi}) a(\tilde{s}) \nabla s - b(\tilde{s}) v(t) + F(\tilde{s}, \tilde{\phi})), \quad (2.3.32)$$

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} = \delta(\tilde{s}) R(\tilde{\phi}) \max\{|v(t)| - v_k, 0\}, \quad (2.3.33)$$

удовлетворяет граничным и начальным условиям (3). Следуя доказательствам лемм 3 – 8, получим в частности, оценку постоянной Гельдера

$$\|s\|_Q^{(\alpha)} \leq C_3(m_0, m, M, v_k). \quad (2.3.34)$$

Следует заметить, что данная оценка позволяет воспользоваться оценками шаудеровского типа и повысить гладкость решения до классического.

Выберем $M = C_3$ и рассмотрим отображение $U : \tilde{s} \rightarrow s$. Из неравенства (2.3.34) следует, что это отображение в пространстве $C(Q)$ переводит шар $\{|\tilde{s}| \leq M_1\}$ в себя. Кроме того оно непрерывно в пространстве $C(Q)$. Отображение U является вполне непрерывным: любую непрерывную функцию оно переводит в функцию класса $C^{\alpha, \alpha/2}(Q)$ удовлетворяющую неравенству (2.3.34).

Таким образом, для отображения U справедливы все условия теоремы Шаудера о неподвижной точке [87]. Следовательно, существует по крайней мере одна неподвижная точка $s(x, t) \equiv \tilde{s}(x, t)$ этого отображения и соответствующее этой функции классическое решение $\phi(x, t) \equiv \tilde{\phi}(x, t)$ задачи (2.3.32) – (2.3.33). Очевидно, пара $(\phi(x, t), s(x, t))$ является классическим решением задачи (2.2.1) – (2.2.3). Единственность следует из леммы 6.

Глава 3

Профильная задача внутренней суффозии



а)



б)

Рис. 3.1: Полость, образовавшаяся в результате внутренней суффозии (а) и суффозионная воронка (б).

В данной главе рассматривается двумерная математическая модель изотермической внутренней эрозии. В параграфе 3.1 дана постановка задачи фильтрации подземных вод в водоносном горизонте, который соприкасается с промерзшим песчаным грунтом. В процессе оттаивания грунта и при достижении определенной величины скорости фильтрации происходит вынос частиц грунта из области течения и образование подземных полостей [30] (см. Рисунок 3.1а). В результате увеличения и достижения критических размеров этих полостей происходит обрушение свода многолетнемерзлых пород [88] (см. Рисунок 3.1б). На поверхности грунта формируются провальные формы рельефа (суффозионные воронки) [1-4].

Математическая постановка задачи связана с изучением фильтрационных течений [89–92], процессов суффозии [93–96] и деформации грунта [97, 98].

В параграфе 3.2 рассмотрен частный случай двумерной модели изотермической фильтрации в недеформированном грунте. Приведены результаты численного исследования процесса внутренней суффозии в межмерзлотном водоносном горизонте и найдена область, подверженная внутренней суффозии. Параграф 3.3 посвящен численному исследованию процесса внутренней суффозии в верхних слоях почвогрунтов.

Моделирование процесса суффозии в верхних слоях почвогрунтов необходимо при проектировании дренажных и оросительных систем [79], а также при уплотнение грунтов предварительным замачиванием. Замачивание выполняют путем затопления котлована водой с поддержанием глубины воды 0.3 – 0.5 м и продолжают до тех пор, пока не будут достигнуты промачивание до проектной влажности всей толщи просадочных грунтов и условная стабилизация просадки [99].

3.1 Математическая модель фильтрации грунтовых вод, контактирующих с многолетнемерзлыми породами

Упругие мерзлые породы

На любом непрерывном движении сплошной среды, описываемой интегральными законами сохранения массы, импульса и энергии, существуют непрерывно дифференцируемые поля симметричного тензора напряжений P и вектора потока тепла $\vec{q} = -\alpha \nabla \theta$, с которыми интегральные законы сохранения равносильны системе дифференциальных уравнений, справедливых для любой точки $(\vec{x}, t) \in W = \{(\vec{x}, t) | t \in \tau, \vec{x} \in \Omega_t\} \subset R^4(\vec{x}, t)$ [104, 105]:

$$\rho_t + \vec{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad \rho(\vec{v}_t + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}) = \text{div} P + \rho \vec{f}, \quad (3.1.1)$$

$$\rho(U_t + \vec{v} \cdot \nabla U) = P : D + \text{div}(\alpha \nabla \theta) + \rho r, \quad (3.1.2)$$

где ρ – плотность; \vec{v} – скорость; U – удельная внутренняя энергия; θ – абсолютная температура; $D = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} + \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right)^* \right)$ – тензор скоростей деформации; α – коэффи-

циент теплопроводности; r – источник тепла; \vec{f} – внешние массовые силы; (x, t) – переменные Эйлера. При этом вектор напряжения, действующего на площадку с нормалью \vec{n} , дается формулой $\vec{p}_n = P \langle \vec{n} \rangle$, а плотность потока тепла через такую площадку – формулой $q_n = \vec{q} \cdot \vec{n}$.

Для упругого тела удобным является лагранжево описание: фиксируется некоторое положение Ω_0 среды в момент t_0 и рассматривается ее переход в положение Ω_t в момент времени $t > t_0$. Лагранжевы переменные (ξ, t) вводятся как решение задачи $x_t = \vec{v}(\vec{x}, t)$, $\vec{x}|_{t=t_0} = \vec{\xi}$. Вводится вектор перемещения $\vec{\omega} = \vec{x} - \vec{\xi}$, тензор дисторсии $T = \mathbb{I} + \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \xi}$, лагранжев и эйлеров тензора деформации: $2\hat{\varepsilon} = T^* \cdot T - \mathbb{I}$, $2\varepsilon = \mathbb{I} - T^{*-1} \cdot T^{-1}$; \mathbb{I} – единичный тензор. Свободная энергия $\mathcal{F}(\hat{\varepsilon}, \theta) = U - \theta S$ и коэффициент теплопроводности $\varkappa(\hat{\varepsilon}, \theta)$ являются изотропными тензорными функциями тензора $\hat{\varepsilon}$, энтропия $S = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \theta}$. В линейном варианте теории величины $\theta - \theta_0$, $T - \mathbb{I}$ малы (θ_0 – температура естественного состояния), и в силу соотношения $P = \rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varepsilon}$ для тензора напряжений скелета мерзлого грунта P^{si} принимается закон Дюамеля–Неймана

$$P^{si} = (-\gamma(\theta - \theta_0) + \lambda I_1(\varepsilon))\mathbb{I} + 2\mu\varepsilon, \quad 2\varepsilon = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \vec{x}} + \left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \vec{x}} \right)^*,$$

где γ , λ , μ – постоянные коэффициенты; $I_1(\varepsilon) = \text{div} \vec{\omega}$.

В рассматриваемом случае мерзлый грунт есть пористая среда с пористостью ϕ . Поэтому в уравнениях (3.1.2) в качестве ρ берется приведенная плотность скелета $\rho_s = (1 - \phi)\rho_s^0$, где ρ_s^0 – истинная плотность скелета грунта. Уравнение энергии (3.1.2) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \rho_s [C_\varepsilon(\theta_t + \vec{v} \cdot \nabla \theta) + (\gamma\theta_0 + \lambda \nabla \vec{\omega})(\nabla \vec{\omega}_t + \vec{v} \cdot \nabla(\nabla \cdot \vec{\omega}))] + \\ & + 2\mu\varepsilon : D = P : D + \nabla \cdot (\varkappa \nabla \theta) + \rho_s r, \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

где $C_\varepsilon = -\theta \mathcal{F}_{\theta\theta}$ – коэффициент теплоемкости при постоянной деформации. В качестве тензора напряжений P естественно принять $P = (1 - \phi)P^{si} + \phi P^i$, где P^{si} – тензор напряжений твердого скелета; P^i – тензор напряжений среды, заполняющей поровое пространство (лед или воздух и лед). Система уравнений (3.1.1), (3.1.3) описывает движение мерзлого грунта в областях Ω_1, Ω_3 (Рисунок 3.2).

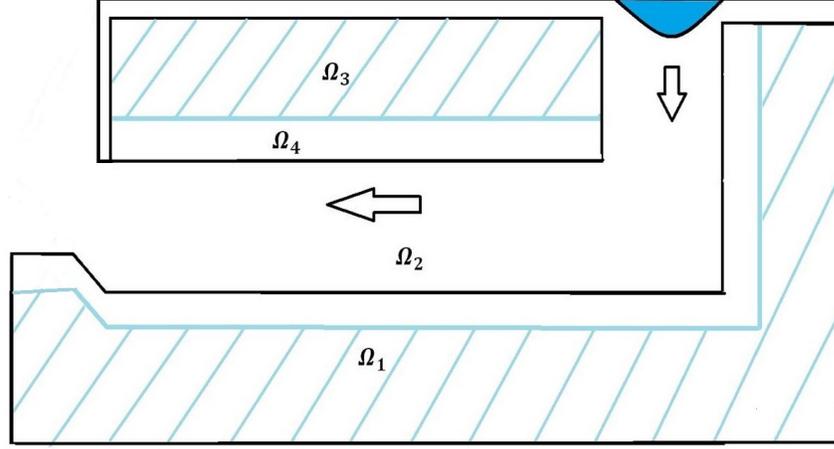


Рис. 3.2: Схема движения подземных вод в условиях мерзлого грунта. Ω_1 – мерзлый грунт с температурой $\theta \approx -0,2 C^\circ$, Ω_2 – область фильтрации талого грунта ; $\theta \approx +0,2 C^\circ$, Ω_3 – мерзлый грунт с температурой $\theta \approx -0,2 C^\circ$; Ω_4 – талый грунт с температурой $\theta \approx 0 C^\circ$

В области Ω_2 движения грунтовых вод, имеющих положительную температуру, в общем случае присутствуют, помимо скелета, подвижные твердые частицы грунта и воздух. Система уравнений трехфазной фильтрации состоит из обобщенного закона Дарси для каждой из фаз, уравнений неразрывности фаз и условий капиллярного равновесия [100]

$$\phi s_i (\vec{u}_i - \vec{u}_s) = -k \frac{f_i(s_1, s_2)}{\mu_i} \nabla p_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$(\phi \rho_i^0 s_i)_t + \nabla(\rho_i^0 \vec{u}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^3 s_i = 1,$$

$$p_3 - p_1 = P_1(s_1, s_2), \quad p_2 - p_3 = P_2(s_1, s_2).$$

Здесь k – проницаемость пористой среды; ϕ – пористость; s_i – насыщенность (доля пор, занятых i -й фазой); μ_i – вязкость; f_i – относительная фазовая проницаемость; p_i – давления; \vec{u}_i – скорость фильтрации i -й фазы; \vec{u}_s – скорость скелета; P_1, P_2 – заданные функции, обусловленные силовым взаимодействием фильтрующихся фаз; $\rho_i^0 = \rho_i^0(p_i, \theta_i)$ – истинные плотности фаз.

Уравнения сохранения энергии имеют вид [101]

$$c_i(\phi s_i \theta_{it} + \vec{u}_i \cdot \nabla \theta_i) = \nabla \cdot (\phi \lambda_i s_i \nabla \theta_i) - c_i \vec{u}_i \cdot \varepsilon_i \nabla p_i,$$

где c_i – теплоемкость i -й фазы при постоянном давлении; λ_i – коэффициент теплопроводности; ε_i – коэффициент дросселирования (описывающий понижение давления газа или пара при протекании через сужение порового канала).

Давление фильтрующихся фаз определяется как среднее:

$$p^f = - \sum_{i=1}^3 s_i p_i, \quad P^f = p^f I.$$

Фазовый переход

Пусть ρ_0 , \vec{v}_0 , $\vec{\omega}_0$, θ_0 , P_0 , ε_0 – соответственно плотность, скорость перемещение, температура, тензоры напряжений и деформаций мерзлого грунта, удовлетворяющие уравнениям (3.1.1), (3.1.3). Граница Γ между мерзлым грунтом и областью подземных вод определяется фазовой диаграммой мерзлого грунта $\theta_0 = \theta_*(p_0)$, $p_0 = \frac{1}{3}tr P_0$. На фазовой поверхности непрерывны перемещения, скорости, температуры: $\vec{\omega}_0 = \vec{\omega}$, $\vec{v}_0 = \vec{v} = \vec{u}$, $\theta_0 = \theta = \theta_i$. Из законов сохранения массы, импульса и энергии на фазовой границе $\Gamma = \{(\vec{x}, t) | h(\vec{x}, t) = 0\}$ следуют соотношения [101, 102]

$$\rho_0(\vec{v}_{0n} - D_n) = (1 - \phi)\rho_s(v_n - D_n) + \sum_{i=1}^3 \phi s_i \rho_i^0(u_{in} - D_n),$$

$$P_0 \langle \vec{n} \rangle - (1 - \phi)P^{si} \langle \vec{n} \rangle - \phi P^f \langle \vec{n} \rangle = 0,$$

$$\varkappa_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial n} = \varkappa \frac{\partial \theta}{\partial n},$$

где $\vec{n} = \frac{\nabla h}{|\nabla h|}$ – внешняя (в сторону Ω_2) нормаль к поверхности Γ ; $v_n = \vec{v} \cdot \vec{n}$, $\frac{\partial \theta}{\partial n} = \vec{n} \cdot \nabla \theta$, $D_n = -\frac{h_t}{\vec{n} \cdot \nabla h}$; ϕ – пористость.

Моделирование деформации грунтов

Существует множество инженерных подходов моделирования деформации грунтов с подземными полостями [97]. В одном из таких подходов грунт рассматривается как упругая среда [98, 103].

Предполагается, что полость расположена горизонтально на глубине H от поверхности земли и имеет круглое сечение. Профильная задача сводится к рассмотрению упругой пластины, имеющей круглый вырез радиуса R_0 и подверженной равномерному сжатию. Для рассматриваемой задачи в полярной системе координат уравнения равновесия и совместности имеют вид [104]:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R = 0, \quad (3.1.4)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + S = 0, \quad (3.1.5)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) (\sigma_r + \sigma_\theta) = 0, \quad (3.1.6)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u_1}{\partial r}, & \varepsilon_\theta &= \frac{u_1}{r} + \frac{\partial u_2}{r \partial \theta}, \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial u_1}{r \partial \theta} + \frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{u_2}{r}, \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu \sigma_\theta), & \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu \sigma_r), \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{G} \tau_{r\theta}. \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Граничные условия берутся в виде

$$(\sigma_r)_{r=R_0} = 0, \quad (\sigma_r)_{r=H} = -\gamma H, \quad (3.1.9)$$

где σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ – соответственно нормальная компонента напряжения в радиальном направлении, нормальная компонента в окружном направлении и касательная компонента напряжения; ε_θ , ε_r – деформации в окружном и радиальном направлениях; u_1 , u_2 – перемещения, соответственно в радиальном и тангенциальном направлениях; E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона; S и R – компоненты объемной силы в кольцевом и радиальном направлениях.

При симметричном относительно начала координат распределении напряжений можно считать $S = R = 0$, $\tau_{r\theta} = 0$, а σ_θ и σ_r зависящими только от r . Из (3.1.4) – (3.1.6) следует:

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + 2C, \quad \sigma_\theta = -\frac{A}{r^2} + 2C, \quad \tau_{r\theta} = 0,$$

где постоянные $A = -R_0^2 H^3 \gamma / (H^2 - R_0^2)$ и $C = H^3 \gamma / (H^2 - R_0^2)$ определяются из граничных условий (3.1.9). Используя (3.1.8) и (3.1.7), легко находится перемещение $u(u_1, u_2)$

$$u = \left(-\frac{A}{Er}(\nu + 1) + \frac{Cr}{E}(1 - \nu), 0 \right).$$

Последнее соотношение можно применять для оценки объема суффозионной воронки, образовавшейся в результате «исчезновения» полости.

3.2 Численное исследование профильной задачи внутренней эрозии в межмерзлотном водоносном слое при заданной концентрации подвижных частиц грунта

В данном разделе рассматривается частный случай математической модели (1.1.1), (1.1.2) фильтрации воды и твердых частиц в грунте с учетом процесса внутренней суффозии [53, 60]. Концентрация подвижных частиц грунта предполагается постоянной ($s_2 = c \equiv const$). Рассматривается изотермический суффозионный процесс в недеформируемой пористой среде (скорость скелета грунта $\vec{u}_3 = 0$). Истинные плотности ρ_i^0 будем считать постоянными и $\rho_2^0 = \rho_3^0$, так как подвижные частицы захватываются суффозионным потоком из грунта. Для замыкания системы используется гипотеза пропорциональности скоростей фильтрующихся фаз ($\vec{u}_2 = \beta \vec{u}_1$, $0 < \beta < 1$), предложенная I. Vardoulakis в работе [36]. Скорость воды задается в виде закона Дарси $\vec{u}_1 = k_f(\nabla p + \rho_1^0 \vec{g})$, где k_f – коэффициент фильтрации.

После подстановки приведенных плотностей и скоростей фаз, используя сделанные предположения, вместо (1.1.1), (1.1.9), (1.1.10) получим следующую систему

$$\frac{\partial}{\partial t}((1 - c)\phi) - \text{div}((1 - c)\phi k_f(\nabla p + \rho_1^0 \vec{g})) = 0, \quad (3.2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(c\phi) - \text{div}(\lambda c \phi k_f(\nabla p + \rho_1^0 \vec{g})) = \frac{I}{\rho_3^0}. \quad (3.2.2)$$

$$\frac{\partial(1 - \phi)}{\partial t} = -\frac{I}{\rho_3^0}. \quad (3.2.3)$$

Здесь p – давление воды, c – концентрация подвижных частиц грунта. Из (3.2.3) следует, что $\phi_0 \leq \phi \leq 1$, ϕ_0 – начальное значение пористости (см. раздел 2.3).

Сложив равенства (3.2.1) – (3.2.3) получим уравнение для давления воды

$$\operatorname{div}(a(c, \phi)(\nabla p + \rho_1^0 \vec{g})) = 0, \quad (3.2.4)$$

где $a(c, \phi) = (c\lambda + 1 - c)\phi k_f$.

Для определения пористости грунта используем частный случай соотношения для интенсивности суффозионного процесса (1.2.7) и уравнение (3.2.3) в виде

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = (1 - \phi)c\phi |k_f(\nabla p + \rho_1^0 \vec{g})|. \quad (3.2.5)$$

Граничные условия определяются свойствами среды, с которой контактирует водонасыщенный грунт. Условия на границе с неподвижным мерзлым грунтом (см. рисунок 3.2) являются следствием условия непротекания на границе раздела мерзлого грунта и области фильтрации (см. рисунок 3.3):

$$\left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{\Gamma_1} = -g\rho_1^0; \quad \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{\Gamma_2} = 0; \quad \left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{\Gamma_3} = -g\rho_1^0.$$

На остальных границах задаются давления

$$p \Big|_{\Gamma_4} = -g\rho_1^0 y + p_0; \quad p \Big|_{\Gamma_5} = -g\rho_1^0 y.$$

Здесь p_0 – давление водонасыщенного грунта.

Алгоритм численного решения системы (3.2.4), (3.2.5). Необходимо задать начальное условие для пористости ϕ . Из уравнения (3.2.4) найдем давление, решив его методом переменных направлений, подставив в коэффициенты уравнения значение пористости ϕ из начального условия. Используя уравнение (3.2.5) найдем значение пористости ϕ на первом шаге по времени, решив его методом Рунге – Кутты. Повторяя алгоритм найдем значения p и ϕ на всем временном интервале.

В работе [30] предполагают, что суффозионный процесс начинается после достижения модуля скорости фильтрации критического значения и предлагают для

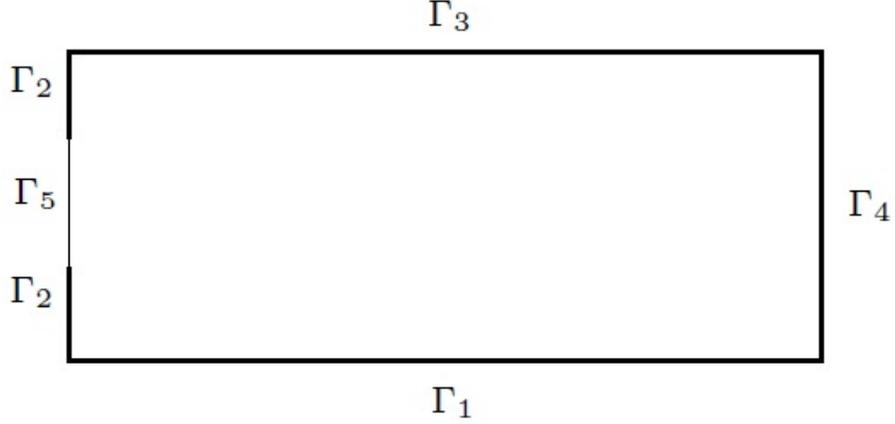


Рис. 3.3: Расчетная область

определения модуля критической скорости использовать зависимость

$$v_k = 4.2 \frac{\nu}{D_0} \sqrt[9]{\frac{D_0^3 g}{n^3 \nu^2}}, \quad (3.2.6)$$

где D_0 характерный диаметр пор, n – коэффициент формы сечения порового канала, ν – кинематический коэффициент вязкости воды, g – модуль ускорения силы тяжести.

Уравнение (3.2.4) для давления p решаем методом переменных направлений. Разностная схема имеет второй порядок точности [106]

$$\begin{aligned} \omega_1 p_{k+1/2} - \Lambda_1 p_{k+1/2} &= \omega_1 p_k + \Lambda_2 p_k + \psi, \\ \omega_2 p_{k+1} - \Lambda_2 p_{k+1} &= \omega_2 p_{k+1/2} + \Lambda_1 p_{k+1/2} + \psi, \\ \Lambda_1 p &= a(i + \frac{1}{2}, j) \frac{p(i+1, j) - p(i, j)}{h_1^2} - a(i - \frac{1}{2}, j) \frac{p(i, j) - p(i-1, j)}{h_1^2}, \\ a(i + \frac{1}{2}, j) &= \frac{a(i+1, j) + a(i, j)}{2}, \quad a(i - \frac{1}{2}, j) = \frac{a(i-1, j) + a(i, j)}{2}, \\ & i = 1, \dots, N_1 - 1; \\ \Lambda_2 p &= a(i, j + \frac{1}{2}) \frac{p(i, j+1) - p(i, j)}{h_2^2} - a(i, j - \frac{1}{2}) \frac{p(i, j) - p(i, j-1)}{h_2^2}, \\ a(i, j + \frac{1}{2}) &= \frac{a(i, j+1) + a(i, j)}{2}, \quad a(i, j - \frac{1}{2}) = \frac{a(i, j-1) + a(i, j)}{2}, \end{aligned}$$

$$\psi = \left(a(i, j + \frac{1}{2}) - a(i, j - \frac{1}{2}) \right) \frac{g\rho_1^0}{h_2},$$

$$j = 1, \dots, N_2 - 1,$$

где итерационный параметр $\omega_\alpha = \sqrt{\delta_\alpha \Delta_\alpha}$, $\delta_\alpha = \left(\frac{4}{h_\alpha^2} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha} \right)$, $\Delta_\alpha = (4/h_\alpha^2) \cos^2(\pi h_\alpha/2l_\alpha)$, $\alpha = 1, 2$; N_1, N_2 – число разбиений l_1 и l_2 ; l_1 и l_2 длина и ширина области соответственно; $h_1 = l_1/N_1$ и $h_2 = l_2/N_2$ – шаги разбиения l_1 и l_2 .

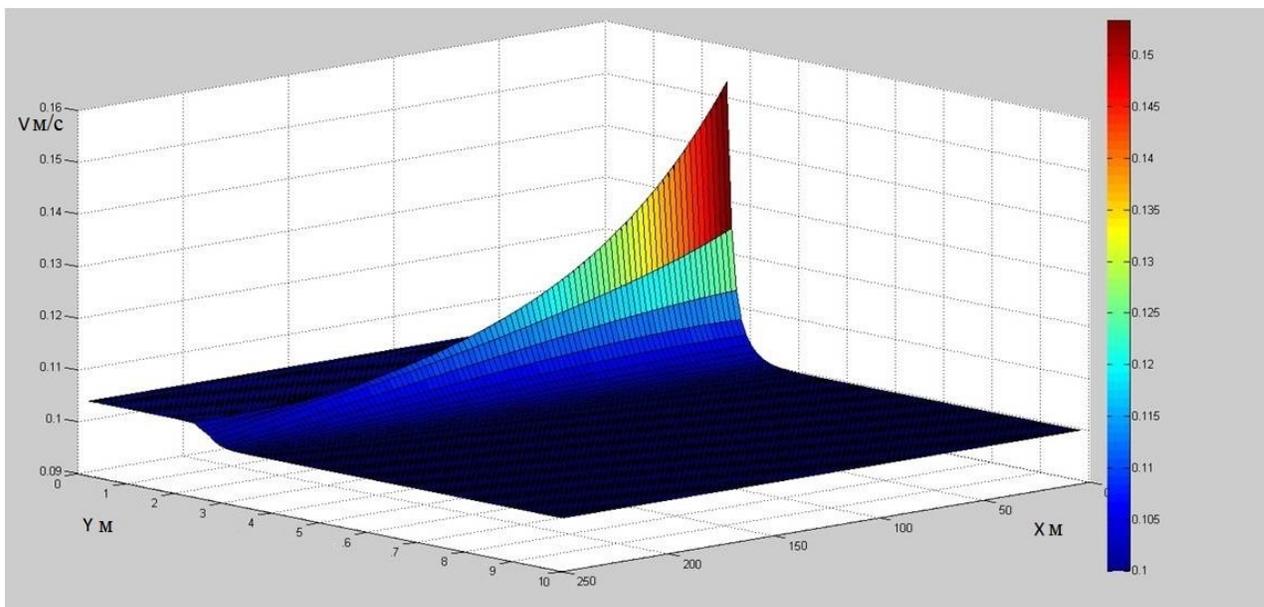


Рис. 3.4: График изменения модуля скорости

Численный расчет проводился при $\phi = 0.25$, $g = 9.81 \text{ м/с}^2$, $\nu = 1307 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $k_f = 13 \text{ м/сут}$, для этих значений постоянных из (3.2.6) находится критическая скорость $v_k = 0.11 \text{ м/с}$.

Модуль скорости изображен на Рисунке 3.4. Если найти пересечение поверхностей модуля скорости фильтрации и критической скорости (см. Рисунок 3.5), после достижения которой начинается суффозионный процесс, то можно определить область, подверженную внутренней эрозии (см. Рисунок 3.6).

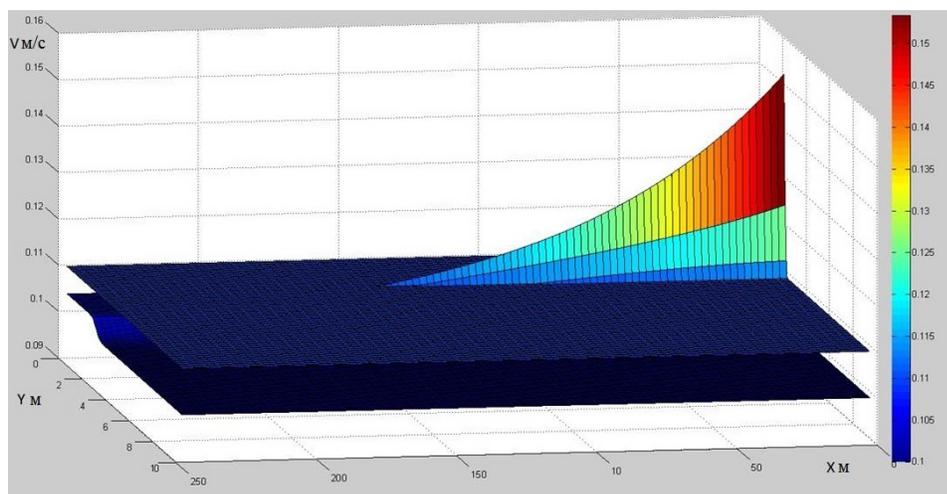


Рис. 3.5: Пересечение поверхностей модуля скорости фильтрации и критической скорости

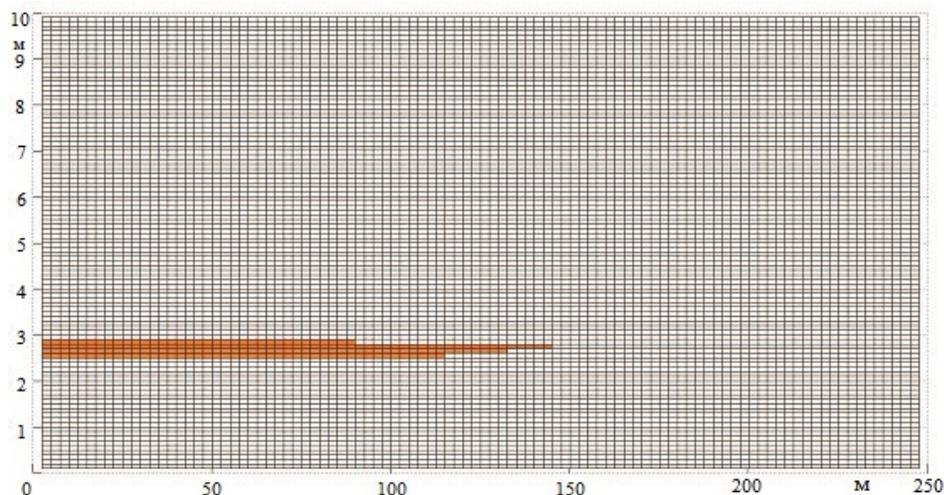


Рис. 3.6: Область эрозии

3.3 Двумерная задача фильтрации в верхних слоях почвогрунтов с учетом суффозионных процессов

Эрозия почв отрицательно влияет практически на все отрасли сельскохозяйственного производства. Наряду со снижением плодородия почв, уменьшением урожая культур и другими вредными воздействиями на сельскохозяйственное производство, внутренняя эрозия значительно ухудшает условия функционирования сельскохозяйственных машин и агрегатов при выполнении ими технологических работ. Это проявляется в снижении производительности работы сельскохозяйственной

техники на склонах, расчлененных промоинами и оврагами, в ухудшении качества полевых работ, в увеличении износа машин [2, 107]. Орошение полей затрудняет процесс внутренней суффозии. В данном пункте рассматривается задача фильтрации воды в верхних слоях почвогрунтов.

Постановка задачи

В двумерном случае система уравнений (1.1.23) – (1.1.26), описывающая процесс внутренней эрозии, имеет вид [56]

$$\phi \frac{\partial s}{\partial t} = \nabla \cdot (a \nabla s + b \vec{v} + \vec{F}), \quad (3.3.1)$$

$$\nabla \cdot (K \nabla p + \vec{f}) = 0, \quad (3.3.2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = I, \quad (3.3.3)$$

где I – интенсивность фазового перехода (суффозионный поток); s, s_2 – концентрации воды (водонасыщенность) и подвижных твердых частиц в порах; $\rho_1^0, \rho_2^0, \rho_3^0$ – истинные плотности воды, подвижных твердых частиц грунта и скелета грунта; $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ – оператор градиента; $\vec{v} = (v_x, v_y)$ – суммарная скорость фильтрации, p – приведенное давление. В рассматриваемом случае $\rho_3^0 = \rho_2^0$, так как подвижные частицы захватываются суффозионным потоком из грунта. Коэффициенты уравнения имеют вид:

$$a(s, \varphi) = -K_0 \frac{\bar{k}_{01} \bar{k}_{02}}{\mu \bar{k}_{01} + \bar{k}_{02}} \frac{\partial p_c}{\partial s}, \quad b(s) = \frac{\bar{k}_{02}}{\mu \bar{k}_{01} + \bar{k}_{02}},$$

$$v_x = v_x \frac{x_{sc}}{t_{sc}} = v_{x1} + v_{x2}, \quad v_y = v_y \frac{x_{sc}}{t_{sc}} = v_{y1} + v_{y2},$$

$$v_{x1} = -K_0 \bar{k}_{01} \left(\frac{\partial p_1}{\partial x} - g_x \right),$$

$$v_{x2} = -K_0 \frac{\bar{k}_{02}}{\mu} \left(\frac{\partial p_2}{\partial x} - \frac{\rho_2^0}{\rho_1^0} g_x \right),$$

$$v_{y1} = -K_0 \bar{k}_{01} \left(\frac{\partial p_1}{\partial x} - g_y \right),$$

$$v_{y2} = -K_0 \frac{\bar{k}_{02}}{\mu} \left(\frac{\partial p_2}{\partial x} - \frac{\rho_2^0}{\rho_1^0} g_y \right),$$

$$F_x = K_0 g_x \frac{\bar{k}_{01} \bar{k}_{02} \left(\frac{\rho_2^0}{\rho_1^0} - 1 \right)}{\mu \bar{k}_{01} + \bar{k}_{02}},$$

$$K_0 = \frac{B p_{sc} t_{sc}}{x_{sc}^2 \mu_1} \varphi^3, \quad F_y = K_0 g_y \frac{\bar{k}_{01} \bar{k}_{02} \left(\frac{\rho_2^0}{\rho_1^0} - 1 \right)}{\mu \bar{k}_{01} + \bar{k}_{02}},$$

$$f_x = -K_0 \left(\bar{k}_{01} + \frac{\rho_2^0 \mu_1}{\rho_1^0 \mu_2} \bar{k}_{02} \right) g_x, \quad K = K_0 k,$$

$$k = \bar{k}_{01} + \frac{\mu_1}{\mu_2} \bar{k}_{02}, \quad f_y = -K_0 \left(\bar{k}_{01} + \frac{\rho_2^0 \mu_1}{\rho_1^0 \mu_2} \bar{k}_{02} \right) g_y.$$

$$I = \begin{cases} \lambda(1 - \phi)(1 - s)\phi(|v_1| - |v_k|), & |v_1| \geq v_k; \\ 0, & |v_1| < v_k; \end{cases}$$

$$\lambda = \hat{\lambda} x_{sc}, \quad v_k = v_k \frac{x_{sc}}{t_{sc}}, \quad |v_1| = \sqrt{v_{x1}^2 + v_{y1}^2}.$$

Здесь $t_{sc}, x_{sc}, p_{sc} = \frac{\rho_1^0 x_{sc}^2}{t_{sc}^2}, v_{sc} = \frac{x_{sc}}{t_{sc}}$ – размерные постоянные, $\hat{\lambda}$ – размерный эмпирический коэффициент (отвечает за суффозионную устойчивость почвогрунта), $\mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}$.

Алгоритм численного решения задачи

Введем сетку с распределенными узлами $x_i = ih_1, \quad y_j = jh_2, \quad t_n = n\tau; \quad i = 0, \dots, N_1, \quad j = 0, \dots, N_2, \quad n = 0, \dots, T, \quad h_1, \quad h_2$ – шаг по пространственным координатам, τ – шаг по времени, итерационный параметр $\omega_\alpha = \sqrt{\delta_\alpha \Delta_\alpha}, \quad \delta_\alpha = \frac{4}{h_\alpha^2} \sin^2\left(\frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha}\right), \quad \Delta_\alpha = \frac{4}{h_\alpha^2} \cos^2\left(\frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha}\right), \quad \alpha = 1, 2; \quad l_1$ и l_2 длина и ширина области соответственно, N_1, N_2 – число разбиений по длине и ширине.

Уравнения (3.3.1) и (3.3.2) решаются методом переменных направлений [106]. Разностная схема имеет следующий вид:

$$\omega_1 p_{n+\frac{1}{2}} - \Lambda_1 p_{n+\frac{1}{2}} = \omega_1 p_n - \Lambda_2 p_n + \psi, \quad (3.3.4)$$

$$\omega_2 p_{n+1} - \Lambda_2 p_{n+1} = \omega_2 p_{n+\frac{1}{2}} - \Lambda_1 p_{n+\frac{1}{2}} + \psi, \quad (3.3.5)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_1 p &= K_{i+\frac{1}{2},j}^n \frac{p_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - p_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_1^2} - K_{i-\frac{1}{2},j}^n \frac{p_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - p_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_1^2}, \\ \Lambda_2 p &= K_{i,j+\frac{1}{2}}^n \frac{p_{i,j+1}^n - p_{i,j}^n}{h_2^2} - K_{i,j-\frac{1}{2}}^n \frac{p_{i,j}^n - p_{i,j-1}^n}{h_2^2}, \\ \psi &= f_{x\phi i,j} \frac{\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i-1,j}^n}{2h_1} + f_{xsi,j} \frac{s_{i+1,j}^n - s_{i-1,j}^n}{2h_1} + \\ &+ f_{y\phi i,j} \frac{\phi_{i,j+1}^n - \phi_{i,j-1}^n}{2h_2} + f_{ysi,j} \frac{s_{i,j+1}^n - s_{i,j-1}^n}{2h_2}. \end{aligned}$$

При аппроксимации уравнения (3.3.1) используется направленная разность для конвективного слагаемого.

$$\phi_{i,j}^n \frac{s_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - s_{i,j}^n}{\tau} = \Gamma_1 s_{n+\frac{1}{2}} + \Gamma_2 s_n + \eta - s_{i,j}^n \frac{\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n}{\tau}, \quad (3.3.6)$$

$$\phi_{i,j}^n \frac{s_{i,j}^{n+1} - s_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = \Gamma_2 s_{n+1} + \Gamma_1 s_{n+\frac{1}{2}} + \eta - s_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \frac{\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n}{\tau}, \quad (3.3.7)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_1 s &= a_{i+\frac{1}{2},j}^n \frac{s_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - s_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_1^2} - a_{i-\frac{1}{2},j}^n \frac{s_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - s_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_1^2} + \\ &+ \frac{\xi_{1x} s_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2|G_{xi,j}^n| s_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \xi_{2x} s_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2h_1}, \end{aligned}$$

$$\xi_{1x} = |G_{xi,j}^n| + G_{xi,j}^n, \quad \xi_{2x} = |G_{xi,j}^n| - G_{xi,j}^n,$$

$$\begin{aligned} \Gamma_2 s &= a_{i,j+\frac{1}{2}}^n \frac{s_{i,j+1}^n - s_{i,j}^n}{h_2^2} - a_{i,j-\frac{1}{2}}^n \frac{s_{i,j}^n - s_{i,j-1}^n}{h_2^2} + \\ &+ \frac{\xi_{1y} s_{i,j+1}^n - 2(|G_{yi,j}^n|) s_{i,j}^n + \xi_{2y} s_{i,j-1}^n}{2h_2}, \end{aligned}$$

$$\xi_{1y} = |G_{yi,j}^n| + G_{yi,j}^n, \quad \xi_{2y} = |G_{yi,j}^n| - G_{yi,j}^n,$$

$$\eta = F_{x\phi i,j}^n \frac{\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i-1,j}^n}{2h_1} + F_{y\phi i,j}^n \frac{\phi_{i,j+1}^n - \phi_{i,j-1}^n}{2h_2}.$$

Уравнение (3.3.3) аппроксимируется схемой Рунге-Кутты второго порядка точности. Причем, найденное на первом этапе значение $\tilde{\phi}_{i,j}^{n+1}$

$$\tilde{\phi}_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^n + \tau I_{i,j}^n, \quad (3.3.8)$$

затем уточняется следующим образом

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^n + \tau \frac{I(\phi_{i,j}^n, s_{i,j}^n) + I(\tilde{\phi}_{i,j}^n, s_{i,j}^n)}{2}. \quad (3.3.9)$$

Здесь $i = 1, \dots, N_1 - 1, j = 1, \dots, N_2 - 1, \tau = 1, \dots, T - 1,$

$$a_{i\pm\frac{1}{2},j}^n = \frac{2K_0(\phi_{i\pm 1,j}^n)a(s_{i\pm 1,j}^n)K_0(\phi_{i,j}^n)a(s_{i,j}^n)}{K_0(\phi_{i\pm 1,j}^n)a(s_{i\pm 1,j}^n) + K_0(\phi_{i,j}^n)a(s_{i,j}^n)},$$

$$a_{i,j\pm\frac{1}{2}}^n = \frac{2K_0(\phi_{i,j\pm 1}^n)a(s_{i,j\pm 1}^n)K_0(\phi_{i,j}^n)a(s_{i,j}^n)}{K_0(\phi_{i,j\pm 1}^n)a(s_{i,j\pm 1}^n) + K_0(\phi_{i,j}^n)a(s_{i,j}^n)},$$

$$F_{x\phi i,j}^n = \frac{\partial F_x}{\partial \phi}(s_{i,j}^n, \phi_{i,j}^n), \quad F_{y\phi i,j}^n = \frac{\partial F_y}{\partial \phi}(s_{i,j}^n, \phi_{i,j}^n),$$

$$f_{x\phi i,j}^n = \frac{\partial f_x}{\partial \phi}(s_{i,j}^n, \phi_{i,j}^n), \quad f_{y\phi i,j}^n = \frac{\partial f_y}{\partial \phi}(s_{i,j}^n, \phi_{i,j}^n),$$

$$f_{xsi,j}^n = \frac{\partial f_x}{\partial s}(s_{i,j}^n, \phi_{i,j}^n), \quad f_{ysi,j}^n = \frac{\partial f_y}{\partial s}(s_{i,j}^n, \phi_{i,j}^n),$$

$$G_{xi,j}^n = \frac{\partial F_x}{\partial s}(s_{i,j}^n, \phi_{i,j}^n) + v_x(t_n) \frac{\partial b}{\partial s}(s_{i,j}^n),$$

$$G_{yi,j}^n = \frac{\partial F_y}{\partial s}(s_{i,j}^n, \phi_{i,j}^n) + v_y(t_n) \frac{\partial b}{\partial s}(s_{i,j}^n),$$

$$K_{i\pm\frac{1}{2},j}^n = \frac{2K(\phi_{i\pm 1,j}^n, s_{i\pm 1,j}^n)K(\phi_{i,j}^n, s_{i,j}^n)}{K(\phi_{i\pm 1,j}^n, s_{i\pm 1,j}^n) + K(\phi_{i,j}^n, s_{i,j}^n)},$$

$$K_{i,j\pm\frac{1}{2}}^n = \frac{2K(\phi_{i,j\pm 1}^n, s_{i,j\pm 1}^n)K(\phi_{i,j}^n, s_{i,j}^n)}{K(\phi_{i,j\pm 1}^n, s_{i,j\pm 1}^n) + K(\phi_{i,j}^n, s_{i,j}^n)},$$

$$I_{i,j}^n = \begin{cases} \lambda(1 - \phi_{i,j}^n)(1 - s_{i,j}^n)\phi_{i,j}^n(|v_{1i,j}^n| - |v_k|), & |v_{1i,j}^n| \geq |v_k|; \\ 0, & |v_{1i,j}^n| < |v_k|; \end{cases}$$

$$v_{1i,j}^n = \sqrt{(v_{x1i,j}^n)^2 + (v_{y1i,j}^n)^2}.$$

Алгоритм численного решения начально-краевой задачи следующий: используя начальное значение пористости $\phi_{i,j}^0$ и концентрации $s_{i,j}^0$ находим начальное распределение приведенного давления $p_{i,j}^0$ ($i = 0, \dots, N_1; j = 0, \dots, N_2$), решив систему разностных уравнений (3.3.4) и (3.3.5) методом переменных направлений.

Используя найденное давление определяем скорости фильтрации воды и подвижных частиц грунта $v_{1i,j}^0$ и $v_{2i,j}^0$. Из равенства (3.3.8) находим пористость грунта $\tilde{\phi}_{i,j}^1$ на следующем шаге по времени. Находим концентрацию воды $s_{i,j}^1$, решив систему разностных уравнений (3.3.6) и (3.3.7) методом переменных направлений и используя найденные давления и пористость. Находим давление на следующем шаге по времени ($n = 1$). Используя найденные значения искомых функций $\tilde{\phi}_{i,j}^1$, $s_{i,j}^1$, $p_{i,j}^0$, $p_{i,j}^1$, корректируем значения пористости на первом шаге по времени, используя формулу (3.3.9). Повторяя данный алгоритм для следующих шагов по времени, найдем значения искомых функций на всем временном интервале.

Результаты численных расчетов

На поверхности грунта поддерживается слой воды глубиной h , достаточной для возникновения суффозионного процесса. Предполагается, что на нижней границе рассматриваемой области суффозионный процесс не происходит, так как скорость воды меньше критической скорости, необходимой для возникновения суффозионного процесса.

Начальные и граничные условия задачи имеют вид:

$$s(x, y, 0) = 1, \quad \frac{\partial s}{\partial y}(0, y, t) = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial y}(l_1, y, t) = 0,$$

$$\frac{\partial s}{\partial x}(x, 0, t) = 0, \quad s(x, l_2, t) = 1,$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}(0, y, t) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y}(l_1, y, t) = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x, 0, t) = 0, \quad p(x, l_2, t) = h * \rho_0^1 g,$$

$$\phi(x, y, 0) = \begin{cases} 1, & x \leq h; \\ 0.3, & x > h. \end{cases}$$

В численных расчетах использовался следующий набор модельных параметров [35]:

$$\rho_1^0 = 1000 \text{ кг/м}^3, \quad \rho_2^0 = 1440 \text{ кг/м}^3,$$

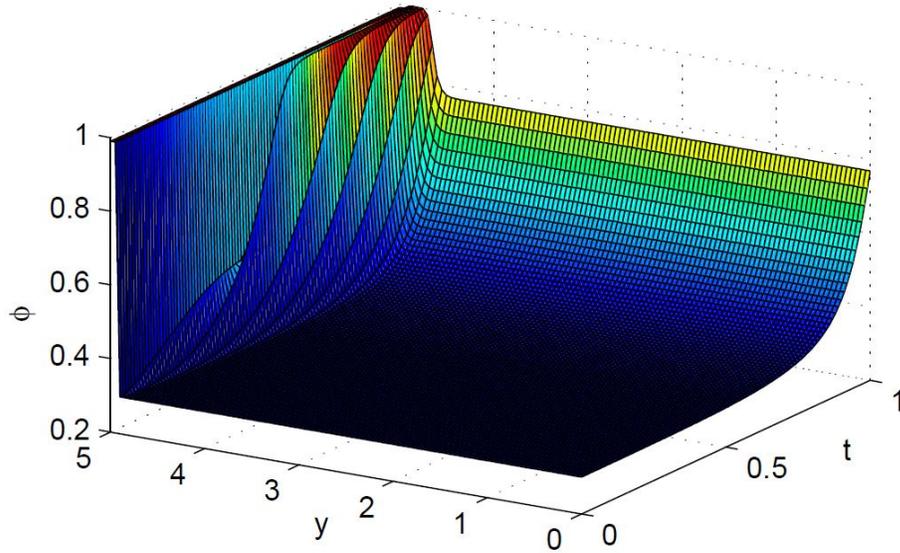


Рис. 3.7: Изменение пористости грунта

$$B = 0.00001 \text{ м}^2, \quad g = 9.8 \text{ м/с}^2, \quad v_k = 0 \text{ м/с},$$

$$\mu_1 = 0.001787 \text{ кг/(м} \cdot \text{с)}, \quad \mu_2 = 0.003574 \text{ кг/(м} \cdot \text{с)}.$$

На Рисунке 3.7 представлен график изменения пористости грунта при $x = 0.5$. С течением времени выделяется область, где почва размывается полностью ($\phi = 1$) см. Рисунок 3.7.

Устойчивость и порядок сходимости вычислительного алгоритма проверяются путем вычислительных экспериментов, применяя известное правило Рунге [50, с. 75], аналогично подробно рассмотренному примеру в пунктах 1.5 и 1.6 для одномерного случая. Наблюдение ведется за концентрацией воды s , пористостью ϕ , приведенным давлением p и скоростями фильтрации v_1 и v_2 . Экспериментальный порядок сходимости $R \approx 1$ и приближенно определяемая относительная погрешность $\varepsilon \approx 0.3\%$.

Глава 4

Тепломассоперенос в тающем снеге

Данная глава посвящена исследованию модели совместного движения воды и воздуха в тающем снеге с учетом фазовых переходов, разработке алгоритма численного решения одномерной задачи. Для верификации полученных результатов численного моделирования используются экспериментальные данные из работы [64].

4.1 Постановка задачи

Следуя [42, 44–46, 85, 108, 109] будем рассматривать тающий снег как сплошную среду, состоящую из воды ($i = 1$), воздуха ($i = 2$) и льда ($i = 3$), составляющего твердый пористый скелет. Фильтрация воды и воздуха в пористом ледовом скелете описывается уравнениями сохранения массы для каждой из фаз с учетом фазовых переходов, уравнениями двухфазной фильтрации и уравнением теплового баланса для трехфазной среды

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \vec{u}_i) = \sum_{j=1}^3 I_{ji}, \quad i = 1, 2, 3; \quad I_{ji} = -I_{ij}; \quad \sum_{i,j=1}^3 I_{ij} = 0; \quad (4.1.1)$$

$$\phi s_i (\vec{u}_i - \vec{u}_3) = -K_0 \frac{\bar{k}_{0i}}{\mu_i} (\nabla p_i - \rho_i^0 \vec{g}), \quad i = 1, 2; \quad p_2 - p_1 = p_c(s_1, \theta); \quad (4.1.2)$$

$$\left(\sum_{i=1}^3 \rho_i^0 c_i \alpha_i \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \left(\sum_{i=1}^3 \rho_i^0 \alpha_i c_i \vec{u}_i \right) \nabla \theta = \operatorname{div}(\lambda_c \nabla \theta) - \omega I_{23} - \nu I_{13} + L(y). \quad (4.1.3)$$

Здесь \vec{u}_i – скорость i -й фазы; ρ_i – приведенная плотность, связанная с истинной плотностью ρ_i^0 и объемной концентрацией α_i соотношением $\rho_i = \alpha_i \rho_i^0$ (условие

$\sum_{i=1}^3 \alpha_i = 1$ является следствием определения ρ_i); I_{ji} – интенсивность перехода массы из j -й в i -ю составляющую в единице объема в единицу времени; ϕ – пористость снега; s_1, s_2 – насыщенности воды и воздуха ($\alpha_1 = \phi s_1, \alpha_2 = \phi s_2, \alpha_3 = 1 - \phi, s_1 + s_2 = 1$); $K_0(\phi)$ – тензор проницаемости пористой среды; \bar{k}_{0i} – фазовые проницаемости ($\bar{k}_{0i} = \bar{k}_{0i}(s_i) \geq 0, \bar{k}_{0i}|_{s_i=0} = 0$); $\mu_i = const > 0$ – динамические вязкости; p_i – давления фаз; p_c – капиллярное давление, \vec{g} – вектор ускорения силы тяжести; θ – температура среды ($\theta_i = \theta, i = 1, 2, 3$), $c_i = const > 0$ – удельная теплоемкость i -й фазы при постоянном объеме; $\nu = const > 0$ – удельная теплота плавления льда; $\omega = const > 0$ – удельная теплота сублимации льда; λ_c – теплопроводность снега, $L(y)$ – функция теплового источника, описывающая поглощение солнечной радиации. Ось y направлена вертикально вниз.

Система (4.1.1)–(4.1.3) дополняется гипотезами $\vec{u}_3 = 0$ (частицы льда неподвижны, структура льда как сплошной среды не уточняется [42]), $\rho_i^0 = const > 0, i = 1, 2, 3; \rho_3^0 < \rho_1^0; s_1 \equiv s$ – водонасыщенность ($1 - s = s_2$).

В рассматриваемом подходе важным моментом является корректное определение интенсивностей фазового перехода "лед-вода" и "лед-воздух". Следует отметить, что для описания процессов испарения и конденсации молекул пара на межфазной границе "жидкость–пар" используется классическая формула Герца–Кнудсена–Ленгмюра [15, с. 88] и ее модификации. В соответствии с формулой Герца–Кнудсена–Ленгмюра интенсивность фазового перехода пропорциональна разности давления жидкости на фазовой границе и давления насыщения. Аналогичная формула используется для описания процесса сублимации в снеге [110]. Для моделирования интенсивности фазового перехода "лед-вода", как правило, используется методология задачи Стефана, т.е. предполагается, что существует межфазная граница, на которой при определенной температуре скачком происходит переход льда в воду. При таком подходе не требуется задавать интенсивность фазового перехода "лед-вода". Другой подход к процессу таяния снега подразумевает, что фазовый переход "лед-вода" происходит во всей толще снежно-ледового покрова и для описания распространений тепла нужно использовать уравнение

вида (4.1.3) с соответствующей правой частью. Близкой по проблематике является задача тепломассопереноса в протаивающих (промерзающих) грунтах [67, 111]. Имеется ряд экспериментальных результатов по зависимости концентрации льда в пористой среде от температуры [65, 66]. Используемые в данной работе зависимости для интенсивности фазового перехода "лед-вода" опираются на идеи работ [65, 67].

$$I_{31} \equiv I = \begin{cases} -\lambda_1 \phi \theta_s, & \theta < \theta^-; \\ 0, & \theta^- \leq \theta \leq \theta^+; \\ \lambda_2 (1 - \phi)^2 \exp(\beta(\theta - \theta^+)), & \theta > \theta^+. \end{cases} \quad (4.1.4)$$

Здесь θ^+ – температура плавления льда, θ^- – температура замерзания воды, $\beta, \lambda_1, \lambda_2$ – размерные постоянные, характеризующие интенсивность фазового перехода ($[\beta]=1/\text{K}, [\lambda_1]=\text{кг}/(\text{м}^3 \cdot \text{с} \cdot \text{K}), [\lambda_2]=\text{кг}/(\text{м}^3 \cdot \text{с})$). В дальнейшем сублимацией и обменом массами между водой и воздухом пренебрегаем ($I_{12} = 0, I_{23} = 0$).

4.2 Физические свойства снега

Снег представляют собой светорассеивающую среду в достаточно широком диапазоне спектра солнечного излучения. В монографии [112] сделан обширный литературный обзор и изложена теория радиационного переноса в оптически неоднородных средах. Учет оптических свойств среды позволяет выявить особенности формирования теплового режима при объемном прогреве потоком солнечного излучения.

Если температура воздуха снижается до некоторого критического значения θ_{cr} , то вследствие уменьшения вклада длинноволнового излучения атмосферы поверхность будет находиться в состоянии радиационного равновесия. Таким образом, при температуре воздуха $\theta_a > \theta_{cr}$ происходит поверхностное плавление. Достаточно большой по размеру атмосферный лучистый поток обеспечивает перетекание тепла в глубь снежно-ледяного покрова, что совпадает с классической кондуктивной моделью нагрева непрозрачных материалов с образованием в глубине монотонно убывающего температурного профиля.

При достижении радиационного равновесия с температурой воздуха $\theta_a = \theta_{cr}$ вклад энергии в переизлучение с поверхности уравнивается кондуктивным стоком тепла, расходуемым на поддержание установившегося температурного распределения, которое может иметь также экстремальный характер.

Если $\theta_a < \theta_{cr}$, то условия для поверхностного плавления отсутствуют. В этом случае в подповерхностном слое снега и льда поглощенная солнечная энергия должна превышать поверхностное эффективное тепловое переизлучение. Это означает, что имеются энергетические возможности для кондуктивного перетекания тепла и к поверхности, и в глубину из зоны «перегрева». Внутреннее объемное поглощение солнечного излучения будет служить тепловым источником, поддерживающим состояние локального «перегрева».

Обычно при анализе теплового режима, употребляются два предельных случая оптических параметров: либо непрозрачная среда с поглощением на поверхности, либо прозрачная среда с поглощением потока излучения в объеме по закону Бугера [113]. Разумеется, применение предельных случаев правомерно, но при определенных условиях и далеко не для всех типов снега. Иными словами, имеется обширный класс природных процессов, когда наблюдаемые теплофизические эффекты невозможно объяснить и рассчитать, оставаясь в рамках традиционных подходов. В работе [112, с. 114] для тающего снега функцию теплового источника предлагается определять следующим образом:

$$L(y) = l_1 \exp(-\kappa y) - l_2 \exp(\kappa y).$$

Здесь κ – показатель ослабления излучения светорассеивающей среды, l_1, l_2 – заданные параметры.

Коэффициент теплопроводности снега зависит от плотности, структуры, температуры и водонасыщенности. На основании анализа опытных данных предложен ряд эмпирических формул для расчета зависимости коэффициента теплопроводности снега λ_c от плотности, однако при определенных величинах плотности снега ρ_c значение λ_c , вычисленные по разным формулам, могут отличаться более чем в

два раза. Это можно объяснить различиями структурных характеристик снега в экспериментах разных авторов и главным образом пренебрежением зависимости λ_c от температуры. Например в работе [114, с. 135] для определения теплопроводности снега предлагается использовать следующую зависимость:

$$\lambda_c = a_c + b_c \rho_c^2, \quad (4.2.1)$$

где $\rho_c = \sum_{i=1}^3 \rho_i^0 \alpha_i$ – плотность снега, $a_c = const > 0$, $b_c = const > 0$

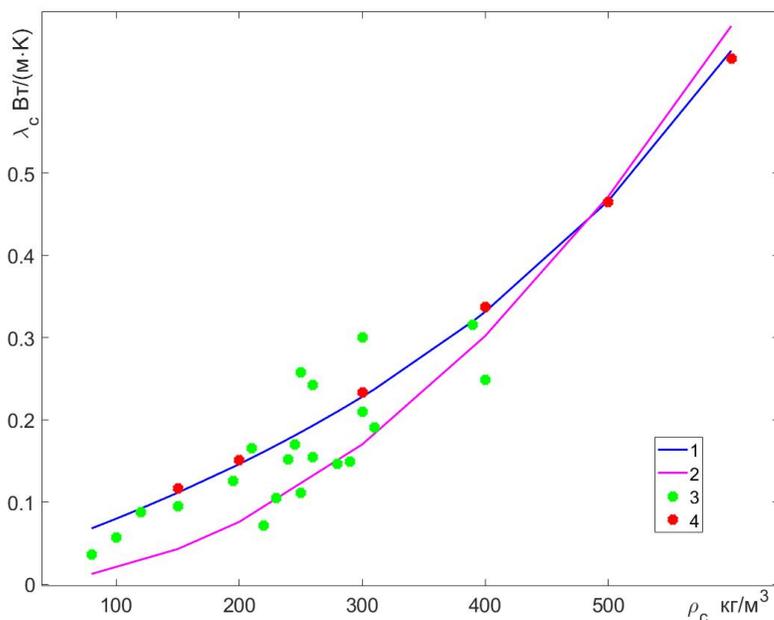


Рис. 4.1: Зависимость коэффициента теплопроводности снега от плотности 1 – рассчитанные значения коэффициента теплопроводности по формуле (4.2.2) [115]; 2 – рассчитанные значения коэффициента теплопроводности по формуле (4.2.1) [114]; 3 – экспериментальные данные из работы [116]; 4 – экспериментальные данные из работы [117].

Ряд формул для определения λ_c получен на основе теории теплопроводности многокомпонентных систем, например, в работе [115, с. 63] теплопроводность снега определяется следующим образом:

$$\lambda_c = (\lambda_a \varphi + \lambda_i (1 - \varphi) \beta_c) / (\varphi + (1 - \varphi) \beta_c). \quad (4.2.2)$$

Здесь $\varphi = 1 - \rho_c / \rho_3^0$, β_c – безразмерный параметр (для разных типов снега может изменяться в пределах от 0.15 до 0.25), λ_a, λ_i – коэффициенты теплопроводности

воздуха и льда соответственно.

На Рисунке 4.1 представлены графики зависимости теплопроводности снега от плотности рассчитанные по формулам (4.2.1) и (4.2.2) при $a_c = 0.00005$ Вт/(м·К), $b_c = 0.00000189$ Вт·м⁵/К, $\beta_c = 0.21$, а также экспериментальные данные из работ [116, 117]. В работе [116] теплопроводность измерялась при температуре от -2 до -7 °С. В справочнике [117, с. 334] приведены данные при температуре близкой к 0 °С. Заметим, что соотношение (4.2.2) лучше согласуется с экспериментальными данными [117] в широком диапазоне изменения плотности снега.

Важным параметром при исследовании движения воды и воздуха в снеге является проницаемость пористого скелета [112]. Первые исследования зависимости коэффициента проницаемости от пористости были сделаны для грунтов (изменение пористости в грунте может быть вызвано, в частности, процессами внутренней суффозии и кольматации [12, 52, 80]). По аналогии с фильтрацией в грунте для снега коэффициент проницаемости задается следующим образом (обширный обзор литературы сделан в статье [44]): $K_0 = d_1 \phi^m$ или $K_0 = d_2 \exp(\alpha \phi)$, а коэффициенты $\bar{k}_{0i} = s_i^n$. Здесь d_1, d_2 – размерные постоянные [м²]; α – безразмерный заданный параметр; степень n , обычно, принимают равной 2, а $3 \leq m \leq 5$ [112, с. 13]. Капиллярное давление, как правило, зависит только от водонасыщенности и имеет вид $p_c(s) = \gamma/s$ [45] или $p_c(s) = \gamma/s + c$ [46], где γ, c – размерные постоянные [Па]. Для грунтов с переменной пористостью широко используется зависимость Козени $K_0 = B\phi^3/(1 - \phi)^2$, где B – размерная постоянная [м²].

При моделировании фильтрации воды в тающем снеге в работе [47] используют зависимость для грунтов вида [118]:

$$\bar{k}_{01} = \sqrt{s}(1 - (1 - s^{1/m})^m)^2,$$

где m, n – заданные постоянные, а коэффициент проницаемости задается зависимостью $K_0 = d(\phi) \exp(\alpha \rho_c / \rho_3^0)$ [119], где d – размерная функция, α – постоянная. Для капиллярного давления в работе [47] используется зависимость

$$p_c = \gamma(s^{-1/m} - 1)^{1/n}, \quad (4.2.3)$$

где γ размерная постоянная [Па]; m, n – заданные постоянные.

4.3 Преобразование системы уравнений

В дальнейшем предполагается, что влияние теплового источника мало $L(y) = 0$, $p_c = p_c(s)$ и $p_c(s)$ обладает свойствами [44]:

$$p_c(s) > 0, \quad s \in (0, 1), \quad p_c(0) = \infty, \quad p_c(1) = 0, \quad \frac{\partial p_c}{\partial s} < 0.$$

С учетом принятых предположений система (4.1.1)–(4.1.2) записывается в виде

$$\frac{\partial(s\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (s\phi\vec{u}_1) = \frac{I}{\rho_1^0}, \quad (4.3.1)$$

$$\frac{\partial(1-s)\phi}{\partial t} + \nabla \cdot ((1-s)\phi\vec{u}_2) = 0, \quad (4.3.2)$$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} = -\frac{I}{\rho_3^0}, \quad (4.3.3)$$

$$\vec{v}_i \equiv s_i\phi\vec{u}_i = -K_0(\phi)k_{0i}(\nabla p_i - \rho_i^0\vec{g}), \quad i = 1, 2; \quad p_2 - p_1 = p_c(s). \quad (4.3.4)$$

где $k_{0i} = \bar{k}_{0i}/\mu_i$. Преобразуем систему (4.1.1)–(4.1.2). Сложив уравнения (4.3.1), (4.3.2) и (4.3.3), выводим

$$-\nabla \cdot (s\phi\vec{u}_1 + (1-s)\phi\vec{u}_2) = \left(1 - \frac{\rho_3^0}{\rho_1^0}\right) \frac{\partial\phi}{\partial t}. \quad (4.3.5)$$

Положим

$$\vec{v} \equiv s\phi\vec{u}_1 + (1-s)\phi\vec{u}_2.$$

Используя (4.3.4) и формулу $p_2 - p_1 = p_c$ для \vec{v} получим следующее представление:

$$\begin{aligned} -\vec{v} &= K_0(\phi)(k_{01}(\nabla(p_2 - p_c) - \rho_1^0\vec{g}) + k_{02}(\nabla p_2 - \rho_2^0\vec{g})) = \\ &= K_0(k(\nabla p_2 - \frac{k_{01}}{k} \frac{\partial p_c}{\partial s} \nabla s) - \vec{g}(\rho_2^0 k_{02} + \rho_1^0 k_{01})) = \\ &= K_0(k\nabla(p_2 + \int_s^1 \frac{k_{01}(\xi)}{k(\xi)} \frac{\partial p_c}{\partial \xi} d\xi) - \vec{g}(\rho_2^0 k_{02} + \rho_1^0 k_{01})) = K\nabla p + \vec{f}, \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

где $k(s) = k_{01} + k_{02}$, $K(s, \phi) = K_0(\phi)k(s)$, $\vec{f}(s, \phi) = -K_0\vec{g}(k_{01}\rho_1^0 + k_{02}\rho_2^0)$,
 p – "приведенное" давление [62]:

$$p = p_2 + \int_s^1 \frac{k_{01}(\xi)}{k(\xi)} \frac{\partial p_c}{\partial \xi} d\xi. \quad (4.3.7)$$

С учетом (4.3.7) для $\vec{v}_2 = (1 - s)\phi\vec{u}_2$ имеем

$$-\vec{v}_2 = -a\nabla s + K_0k_{02}\nabla p + \vec{f}_0, \quad (4.3.8)$$

где

$$a(s, \phi) = -K_0 \frac{k_{01}k_{02}}{k} \frac{\partial p_c}{\partial s}, \quad \vec{f}_0(s, \phi) = -K_0k_{02}\rho_2^0\vec{g}.$$

Используя (4.3.6), вместо (4.3.8) получим

$$-\vec{v}_2 = -a\nabla s - b\vec{v} - \vec{F}, \quad (4.3.9)$$

где

$$\vec{F}(s, \phi) = b\vec{v} - \vec{f}_0 = \frac{k_{01}k_{02}K_0\vec{g}}{k}(\rho_2^0 - \rho_1^0), \quad b(s) = \frac{k_{02}}{k}.$$

Используя уравнение (4.3.2) и привлекая соотношение (4.3.8), приходим к уравнению

$$\frac{\partial((1 - s)\phi)}{\partial t} = \nabla \cdot (-a\nabla s + K_0k_{02}\nabla p + \vec{f}_0). \quad (4.3.10)$$

Уравнения (4.3.3) и (4.3.5) можно переписать в виде

$$\nabla \cdot (K\nabla p + \vec{f}) = \left(1 - \frac{\rho_3^0}{\rho_1^0}\right) \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (4.3.11)$$

$$\rho_3^0 \frac{\partial(1 - \phi)}{\partial t} = -I. \quad (4.3.12)$$

Система уравнений (4.1.3), (4.3.10) – (4.3.12) при заданном I рассматривается относительно s , p , θ и ϕ . Данную систему с учетом (4.3.9) можно привести к следующей эквивалентной форме

$$\frac{\partial s\phi}{\partial t} = \nabla \cdot (a\nabla s + b\vec{v} + \vec{F}) + \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (4.3.13)$$

$$-\nabla \cdot \vec{v} = \left(1 - \frac{\rho_3^0}{\rho_1^0}\right) \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (4.3.14)$$

$$\rho_3^0 \frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} = -I, \quad (4.3.15)$$

$$-\vec{v} = K\nabla p + \vec{f}, \quad (4.3.16)$$

$$Q(s, \theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda_c \nabla \theta) - \vec{V} \nabla \theta - \nu I, \quad (4.3.17)$$

где $Q = c_1 \rho_1^0 s \phi + c_2 \rho_2^0 (1-s) \phi + \rho_3^0 c_3 (1-\phi)$, $\vec{V} = c_1 \rho_1^0 \vec{v}_1 + c_2 \rho_2^0 \vec{v}_2$.

Особенностью рассматриваемой задачи является возможное вырождение на решение уравнения (4.3.13) при $s = 0$ и $s = 1$. Кроме того, пористость и насыщенность должны удовлетворять условиям $0 \leq \phi \leq 1$, $0 \leq s \leq 1$.

4.4 Алгоритм численного решения одномерной задачи

В одномерном случае система уравнений (4.3.13)–(4.3.17) примет вид

$$\phi \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} (a(s, \phi) \frac{\partial s}{\partial y} + bv + F) + (1-s) \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (4.4.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (K \frac{\partial p}{\partial y} + f) = \left(1 - \frac{\rho_3^0}{\rho_1^0}\right) \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (4.4.2)$$

$$\rho_3^0 \frac{\partial(\phi)}{\partial t} = I, \quad (4.4.3)$$

$$Q(s, \theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} (\lambda_c \frac{\partial \theta}{\partial y}) - V(v_1, v_2) \frac{\partial \theta}{\partial y} - \nu I. \quad (4.4.4)$$

Для системы (4.4.1) – (4.4.4) в одномерном случае рассматривается следующая начально-краевая задача:

$$\phi(y, 0) = \phi^0(y), \quad s(y, 0) = s^0(y), \quad s(0, t) = s_0(t), \quad \frac{\partial s}{\partial y}(l, t) = 0,$$

$$\theta(y, 0) = \theta^0(y), \quad \theta(0, t) = \theta_0(t), \quad \theta(l, t) = \theta_l(t), \quad (4.4.5)$$

$$p(0, t) = p_0(t), \quad \frac{\partial p}{\partial y}(l, t) = p_l(t), \quad y \in [0, l].$$

Перейдем к безразмерным переменным

$$\tilde{y} = \frac{y}{y_{sc}}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{t_{sc}}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{p_{sc}}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{v_{sc}}, \quad \tilde{\theta} = \frac{\theta}{\theta_{sc}},$$

где $y_{sc} = l$, $p_{sc} = \rho_1^0 g l$, температура θ_{sc} принимается равной температуре плавления льда, $v_{sc} = B\rho_1^0 g / \mu_1$ и характерное время определяется соотношением $t_{sc} = y_{sc} / v_{sc}$. Тогда область изменения y есть единичный отрезок $[0, 1]$, а система уравнений (4.4.1) – (4.4.4) в одномерном случае принимает следующую форму:

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial s}{\partial \tilde{t}} &= \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} (\tilde{a} \frac{\partial s}{\partial \tilde{y}} + b \tilde{v} + \tilde{F}) + (1 - s) \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{t}}, \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} (\tilde{K} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{f}) &= \left(1 - \frac{\rho_3^0}{\rho_1^0} \right) \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{t}}, \\ \tilde{Q} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{t}} &= \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} (\tilde{\lambda}_c \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{y}}) - \tilde{V} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{y}} - \chi \tilde{I}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{t}} &= \tilde{I}. \end{aligned}$$

Здесь $\chi = \nu / (c_3 \theta_{sc})$ – безразмерная постоянная, $\tilde{v} = \tilde{v}_1 + \tilde{v}_2$, $\tilde{K} = \tilde{K}_0 \tilde{k}$,

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1 &= -\tilde{K}_0 \bar{k}_{01} \left(\frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial \tilde{y}} - 1 \right), \quad \tilde{v}_2 = -\tilde{K}_0 \frac{\bar{k}_{02}}{\mu} \left(\frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial \tilde{y}} - \frac{\rho_2^0}{\rho_1^0} \right), \quad b(s) = \frac{\bar{k}_{02}}{\mu \bar{k}_{01} + \bar{k}_{02}}, \quad \mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \\ \tilde{a}(s, \phi) &= -\tilde{K}_0 \frac{\bar{k}_{01} \bar{k}_{02}}{\mu \bar{k}_{01} + \bar{k}_{02}} \frac{\partial \tilde{p}_c}{\partial s}, \quad \tilde{F} = \tilde{K}_0 \frac{\bar{k}_{01} \bar{k}_{02} (\frac{\rho_2^0}{\rho_1^0} - 1)}{\mu \bar{k}_{01} + \bar{k}_{02}}, \quad \tilde{K}_0 = \frac{B \rho_1^0 g}{v_{sc} \mu_1} \frac{\phi^3}{(1 - \phi)^2}, \\ \tilde{f} &= -\tilde{K}_0 (\bar{k}_{01} + \frac{\rho_2^0}{\rho_1^0 \mu} \bar{k}_{02}), \quad \tilde{Q} = \frac{\rho_1^0 c_1}{\rho_3^0 c_3} s \phi + \frac{c_2 \rho_2^0}{c_3 \rho_3^0} (1 - s) \phi + 1 - \phi, \quad \tilde{k} = \bar{k}_{01} + \frac{\bar{k}_{02}}{\mu}, \\ \tilde{\lambda}_c &= \frac{a_c t_{sc}}{y_{sc}^2 \rho_3^0 c_3} \left(1 + \frac{b_c}{a_c} \rho_c^2 \right), \quad \tilde{V} = \frac{\rho_1^0 c_1}{\rho_3^0 c_3} \tilde{v}_1 + \frac{\rho_2^0 c_2}{\rho_3^0 c_3} \tilde{v}_2, \quad \tilde{I} = \frac{t_{sc}}{\rho_3^0} I. \end{aligned}$$

Опуская волны, получим

$$\phi \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} (a(s, \phi) \frac{\partial s}{\partial y} + b(s) v + F(s, \phi)) + (1 - s) \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (4.4.6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (K(s, \phi) \frac{\partial p}{\partial y} + f(s, \phi)) = \left(1 - \frac{\rho_3^0}{\rho_1^0} \right) \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (4.4.7)$$

$$Q(s, \theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} (\lambda_c \frac{\partial \theta}{\partial y}) - V(v_1, v_2) \frac{\partial \theta}{\partial y} - \chi I, \quad (4.4.8)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = I. \quad (4.4.9)$$

Следует отметить, что v является искомой функцией и определяется из равенства (4.3.16) в ходе решения задачи.

Введем сетку с распределенными узлами $y_i = ih$, $t_n = n\tau$; $i = 0, \dots, N$, $n = 0, \dots, T$, h - шаг по пространственной координате, τ - шаг по времени.

При аппроксимации уравнений (4.4.6) и (4.4.8) используется направленная разность для конвективных слагаемых. Уравнение (4.4.7) аппроксимируется неявной схемой второго порядка точности. В результате получаем систему разностных уравнений:

$$\begin{aligned} \phi_i^n \frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{\tau} = & a_{i+1/2}^n \frac{s_{i+1}^{n+1} - s_i^{n+1}}{h^2} - a_{i-1/2}^n \frac{s_i^{n+1} - s_{i-1}^{n+1}}{h^2} + (1 - s_i^n + b(s_i^n) - b(s_i^n) \frac{\rho_3^0}{\rho_1^0}) I_i^n + \\ & + \frac{(|G_i^n| + G_i^n) s_{i+1}^{n+1} - 2|G_i^n| s_i^{n+1} + (|G_i^n| - G_i^n) s_{i-1}^{n+1}}{2h} + F_{\phi_i}^n \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2h}, \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

$$\begin{aligned} K_{i+1/2}^n \frac{p_{i+1}^n - p_i^n}{h^2} - K_{i-1/2}^n \frac{p_i^n - p_{i-1}^n}{h^2} + f_{si}^n \frac{s_{i+1}^n - s_{i-1}^n}{2h} + \\ + f_{\phi_i}^n \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2h} = \left(1 - \frac{\rho_3^0}{\rho_1^0}\right) I_i^n, \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

$$\begin{aligned} Q(s_i^n, \phi_i^n) \frac{\theta_i^{n+1} - \theta_i^n}{\tau} = & \frac{1}{h^2} (\lambda_{ci+1/2}^n (\theta_{i+1}^{n+1} - \theta_i^{n+1}) - \lambda_{ci-1/2}^n (\theta_i^{n+1} - \theta_{i-1}^{n+1})) - \\ & - \frac{(|V_i^n| + V_i^n) \theta_{i+1}^{n+1} - 2|V_i^n| \theta_i^{n+1} + (|V_i^n| - V_i^n) \theta_{i-1}^{n+1}}{2h} - \chi I_i^n. \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

Уравнение (4.4.9) аппроксимируется неявной схемой Рунге-Кутты второго порядка точности. Причем найденное на первом этапе значение $\tilde{\phi}_i^{n+1}$

$$\tilde{\phi}_i^{n+1} = \phi_i^n + \tau I_i^n, \quad (4.4.13)$$

затем уточняется следующим образом:

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n + \tau \frac{I(\phi_i^n, s_i^n) + I(\tilde{\phi}_i^n, s_i^n)}{2}. \quad (4.4.14)$$

Здесь $i = 1, \dots, N - 1$, $\tau = 0, \dots, T - 1$,

$$a_{i-1/2}^n = \frac{2a(s_{i-1}^n, \phi_{i-1}^n)a(s_i^n, \phi_i^n)}{a(s_{i-1}^n, \phi_{i-1}^n) + a(s_i^n, \phi_i^n)}, \quad a_{i+1/2}^n = \frac{2a(s_{i+1}^n, \phi_{i+1}^n)a(s_i^n, \phi_i^n)}{a(s_{i+1}^n, \phi_{i+1}^n) + a(s_i^n, \phi_i^n)},$$

$$F_{si}^n = \frac{\partial F}{\partial s}(s_i^n, \phi_i^n), \quad F_{\phi i}^n = \frac{\partial F}{\partial \phi}(s_i^n, \phi_i^n), \quad f_{si}^n = \frac{\partial f}{\partial s}(s_i^n, \phi_i^n), \quad f_{\phi i}^n = \frac{\partial f}{\partial \phi}(s_i^n, \phi_i^n),$$

$$G_i^n = \frac{\partial F}{\partial s}(s_i^n, \phi_i^n) + v_i^n \frac{\partial b}{\partial s}(s_i^n),$$

$$K_{i-1/2}^n = \frac{2K(\phi_{i-1}^n, s_{i-1}^n)K(\phi_i^n, s_i^n)}{K(\phi_{i-1}^n, s_{i-1}^n) + K(\phi_i^n, s_i^n)}, \quad K_{i+1/2}^n = \frac{2K(\phi_{i+1}^n, s_{i+1}^n)K(\phi_i^n, s_i^n)}{K(\phi_{i+1}^n, s_{i+1}^n) + K(\phi_i^n, s_i^n)},$$

$$\lambda_{ci-\frac{1}{2}}^n = \frac{2\lambda_c(\phi_{i-1}^n, s_{i-1}^n)\lambda_c(\phi_i^n, s_i^n)}{\lambda_c(\phi_{i-1}^n, s_{i-1}^n) + \lambda_c(\phi_i^n, s_i^n)}, \quad \lambda_{ci+\frac{1}{2}}^n = \frac{2\lambda_c(\phi_{i+1}^n, s_{i+1}^n)\lambda_c(\phi_i^n, s_i^n)}{\lambda_c(\phi_{i+1}^n, s_{i+1}^n) + \lambda_c(\phi_i^n, s_i^n)}.$$

Алгоритм численного решения начально-краевой задачи следующий: используя начальное значение пористости ϕ_i^0 , температуры θ_i^0 и концентрации s_i^0 , находим начальное распределение приведенного давления p_i^0 ($i = 0, \dots, N$) из уравнения (4.4.11). Используя найденное давление, определяем скорость фильтрации v_i^0 . Из равенства (4.4.12) находим температуру θ_i^1 на следующем шаге по времени. Из равенства (4.4.13) находим пористость грунта ϕ_i^1 на следующем шаге по времени. Из уравнения (4.4.10) находим концентрацию воды s_i^1 . Рассчитываем давление на следующем шаге по времени ($n = 1$). Используя найденные значения искомых функций $\tilde{\phi}_i^1, s_i^1, p_i^0, p_i^1, \theta_i^1$, делаем коррекцию значения пористости на первом шаге по времени, используя формулу (4.4.14). Повторяя данный алгоритм для следующих шагов по времени, найдем значения искомых функций на всем временном интервале.

4.5 Одномерная задача тепломассопереноса в тающем снеге

В данной работе для верификации исследуемой математической модели (4.4.1)-(4.4.5) используются результаты экспериментов, представленных в работе [64].

В работе [64] экспериментально исследовалось движение воды в тающем снеге. Снег с разным размером зерен был просеян и упакован в прямоугольные контейнеры, чтобы получить известные характеристики слоев снега. Процесс таяния



Рис. 4.2: Схема экспериментального контейнера [64]

инициировался с помощью четырех инфракрасных ламп (100 Вт), установленных над каждым контейнером (см. Рисунок 4.2). Лампы создавали однородный поток тепла с интенсивностью 150 Вт/м^2 . Стены контейнеров были изолированы панелями из полистирола. В помещении поддерживалась отрицательная температура. Пути потока определялись визуально с помощью краски, а водонасыщенность с помощью датчиков измеряющих влажность установленных внутри контейнеров. Экспериментально показано, что при фильтрации воды в однородном снежном покрове выделяются предпочтительные пути фильтрации и снег становится неоднородным.

Снег двух видов упаковывался в контейнеры слоями. Первый контейнер заполнялся сначала крупнозернистым снегом с плотностью $480 \pm 8 \text{ кг/м}^3$ (толщина слоя 15 см), а затем мелкозернистым с плотностью $540 \pm 8 \text{ кг/м}^3$ (толщина слоя 10 см). Второй контейнер наоборот, сначала заполняли мелкозернистым (толщина слоя 15 см), а потом крупнозернистым снегом (толщина слоя 10 см). Датчики измеряющие влажность (TDR probes) располагались на высоте 17, 14.5 и 5 см от дна контейнеров соответственно. В дальнейшем будем называть эти датчики верхний,

средний и нижний (схема расположения датчиков приведена на Рисунке 4.3). Датчики температуры были только на нижнем уровне (5 см от дна контейнеров).

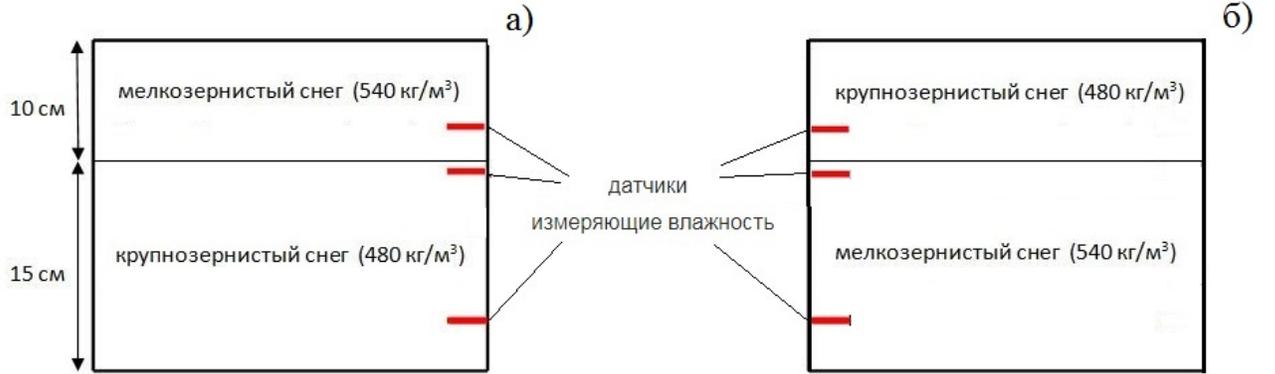


Рис. 4.3: Схема расположения датчиков измеряющих водонасыщенность снега в первом контейнере (а) и во втором контейнере (б).

Следуя работам S. C. Colbeck (см. например [44]) и его последователей [45–47], при численном исследовании начально краевой задачи (4.4.1)-(4.4.5) для капиллярного давления использовался частный случай зависимости (4.2.3) при $m = n = 1$ (в численных расчетах $\gamma = 0.02$ Па [44, с. 374]). Модель тестировалась на простых зависимостях коэффициента проницаемости от пористости $K_0 = b\phi^m$ и $K_0 = B\phi^3/(1 - \phi)^2$. Следует отметить, что формула Козени при $B = 0.001$ м² дала лучшее согласование с экспериментальными данными (значение параметра B было получено при анализе экспериментальных данных из работы [64]). В численных расчетах использовался следующий набор модельных параметров: $g = 9.8$ м/с², $k_{0i} = s_i^2$ если $0 \leq s \leq 1$, $k_{0i} = 0$ если $s_i \leq 0$, $k_{0i} = 1$ если $s_i \geq 1$.

$$\begin{aligned} \rho_1^0 &= 10^3 \text{ кг/м}^3, & \rho_2^0 &= 1.292 \text{ кг/м}^3, & \rho_3^0 &= 916.2 \text{ кг/м}^3, & l &= 0.25 \text{ м}, \\ \mu_1 &= 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг/(м} \cdot \text{с)}, & \mu_2 &= 2 \cdot 10^{-5} \text{ кг/(м} \cdot \text{с)}, & \nu &= 333.8 \text{ Дж/г}, \\ c_1 &= 4.18 \text{ Дж/(г} \cdot \text{K)}, & c_2 &= 0.838 \text{ Дж/(г} \cdot \text{K)}, & c_3 &= 2.06 \text{ Дж/(г} \cdot \text{K)}. \end{aligned}$$

Для интенсивности фазового перехода использовалась зависимость (4.1.4) ($\beta = 1\text{K}^{-1}$, $\lambda_1 = 10^{-3}\text{кг}/(\text{м}^3 \cdot \text{с} \cdot \text{K})$, $\lambda_2 = 3 \cdot 10^{-3}\text{кг}/(\text{м}^3 \cdot \text{с})$, определяются подбором в ходе решения задачи и сопоставления результатов моделирования и экспериментальных данных).

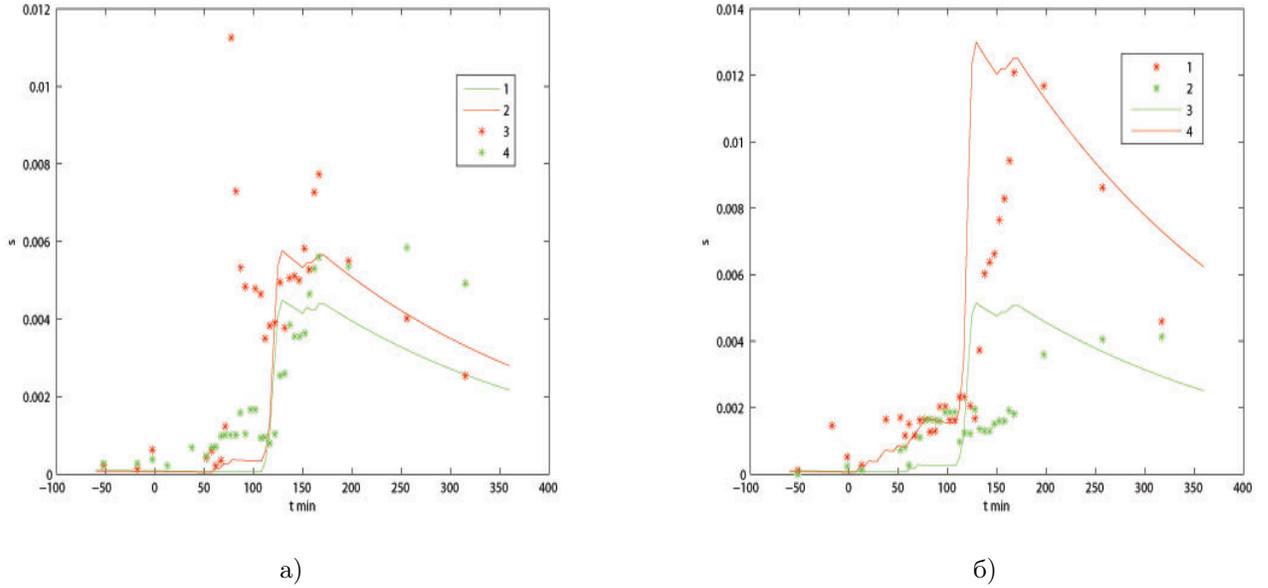


Рис. 4.4: Результаты численного моделирования изменения водонасыщенности s (1-2) и экспериментальные данные для первого эксперимента (3 – измерения верхнего датчика, 4 – измерения среднего датчика) (а) . Результаты численного моделирования изменения водонасыщенности s (3-4) и экспериментальные данные для второго эксперимента (1 – измерения верхнего датчика, 2 – измерения среднего датчика) (б).

За начала отсчета взята поверхность снежного покрова, ось y направлена вниз ($y \in [0, l], l = 0.25$ м). Начальные и граничные условия (4.4.5) задавались в виде $p_2(0, t) = 101$ кПа (атмосферное давление) из (1.1.17)

$$p(0, t) = 101 \text{ кПа} + \int_{s(0,t)}^1 \frac{k_{01}(\xi)}{k(\xi)} \frac{\partial p_c}{\partial \xi} d\xi.$$

Предполагалось что $s(0, t) = 0$, т.е. на границе $y = 0$ нет воды, температура на верхней границе равнялась температуре в холодной комнате (приведена в работе [64]). На другом конце рассматриваемой области $y = l$ задавалось условие непротекания $v_1 = v_2 = 0$, т.е. $\frac{\partial p}{\partial y}(l, t) = -f/K$. С учетом равенства (1.1.18) для концентрации воды принимаем условие $\frac{\partial s}{\partial y}(l, t) = 0$. Температура при $y = l$ задавалась из экспериментальных данных на основе показаний нижнего датчика.

В настоящей работе представлены результаты двух расчетов с различными начальными распределениями пористости. В начальный момент времени для первого эксперимента пористость задавалась кусочно постоянной функцией $\phi(y, 0) = 0.41$, если $y \in [0, 0.1]$ и $\phi(y, 0) = 0.476$, если $y \in (0.1, 0.25]$; для второго экспери-

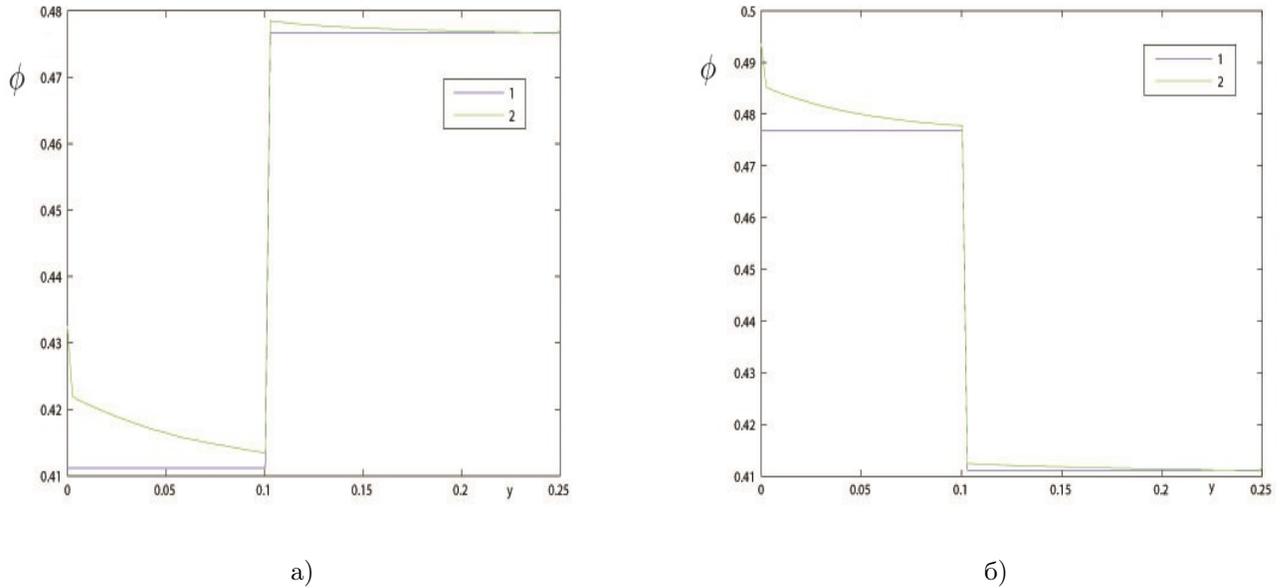


Рис. 4.5: (а) Результаты численного моделирования распределения пористости ϕ по глубине для первого эксперимента 1 – в начальный момент времени, 2 – после завершения эксперимента. (б) Результаты численного моделирования распределения пористости ϕ по глубине для второго эксперимента 1 – в начальный момент времени, 2 – после завершения эксперимента.

мента верхний слой снега с пористостью $\phi(y, 0) = 0.476$, если $y \in [0, 0.1]$, нижний слой $\phi(y, 0) = 0.41$, если $y \in (0.1, 0.25]$, а водонасыщенность s задавалась равной нулю $s(x, 0) = 0$ для обоих экспериментов, так как температура в холодной комнате была ниже нуля градусов до включения ламп.

На Рисунке 4.4б представлены результаты численного моделирования второго эксперимента и измеренные концентрации с верхнего и среднего датчиков. Лампы работали 180 минут. В период нагрева верхний датчик уловил увеличение концентрации воды в снегу. Верхний датчик стоял выше границы раздела двух слоев снега. Так как сверху лежал крупнозернистый слой (пористость больше), то на верхнем участке скорость воды больше и на границе раздела двух слоев формируется насыщенная водой область. Математическая модель хорошо описывает период постепенного таяния снега в верхнем слое (от 50 до 120 мин) и формирование слоя, насыщенного водой. Несовпадение экспериментальных данных и численного моделирования в период от 150 до 250 мин (см. Рисунок 4.4б) может быть связано с неоднородностью снега. Увеличение концентрации воды в период от 150 до 250

мин, зафиксированное нижним датчиком, скорее всего связано с формированием в снеге областей с большей пористостью (предпочтительных путей фильтрации). На верхнем слое данный эффект имеет меньшее влияние, протаивание происходит более равномерно. На Рисунке 4.5б показано изменение пористости снега за время проведения эксперимента.

Результаты моделирования первого эксперимента представлены на Рисунках 4.4а и 4.5а. Как и ожидалось, скачок концентрации воды в верхнем слое в два раза меньше, чем во втором эксперименте, так как нижний слой имел большую пористость.

Незначительное изменение пористости снега на Рисунке 4.5 вызван, по-видимому, коротким временем нагрева (работы ламп накаливания). После выключения ламп фильтрующаяся вода замерзает.

Устойчивость и порядок сходимости вычислительного алгоритма проверялись путем вычислительных экспериментов, применяя известное правило Рунге: достаточно провести три расчета на сетках с шагами $h_1 = h$, $h_2 = h/2$, $h_3 = h/4$, $\tau_i = \kappa h_i$, $\kappa = const$, $i = 1, 2, 3$. Наблюдение ведется за концентрацией воды s , пористостью ϕ , приведенным давлением p , температурой θ и скоростями фильтрации v_1 и v_2 . . Экспериментальный порядок сходимости $R \approx 1$ и приближенно определяемая относительная погрешность $\varepsilon \approx 1\%$ для рассматриваемой задачи.

Замечание. Как правило, при моделирование теплообмена поверхности земли (снежного покрова) [112,120] и водоемов [66,121] с атмосферой на границе раздела поверхности земли и атмосферы (в рассматриваемом случае при $y = 0$) задают граничное условие третьего рода:

$$\lambda_c \frac{\partial \theta}{\partial y} - \alpha_c (\theta - \theta_a) = q. \quad (4.5.1)$$

Здесь α_c – коэффициент теплообмена, θ_a – температура воздуха, q – заданный поток тепла. При численных исследованиях задачи (4.4.1)-(4.4.5) с заданным на верхней границе условием (4.5.1) (при $y = 0$) для коэффициента теплопроводности снега использовалась зависимость (4.2.2), следуя работе [115, с. 22] при отсутствии ветра коэффициент теплообмена принят равным $\alpha_c = 0.2 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$.

На Рисунке 4.6б представлены результаты численного моделирования второго эксперимента и измеренные концентрации с верхнего и среднего датчиков при заданном на верхней границе условии третьего рода (4.5.1). Лампы работали 180 минут. Если провести сравнение с результатами моделирования при заданной температуре на верхней границе ($y = 0$, см. Рисунок 4.4б), то можно заметить отсутствие сильных перепадов водонасыщенности в период от 100 до 160 минут. Но рассчитанные значения водонасыщенности завышены в период от 50 до 250 минут для верхнего датчика.

Получено хорошее согласование рассчитанных значений водонасыщенности и экспериментальных данных со среднего датчика в период таяния снега от 0 до 180 минут для первого эксперимента (см. Рисунок 4.6а).

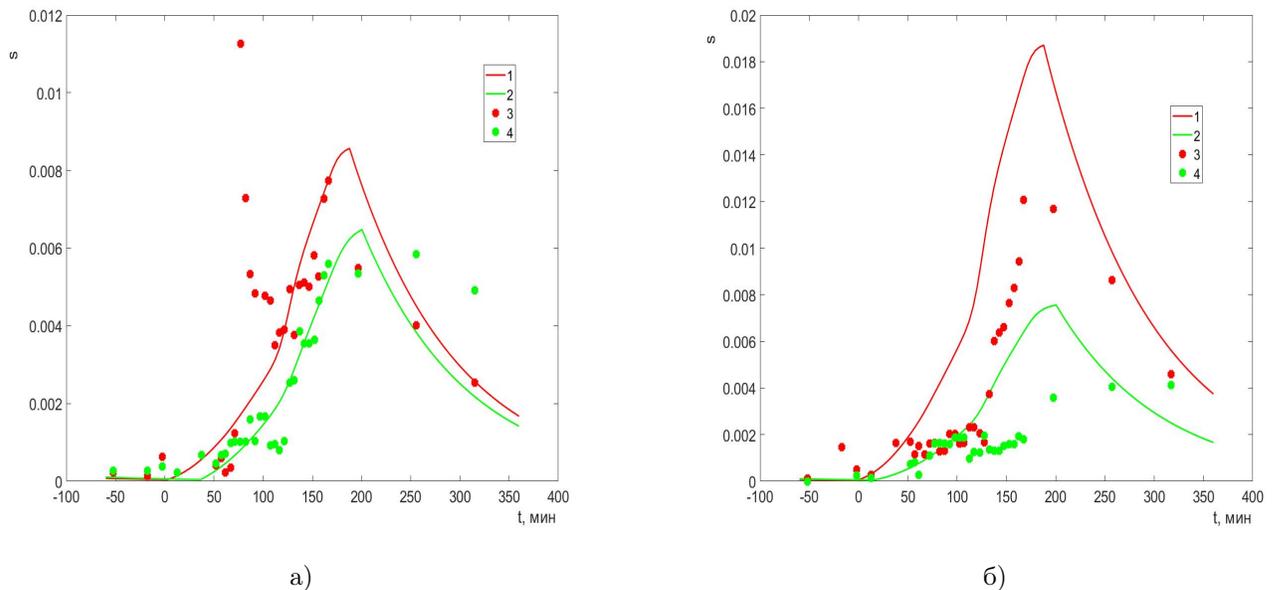


Рис. 4.6: Результаты численного моделирования изменения водонасыщенности s (1-2) и экспериментальные данные для первого эксперимента (3 – измерения верхнего датчика, 4 – измерения среднего датчика) (а). Результаты численного моделирования изменения водонасыщенности s (1-2) и экспериментальные данные для второго эксперимента (3 – измерения верхнего датчика, 4 – измерения среднего датчика) (б).

Заключение

В работе выполнен теоретический анализ ряда моделей двухфазной фильтрации. Для случая переменной искомой пористости выведены модели двухскоростной внутренней суффозии и тепломассопереноса в тающем снеге. Основные результаты, полученные в настоящей работе, можно сформулировать следующим образом:

1. Построена замкнутая математическая модель фильтрации смеси твердых частиц и жидкости в пористых средах с учетом внутренней суффозии, в рамках модели численно решена одномерная задача внутренней суффозии проведено исследование сходимости метода и сравнение изменения эродированной массы и экспериментальных данных из литературных источников для трех грунтов с различной суффозионной устойчивостью.

2. Доказана глобальная теорема существования и единственности классического решения начально-краевой задачи для невырожденных уравнений внутренней эрозии.

3. На основе уравнений двухфазной фильтрации с учетом суффозионных процессов исследована профильная задача внутренней эрозии в межмерзлотном водоносном слое при заданной концентрации подвижных частиц грунта. Определена область, подверженная внутренней эрозии грунта.

4. Построена математическая модель тепломассопереноса в тающем снеге. В рамках полученной модели численно решена одномерная задача фильтрации воды и воздуха в тающем снеге, исследовано изменение пористости и водонасыщенности снега. Используя экспериментальные данные из литературных источников проведена верификация математической модели фильтрации воды и воздуха в тающем снеге, состоящем из двух слоев с разной плотностью.

Литература

- [1] *Dalmo A. N. V., Seth D. M.* Modeling edge effects of tillage erosion // *Soil and Tillage Research*. — 2011. — Vol. 111, No. 2. — P. 197–207.
- [2] *Wilson G.* Understanding soil-pipe flow and its role in ephemeral gully erosion // *Hydrol. Process*. — 2011. — Vol. 25, No. 15. — P. 2354–2364.
- [3] *Xu X., Wilson G. V., Zheng F., Tang Q.* The role of soil pipe and pipeflow in headcut migration processes in loessic soils // *Earth Surf. Process. Landforms*. — 2020. — Vol. 45, No. 11. — P. 1749–1763.
- [4] *Einstein H.A.* Der Geschiebetrieb als wahrscheinlichkeitsproblem. — Mitt. d. Versuchsanstaltf Wasserbau. Zurich: Eidg. T. H., 1936. — P. 112.
- [5] *Черепанов Г. П.* Механика разрушения горных пород в процессе бурения. — Москва: Недра, 1987. — с. 208-212.
- [6] *Kacimov A. R., Yakimov N. D., Simunek J.* Phreatic seepage flow through an earth dam with an impeding strip // *Computational Geosciences*. — 2020. — Vol. 24, No. 1. — P. 17–35.
- [7] *Horikoshi K., Takahashi A.* Suffusion-induced change in spatial distribution of fine fractions in embankment subjected to seepage flow // *Soils and Foundations*. — 2015. — Vol. 55, No. 5. — P. 1293–1304.
- [8] *Vardoulakis I.* Sand production // *Geomechanics in energy production*. — 2006. — Vol. 10, No. 6. — P. 817–828.
- [9] *Wang J., Walters D. A., Settari A., Wan R. G.* Simulation of Cold Heavy Oil Production Using an Integrated Modular Approach with Emphasis on Foamy Oil

- Flow and Sand Production Effects // *1st Heavy Oil Conf. Beijing*. — 2006. — P. 424–433.
- [10] *Тычков С. А., Червов В. В., Черных Г. Г.* О численном моделировании тепловой конвекции в мантии Земли // *Доклады Академии наук*. — 2005. — Т. 402. — № 2. — С. 248–254.
- [11] *Pettet G. J., Please C. P., Tindall M. J., McElwain D. L.* The migration of cells in multicell tumor spheroids // *Bull. Math. Biol.* — 2001. — Vol. 63. — P. 231–257.
- [12] *Шехтман Ю. М.* Фильтрация малоцентрированных суспензий. — Москва: Издательство академии наук СССР, 1961. — с. 91–108.
- [13] *Леонтьев Н. Е., Роцин Е. И.* Точные решения задачи об объемной фильтрации малоцентрированной суспензии // *Вестн. моск. ун-та. сер.1, математика. механика*. — 2020. — № 4. — С. 37–43.
- [14] *Bocharov O. B. Rudyak V. Ya., Seryakov A. V.* Simplest deformation models of a fluid-saturated poroelastic medium // *J. Mining Science*. — 2014. — Vol. 50, No. 2. — P. 235–248.
- [15] *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред. Часть 1. — Москва: Наука, 1987. — 464 с.
- [16] *Нигматулин Р. И.* Механика сплошной среды. Кинематика. Динамика. Термодинамика. Статистическая динамика. — Москва: ГЭОТАР-Медиа, 2014. — 640 с.
- [17] *Rajagopal K. L., Tao L.* Mechanics of mixtures. — L.: World Scientific Publishing, 1995.
- [18] *Николаевский В. Н.* Собрание трудов Геомеханика. Том 1. Разрушение и дилатансия. Нефть и газ. — М.: Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ин-т компьютерных исслед., 2010. — 640 с.
- [19] *Николаевский В. Н.* Геомеханика. Современные главы. — Москва : ИФЗ РАН, 2014. — 483 с.

- [20] *Блохин Л. М., Доровский В. Н.* Проблемы математического моделирования в теории многоскоростного континуума. — Новосибирск: Издательство СО РАН, 1994. — 183 с.
- [21] *Протодьяконов И. О., Чесноков Ю. Г.* Гидромеханика псевдооживленного слоя. — Ленинград: Химия, 1982. — 264 с.
- [22] *Коновалов А.Н.* Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. — Новосибирск: Наука, 1988. — 166 с.
- [23] *Жумагулов Б. Т., Монахов В. Н.* Гидродинамика нефтедобычи. — Алматы: КазгосИНТИ, 2001. — 336 с.
- [24] *Лаевский Ю. М., Попов П. Е., Калинин А. А.* Моделирование фильтрации двухфазной жидкости смешанным методом конечных элементов // *Матем. моделирование.* — 2010. — Т. 22, № 3. — С. 74 – 90.
- [25] *Ляшко А. Д., Карчевский М. М., Павлова М. Ф.* Разностные схемы для задач фильтрации с предельным градиентом. — Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1985. — 121 с.
- [26] *Ляшко А. Д., Карчевский М. М.* Разностные методы решения нелинейных задач теории фильтрации // *Изв. вузов. Матем.* — 1983. — № 7. — С. 28 – 45.
- [27] *Бочаров О.Б. , Телегин И.Г.* Сравнение модели фильтрации несмешивающихся жидкостей с фазовыми подвижностями с моделью Маскста Леверетта // *Теплофизика и Аэромеханика.* — 2004. — Том 11, № 4. — С. 597 – 605.
- [28] *Телегин И. Г.* Численное исследование задач фильтрации несмешивающихся жидкостей: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. Горно-Алтайск. Горно-Алтайский государственный университет, 2005. — 127 с.
- [29] *Истомина В. С.* Фильтрационная устойчивость грунтов. — Москва: Госстройиздат, 1957. — 295 с.

- [30] Рекомендации по методике лабораторных испытаний грунтов на водопроницаемость и суффозионную устойчивость. — Москва: ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева, 1983. — 55 с.
- [31] *Todes O. M., Цитович О. Б.* Аппараты с кипящим зернистым слоем: Гидравлические и тепловые основы работы. — Ленинград: Химия, 1981. — 296 с.
- [32] *Biot M. A.* Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid // *J. Acoustical Society of America*. — 1956. — Vol. 28, No. 2. — P. 179–191.
- [33] *Bonelli S., Marot D.* Micromechanical modeling of internal erosion // *Europ. J. Environmental and Civil Engineering*. — 2011. — Vol. 15, No. 8. — P. 1207–1224.
- [34] *Mercier F., Bonelli S., Golay F., Anselmet F., Philippe P., Borghi R.* Numerical modelling of concentrated leak erosion during Hole Erosion Tests // *Acta Geotechnica*. — 2015. — Vol. 10, No. 3. — P. 319–332.
- [35] *Chetti A., Benamar A., Hazzab A.* Modeling of Particle Migration in Porous Media: Application to Soil Suffusion // *Transport in Porous Media*. — 2016. — Vol. 113, No. 3. — P. 591–606.
- [36] *Vardoulakis I., Papanastasiou P., Stavropoulou M.* Sand Erosion in Axial Flow Conditions // *Transport in Porous Media*. — 2001. — Vol. 45, No. 2. — P. 267–280.
- [37] *Muhlhaus H., Gross L., Scheuermann A.* Sand erosion as an internal boundary value problem // *Acta Geotechnica*. — 2015. — Vol. 10, No. 3. — P. 333–342.
- [38] *Garg S. K., Pritchett J. W.* Dynamics of gasfluidized beds // *J. Appl. Phys.* — 1975. — Vol. 46, No. 10. — P. 4493–4500.
- [39] *Шагапов В. Ш., Хусаинов И. Г., Дмитриев В. Л.* Распространение линейных волн в насыщенных газом пористых средах с учетом межфазного теплообмена // *Прикл. мех. и технич. физ.* — 2004. — Т. 45, № 4. — С. 114–120.
- [40] *Rege S. D., Fogler H. S.* A Network Model for Deep Bed Filtration of Solid Particles and Emulsion Drops // *AIChE J.* — 1988. — Vol. 34, No. 11. — P. 1761–1772.

- [41] *Yang Y., Siqueira F. D., Vaz A. S. L., You Z., Bedrikovetsky P.* Slow migration of detached fine particles over rock surface in porous media // *J. Natural Gas Science and Engineering*. — 2016. — Vol. 34. — P. 1159–1173.
- [42] *Кучмент Л. С.* Формирование речного стока. Физико-математические модели. — Москва: Наука, 1983.
- [43] *Papin A. A., Tokareva M. A.* Problems of heat and mass transfer in the snow-ice cover // *Polar Mechanics 2018. IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science*. — 2018. — Vol. 193. — P. 1–8.
- [44] *Colbeck S. C.* A theory of water percolation in snow // *Journal Glaciol.* — 1972. — Vol. 11, No. 63. — P. 369-385.
- [45] *Gray J. M. N. T.* Water movement in wet snow // *Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. — 1996. — Vol. 354, No. 1707. — P. 465-500.
- [46] *Sellers S.* Theory of water transport in melting snow with a moving surface // *Cold Regions Science and Technology*. — 2000. — Vol. 2000, No. 31. — P. 47-57.
- [47] *Daanen, R. P., Nieber J. L.* Model for coupled liquid water flow and heat transport with phase change in a snowpack // *Journal of Cold Regions Engineering*. — 2009. — Vol. 23, No. 2. — P. 43–68.
- [48] *Папин А. А.* Разрешимость модельной задачи тепломассопереноса в тающем снеге // *Прикладная механика и техническая физика*. — 2008. — Т. 49, № 4. — С. 13-23.
- [49] *Папин А. А.* Краевые задачи двухфазной фильтрации. — Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2009. — 220 с.
- [50] *Калиткин Н. Н.* Численные методы. — Москва: Наука, 1978. — 512 с.
- [51] *Сибин А. Н., Папин А. А.* Тепломассоперенос в тающем снеге // *Прикладная механика и техническая физика*. — 2021. — Т. 62, № 1. — С. 109 – 118.

- [52] Папин А. А., Сибин А. Н. Моделирование движения смеси твердых частиц и жидкости в пористых средах с учетом внутренней суффозии // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*. – 2019. – № 4. – С. 82 – 94.
- [53] Sibin A. Numerical study of a mathematical model of internal erosion of soil // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2017. Vol. 894, No. 1. – 012085.
- [54] Papin A. A., Sibin A. N. Model isothermal internal erosion of soil // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2016. – Vol. 722, No. 1. – 012034.
- [55] Папин А. А., Сибин А. Н., Шишмарев К. А. Модель изотермической внутренней эрозии в деформируемом грунте // *Изв. Алтайского государственного университета*. – 2017. – № 4 (96). – С. 131–135.
- [56] Сибин А. Н., Сибин Н. Н. Численное решение двумерной задачи фильтрации в верхних слоях почвогрунтов с учетом суффозионных процессов // *Изв. Алтайского государственного университета*. – 2017. № 4 (96). – С. 146 – 149.
- [57] Сибин А. Н., Сибин Н. Н. Численное решение одномерной задачи фильтрации с учетом суффозионных процессов // *Изв. Алтайского государственного университета*. – 2017. № 1 (93). – С. 123 – 126.
- [58] Папин А. А., Сибин А. Н. О разрешимости первой краевой задачи для одномерных уравнений внутренней эрозии // *Изв. Алтайского государственного университета*. – 2015. – № 1-2 (85). – С. 136 – 140.
- [59] Папин А. А., Вайгант В. А., Сибин А. Н. Математическая модель изотермической внутренней эрозии // *Изв. Алтайского государственного университета*. – 2015. – № 1-1 (85). – С. 98 – 93.
- [60] Кузиков С. С., Папин А. А., Сибин А. Н. Численное исследование профильной задачи внутренней эрозии в межмерзлотном водоносном слое // *Изв. Алтайского государственного университета*. – 2014. – № 1-2 (81). – С. 41 – 44.
- [61] Папин А. А., Гагарин Л. А., Сибин А. Н., Шепелев В. В., Хворых Д. П. Математическая модель фильтрации грунтовых вод, контактирующих с многолет-

- немерзлыми породами // *Изв. Алтайского государственного университета*. — 2013. — № 1-2 (77). — С. 38 – 41.
- [62] *Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. — Новосибирск: Наука, 1983. — 320 с.
- [63] *Terzaghi K.* Der Grundbruch at Stauwerken und Verhütung // *Wasserkraft*. — 1922. — No. 17. — P. 445 – 449.
- [64] *Waldner P. A., Schneebeli M., Schultze-Zimmermann U., Fluhler H.* Effect of snow structure on water flow and solute transport // *Hydrological processes*. — 2008. — Vol. 18, No. 7. — P. 1271-1290.
- [65] *Нерсесова З. А.* Изменение льдистости грунтов в зависимости от температуры // *ДАН СССР*. — 1950. — Т. 75, № 6. — С. 845-846.
- [66] *Белолитецкий В. М., Генова С. Н., Туговиков В. Б., Шокин Ю.И.* Численное моделирование задач гидроледотермики водотоков. — Новосибирск: СО РАН Институт вычислительных технологий, 1993. — 138 с.
- [67] *Колесников А. Г.* К изменению математической формулировки задачи о промерзании грунта // *Доклады Академии Наук СССР*. — 1952. — Т. 82, № 6. — С. 889–891.
- [68] *Рахматулин Х. А.* Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // *Прикладная математика и механика*. — 1956. — Т. 20, № 2. — С. 184–195.
- [69] *Рахматулин Х. А.* Газовая и волновая динамика. — Москва: МГУ, 1983. — 196 с.
- [70] *Файзуллаев Д. Ф., Умаров А. И., Шакиров А. А.* Гидродинамика одно- и двухфазных сред и ее практическое приложение. — Ташкент: Фан, 1980. — 165 с.
- [71] *Steward H. B., Wendroff B.* Two-phase flows: models and methods // *J. Comp. Phys*. — 1984. — Vol. 56, No. 3. — P. 363–409.

- [72] *Полубаринова–Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. — Москва: Наука, 1977. — 664 с.
- [73] *Коллинз Р.* Течения жидкостей через пористые материалы. — Москва: Мир, 1964. — 350 с.
- [74] *Полубаринова–Кочина П. Я.* Гидродинамика и теория фильтрации: избранные труды. — Москва: Наука, 1991. — 351 с.
- [75] *Muskat M.* The flow of homogeneous fluids through porous media. — McGraw-HILL BOOK Company, 1937. — 763 p.
- [76] *Бэр Я.* Физико–математические основы фильтрации воды. — Москва: Мир, 1971. — 452 с.
- [77] *Гельперин Н. И., Айнштейн В. Г., Кваша В. Б.* Основы техники псевдооживления. — Москва: Химия, 1967. — 177 с.
- [78] *Ведерников В. В., Николаевский В. Н.* Уравнение механики пористых сред, насыщенных двухфазной жидкостью // *Изв. АН СССР. МЖГ.* — 1978. — Т. 5.— С. 165–169.
- [79] *Замарин Е. А.* Движение грунтовых вод под гидротехническими сооружениями. — Ташкент: НИХИ, 1931. —110 с.
- [80] *Полубаринова–Кочина П. Я.* Развитие исследований по теории фильтрации в СССР. — Москва: Наука, 1969. — 548 с.
- [81] *Vardoulakis I., Stavropoulou M., Papanastasiou P.* Hydro-Mechanical Aspects of the Sand Production Problem // *Transport in Porous Media.* — 1996. — Vol. 22, No. 2. — P. 225–244.
- [82] *Bonelli S.* Erosion of Geomaterials. — London: Wiley, 2012. — 384 p.
- [83] *Остапенко В. В.* Разностная схема повышенного порядка сходимости на нестационарной ударной волне // *Сиб. журн. вычисл. матем.* — 1999. Т 2, № 1. — С. 47–56

- [84] *Garde R. J., Ranga Raju K. G.* Mechanics of Sediment Transportation and Alluvial Stream Problems. — New York: John Wiley and Sons Inc, 1977. — 484 p.
- [85] *Lehning M. et al.* A physical SNOWPACK model for the Swiss avalanche warning: Part II. Snow microstructure // *Cold Regions Science and Technology*. — 2002. — Vol. 35, No. 3. — P. 147–167.
- [86] *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралъцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — Москва: Наука, 1967.
- [87] *Кружков С. Н., Сукорянский С. М.* Краевые задачи для систем уравнений типа двухфазной фильтрации; постановка задач, вопросы разрешимости, обоснование приближенных методов // *Матем. сб.* — 1977. — Т. 104, № 1. — С. 69–88.
- [88] *Гагарин Л.А.* Динамика термосуффозионных процессов в криолитозоне (на примере Центральной Якутии): Автореферат дисс. на соиск. уч. ст. канд. геол.-мин. наук. Я.: Изд-во ИМЗ СО РАН, 2013. — 22 с.
- [89] *Шепелёв В. В.* Надмерзлотные воды криолитозоны. — Новосибирск: Академическое изд-во Гео, 2011.
- [90] *Фельдман Г. М.* Термокарст и вечная мерзлота. — Новосибирск: Наука, 1984.
- [91] *Фельдман Г. М.* Передвижение влаги в талых и промерзающих грунтах. — Новосибирск: Наука, 1988. — 258 с.
- [92] *Васильев В. И., Максимов А. М., Петров Е. Е., Цыпкин Г. Г.* Тепломассоперенос в промерзающих и протаивающих грунтах. — Москва: Наука, 1997.
- [93] *Кузнецов А. Ю., Пославский С. А.* Исследование математической модели механической суффозии // *Вестник Харьковского национального университета. Сер.: Математика, прикладная математика и механика*. — 2009. — № 875. — С. 57-68.
- [94] *Хусаинова З. Л.* Теоретическое исследование процессов термоэрозии и термокарста многолетнемерзлых пород: ... канд. физ.-мат. наук. — Уфа, 2007.

- [95] *Поляков В. Л.* О механической суффозии грунтов под действием цилиндрического стока переменной интенсивности // *Прикладная гидромеханика*. — 2006. — Т. 8, № 4. — С. 43–52.
- [96] *Parron Vera M. A., Yakhlef F., Rubio Cintas M. D., Castillo Lopez O., Dubujet P., Khamlichi A., Bezzazic M.* Analytical solution of coupled soil erosion and consolidation equations by asymptotic expansion approach // *Applied Mathematical Modelling*. — 2014. — Vol. 38, No. 15. — P. 4086–4098.
- [97] *Суриков В. В.* Механика разрушения мерзлых грунтов. — Ленинград: Стройиздат, 1979.
- [98] *Борисов А. А.* Механика горных пород и массивов. — Москва: Недра, 1980. — 360 с.
- [99] СНиП 3.02.01-87. Земляные сооружения, основания и фундаменты: — Москва: 2017. — 184 с.
- [100] *Варченко А. Н., Зазовский А. Ф.* Трехфазная фильтрация несмешивающихся жидкостей // *Итоги науки и техники. Сер.: Комплексные и специальные разделы механики*. — 1991. — № 4. — С. 98–154.
- [101] *Хабиров В. В., Хабиров С. В.* Разработка газогидратов современными технологиями // *Труды Института механики УНЦ РАН*. — 2010. — Т. 7. — С. 202-210.
- [102] *Цыпкин Г. Г.* Математическая модель диссоциации газовых гидратов, сосуществующих с газом в пластах // *Доклады РАН*. — 2001. — Т. 381, № 1. — С. 56–59.
- [103] *Цитович Н. А.* Механика мерзлых грунтов. — Москва: Высшая школа, 1973. — 448 с.
- [104] *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. — Москва: Наука, 1975. — 576 с.

- [105] *Овсянников Л. В.* Введение в механику сплошных сред. — Новосибирск, 1976. — 76 с.
- [106] *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. — Москва: Наука, 1978.
- [107] *Vieira D. A. N., Dabney S. M.* Modeling edge effects of tillage erosion // *Soil Tillage Research*. — 2011. — Vol. 111, No. 2. — P. 197–207.
- [108] *Mundy C. J., Barber D. G., Michel C.* Variability of snow and ice thermal, physical and optical properties pertinent to sea ice algae biomass during spring // *Journal of Marine Systems*. — 2005. — Vol. 58, No. 3. — P. 107–120.
- [109] *Thériault J. M., Stewart R. E., Milbrandt J. A., Yau M. K.* On the simulation of winter precipitation types // *Journal of Geophysical Research*. — 2006. — Vol. 111, No. 3. — P. 1–11.
- [110] *Thorpe A. D., Mason B. J.* The evaporation of spheres and ice crystals // *Br. J. Appl. Phys.* — 1996. — Vol. 17. — P. 541–548.
- [111] *Бондарев Э. А.* Температурный режим нефтяных и газовых скважин. — Новосибирск: Наука, 1974.
- [112] *Красс М. С., Мерзликкин В. Г.* Радиационная теплофизика снега и льда. — Ленинград: Гидрометеиздат, 1990. — 261 с.
- [113] *Bouguer P.* Essai d'Optique, sur la gradation de la lumiere. — Paris: Claude Jombert, 1729.
- [114] *Кучмент Л. С.* Речной сток (генезис, моделирование, предвычисление). — Москва: 2008. — 394 с.
- [115] *Павлов А. В.* Теплофизика ландшафтов. — Новосибирск: Наука, 1979. — 284 с.
- [116] *Чернов Р. А.* Экспериментальное определение эффективной теплопроводности глубинной изморози // *Лёд и Снег*. — 2013. — Т. 53, № 3. — С. 71–77.

- [117] *Кутателадзе С. С.* Справочник по теплопередаче. — Москва: Гос. энергетическое издательство, 1958. — 334 с.
- [118] *van Genuchten T. M.* A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils // *Soil Sci. Soc. Am. J.* — 1980. — Vol. 44, No. 5. — P. 892–898.
- [119] *Shimizu H.* Air permeability of deposited snow. — Sapporo, Japan: Institute of Low Temperature Science, 1969.
- [120] *Будыко М. И.* Тепловой баланс земной поверхности. — Ленинград: Гидрометеоиздат, 1956. — 255 с.
- [121] *Бекежанова В. Б.* Устойчивость неизотермических жидкостей в различных моделях конвекции: дис. ... д-р физ.-мат. наук: 01.02.05. Красноярск. Ин-т вычислительного моделирования СО РАН, 2015. — 268 с.