ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

О краевых задачах для уравнений смешанно-параболического типа

Р.М. Кумышев

КБГУ им. Х.М. Бербекова, г. Нальчик

Более полувека тому назад вышел ряд статей французского математика Марио Жевре, в которых содержатся первые фундаментальные исследования по линейный уравнениям с частными производными второго порядка смешанно-параболического типа.

Благодаря своей прикладной важности проблема уравнений смешанно-параболического типа является в настоящее время одним из важнейших разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Модельными уравнениями смешанно-параболического типа являются уравнения вида:

$$u_{xx} - \operatorname{sgn} x \cdot u_y = f(x,y) \qquad (1)$$

$$u_{xx} - \operatorname{sgn} y \cdot u_y = f(x,y) \qquad (2)$$

которые являются прямыми параболическими уравнениями в полуплоскостях $x > 0$ и $y > 0$, и обратными параболическими при $x<0$ и $y < 0$.

Огромный вклад в исследовании данных уравнений внес в своих работах мой научный руководитель А.А. Керефов.

В данной работе рассматриваются две две краевые задачи,которые редуцируются к исследованию интегральных уравнений.

В области $D = \{(x,t): -l < x < l,\, 0 < t < T\}$ рассмотрим смешаннопараболическое уравнение

$$u_{xx} = \operatorname{sgn} x \cdot u_t \qquad (3)$$

Задача 1. Найти регулярное в $D \setminus \{x = 0\}$ решение $u(x,t)$ уравнения (3) из класса $C(\overline{D}) \cap C^1(D)$ и удовлетворяющее граничным условиям

$$u(-l,t) = \varphi_{-l}(t),\ u(l,t) = \varphi_l(t),\ 0 \le t \le T\ , \qquad (4)$$

и нелокальным начальным условиям

$$u(x,0)=\int_0^x \alpha(\xi)u(\xi,T)d\xi\ ,\ 0<x<l\,; \tag{5}$$

$$u(x,T)=\int_0^x \beta(\xi)u(\xi,0)d\xi,\ -l<x<0\,, \tag{6}$$

где $\varphi_{-l}(t)$, $\varphi_l(t)\in C[0,T]$, $\alpha(x)\in C[0,l]$;
$\beta(x)\in C[-l,0]$, причём $0<\alpha(x)<1\ \ \forall x\in[0,l]$;
$0<\beta(x)<1\ \ \forall x\in[-l,0]$.

Задача 2. Найти регулярное в $D\setminus\{x=0\}$ решение $u(x,t)$ уравнения (3) из класса $C(\bar{D})\cap C^1(D)$ и удовлетворяющее граничным условиям

$$u(-l,t)=\varphi_{-l}(t)\,; \tag{7}$$

$$\alpha_1 u_x(0,t)+\alpha_2 u_x(l,t)=\beta_l(t),\ 0\le t\le T\ , \tag{8}$$

и нелокальным начальным условиям

$$u(x,0)=\varphi_0(x)\ ,\ 0<x<l\,; \tag{9}$$

$$u(x,T)=\varphi_T(x)\ \ -l<x<0\,, \tag{10}$$

где $\varphi_{-l}(t)$, $\beta_l(t)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_T(x)$ – заданные, достаточно гладкие функции.

Используя функцию Грина смешанной краевой задачи и некоторые элементарные преобразования вопрос существования решения данных задач эквивалентно редуцирован к вопросу существования решения системы интегральных уравнений. Для доказательства единственности поставленных задач использован принцип экстремума для параболических уравнений.

Асимптотическая N-устойчивость множества M

В.А. Миненко
БГПУ, г. Барнаул

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i\ \ (t,\ x_1,\ \ldots,x_n)\ \ (i=1,\ldots,n) \tag{1}$$

или в векторном виде