МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
АЛТАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

И. В. Пономарев

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Учебно-методическое пособие

Барнаул
2021

Об издании 1, 2

Сведения об издании

УДК 517+512
ББК 22.161.6+22.143
П 56

Рецензент:
доктор физ.-мат. наук, профессор **Е. Д. Родионов** (АлтГУ)

П 56 **Пономарев, И.В.** Индивидуальные задания по математике : учебно-методическое пособие / И.В. Пономарев ; АлтГУ. – Барнаул : АлтГУ, 2021. – 1 CD-R (2,2 Мб). – Систем. требования: Intel Pentium, 1,6 GHz и более; 512 Мб (RAM) ; Microsoft Windows 7 и выше; Adobe Reader. – Загл. с титул. экрана. – Текст: электронный.

Учебное электронное издание

Пособие содержит материалы по линейной алгебре, аналитической геометрии на плоскости, математическому анализу (теория пределов, непрерывность и дифференцируемость функций одной переменной). Каждая тема сопровождается теоретическими сведениями, снабжена рядом типовых примеров с решениями и задачами для самостоятельной работы. Издание предназначено для студентов 1 курса бакалавриата по направлению 09.03.03 Прикладная информатика, а также может быть полезно студентам других специальностей, изучающим курс высшей математики.

производственно-технические сведения

Публикуется в авторской редакции

Верстка: И. В. Пономарев

Дата подписания к использованию: 01.07.2021

Объем издания: 2,2 Мб

Комплектация издания: 1 электрон. опт. диск (CD-R)

Тираж 15 дисков
ФГБОУ ВО “Алтайский государственный университет”
656049, Барнаул, ул. Ленина, 61

Оглавление

Тема 1
Элементы линейной алгебры

1.1. Матрицы и операции над ними

Определение 1.1. *Матрицей A размерности $n \times m$ называется прямоугольная таблица чисел a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, m)$, состоящая из n строк и m столбцов*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ij}), \quad i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, m}.$$

Будем обозначать матрицы большими прописными буквами A, B, C и т.д.

Числа a_{ij}, составляющие матрицу A, называются элементами матрицы. Первый индекс i указывает номер строки, второй j – номер столбца, на пересечении которых расположен элемент a_{ij}.

Матрица размерности $1 \times m$ называется матрицей-строкой.

Матрица размерности $m \times 1$ называется матрицей-столбцом.

Матрица размерности $n \times n$, у которой число строк равно числу столбцов, называется квадратной матрицей порядка n. Для квадратной матрицы вводятся понятия главной и побочной диагонали. Главной диагональю называется диагональ $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$, соединяющая левый верхний угол матрицы с правым нижним. Побочной диагональю называется диагональ $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \ldots, a_{n1}$, соединяющая правый верхний и левый нижний углы данной матрицы.

Пример 1.1.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- матрица A размерности 2×4.

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- матрица-строка B размерности 1×3.

$$C = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- матрица-столбец C размерности 4×1.

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

- квадратная матрица D размерности 3. $3, 0, 2$ – главная диагональ; $-2, 0, 1$ – побочная диагональ.

Единичной матрицей называется квадратная матрица, у которой на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю. Нулевой матрицей называется матрица, состоящая из одних нулей.

Матрицы A и B называются равными, если они одинаковой размерности и их соответствующие элементы совпадают, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$.

Матрица A^T называется транспонированной к матрице A, если строками матрицы A^T являются столбцы матрицы A.

Определение 1.2. *Суммой матриц A и B размерности $n \times m$ называется матрица $C = A + B$ размерности $n \times m$, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B:*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, m}.$$

Произведением матрицы A на число α называется матрица $D = \alpha A$, полученная из матрицы A умножением всех ее элементов на число α:

$$d_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}, \quad i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, m}.$$

Пример 1.2. *Даны матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 5 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -11 \\ -11 & 20 \end{pmatrix}$$

Найти $3A - 2B$

$$3A - 2B = 3\begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 5 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -11 \\ -11 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 30 \\ 15 & 9 \\ 15 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -22 \\ -22 & 40 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3-6 & 30-4 \\ 15-(-2) & 9-(-22) \\ 15-(-22) & -6-40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 26 \\ 17 & 31 \\ 37 & -46 \end{pmatrix}.$$

Определение 1.3. *Произведением матрицы A размерности $n \times m$ на матрицу B размерности $m \times p$ называется матрица $C = A \cdot B$ размерности $n \times p$, каждый элемент которой c_{ij}, стоящий в i-й строке и j-м столбце, равен сумме попарных произведений соответствующих элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B:*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot b_{kj}, \quad i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, m}.$$

Пример 1.3. *Даны матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Найти $A \cdot B$ и $B \cdot A$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \cdot (-1) + (-5) \cdot (-2) + 8 \cdot 3 & 4 \cdot 5 + (-5) \cdot (-3) + 8 \cdot 4 \\ 1 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 & 1 \cdot 5 + 3 \cdot (-3) + (-1) \cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 30 & 67 \\ -10 & -8 \end{pmatrix}.$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-1) \cdot 4 + 5 \cdot 1 & (-1) \cdot (-5) + 5 \cdot 3 & (-1) \cdot 8 + 5 \cdot (-1) \\ (-2) \cdot 4 + (-3) \cdot 1 & (-2) \cdot (-5) + (-3) \cdot 3 & (-2) \cdot 8 + (-3) \cdot (-1) \\ 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot (-5) + 4 \cdot 3 & 3 \cdot 8 + 4 \cdot (-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 20 & -13 \\ -11 & 1 & -13 \\ 16 & -3 & 20 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Свойства операций над матрицами

1. $A + B = B + A$ – коммутативность сложения;
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ – ассоциативность сложения;
3. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ – сочетательное свойство;
4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ – распределительное свойство относительно сложения чисел;

5. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$ – распределительное свойство относительно сложения матриц;
6. $(AB)C = A(BC)$ – ассоциативность умножения;
7. $(A+B)C = AC + BC$ – распределительное свойство.

1.2. Определители матриц

Пусть даны n элементов $a_1, a_2, \dots, a_n$. Перестановкой этих элементов называется любое их расположение в определенном порядке. Всего из n элементов можно составить $n! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$ перестановок. Перестановку будем в дальнейшем обозначать одной буквой τ. Тогда $\tau(k)$ будет означать k-й элемент перестановки. Если какая-нибудь пара (a_i, a_j) элементов перестановки расположена в ней так, что элемент с большим номером стоит раньше элемента с меньшим номером, то говорят, что эти элементы образуют инверсию. Перестановки с четным числом инверсий называются четными, а перестановки с нечетным числом инверсий – нечетными перестановками. Например, перестановка $\tau = (4,1,3,2)$ является четной, т.к. она имеет четыре инверсии: $(4,1)$, $(4,3)$, $(4,2)$, $(3,2)$.

Определение 1.4. *Определителем квадратной матрицы A n-го порядка называется число*

$$\Delta = det\, A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\tau} (-1)^{S(\tau)} a_{1\tau(1)} \cdot a_{2\tau(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\tau(n)},$$

где $S(\tau)$ – число инверсий перестановки τ, а сумма берется по всем перестановкам τ из n элементов.

В этой сумме $n!$ слагаемых, каждое из которых является, с точностью до знака, произведением n элементов матрицы A. Причем в каждое произведение входит ровно по одному элементу из каждой строки и из каждого столбца. Каждое из этих произведений входит в указанную сумму со знаком, определяемым числом инверсий перестановки, составленной из вторых индексов (номеров столбцов) при условии, что первые индексы (номера строк) записаны в порядке возрастания $(1,2,3,\dots,n)$.

Выведем формулы для вычисления определителей второго и третьего порядков.

Рассмотрим квадратную матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ второго порядка. Выпишем все перестановки элементов $(1,2)$. Их всего две: $(1,2)$, $(2,1)$. В первая четная (0 инверсий), вторая нечетная (1 инверсия). По определению:

$$\Delta = det\,A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^0 a_{11}a_{22} + (-1)^1 a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Рассмотрим квадратную матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ третьего порядка. Выпишем все перестановки элементов $(1,2,3)$ и число инверсий в них: $(1,2,3)$ - 0 инверсий, $(2,3,1)$ - 2 инверсии, $(3,1,2)$ - 2 инверсии, $(3,2,1)$ - 3 инверсии, $(2,1,3)$ - 1 инверсия, $(1,3,2)$ - 1 инверсия. По определению:

$$\Delta = det\,A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Эту формулу можно сформулировать как правило треугольников. Одно из трех слагаемых, входящих в сумму со знаком плюс, есть произведение элементов главной диагонали матрицы A, каждое из двух других – произведение элементов, лежащих на параллели к этой диагонали, и элемента из противоположного угла матрицы, а слагаемые, входящие в формулу со знаком минус, строятся таким же образом, но относительно побочной диагонали.

Рис. 1. Правило треугольника

Также для вычисления определителя третьего порядка используют правило Саррюса.

Первые два столбца матрицы записываются справа возле матрицы. Произведения элементов, стоящих на линиях с пометкой «плюс», складываются, затем из результата вычитаются произведения элементов, находящихся на линиях с пометкой «минус».

Пример 1.4.

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-2) \cdot 1 = 15 + 2 = 17.$$

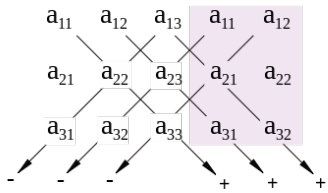


Рис. 2. Правило Саррюса

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 4\cdot(-1)\cdot 7+7\cdot 5\cdot 5+(-2)\cdot 3\cdot 0-(-2)\cdot(-1)\cdot 5-4\cdot 5\cdot 0-7\cdot 3\cdot 7 =$$

$$= -28 + 175 + 0 - 10 - 0 - 147 = -10.$$

Определение 1.5. *Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя матрицы A называется определитель $(n-1)$ порядка, полученный из определителя $\det A$ вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}.*

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} матрицы A n-го порядка называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Пример 1.5. *Найти миноры и алгебраические дополнения элементов a_{11}, a_{23}, a_{31} матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Вычислим миноры:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -7;$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 28 - 35 = -7;$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 35 - 2 = 33.$$

Вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = -7;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = 7;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = 33.$$

Теорема 1.1. *Для любой строки i и любого столбца j квадратной матрицы A порядка n справедливы формулы:*

$$det\, A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \cdot a_{ik} \cdot M_{ik}$$

- формула разложения определителя по i-ой строке;

$$det\, A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \cdot A_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} \cdot a_{kj} \cdot M_{kj}$$

- формула разложения определителя по j-му столбцу.

Этими формулами пользуются для вычисления определителей порядка больше трех.

Пример 1.6. *Вычислить определитель*

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Удобнее раскладывать определитель по строке или столбцу содержащим большее количество нулей. В нашем случае это строка 4 и столбец 2. Разложим определитель по 4 строке. По теореме:

$$\Delta = (-1)^{4+1} \cdot a_{41} \cdot M_{41} + (-1)^{4+2} \cdot a_{42} \cdot M_{42} + (-1)^{4+3} \cdot a_{43} \cdot M_{43} + (-1)^{4+4} \cdot a_{44} \cdot M_{44} =$$

$$= -5 \cdot M_{41} + 0 \cdot M_{42} - 0 \cdot M_{43} + 4 \cdot M_{44}$$

Вычисление миноров M_{42}, M_{43} не имеет смысла, так как умножение на 0 любого действительного числа дает 0. Вычислим миноры M_{41}, M_{44}:

$$M_{41} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Разложим его по третьему столбцу:

$$M_{41} = (-1)^{1+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{3+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1 + 6) = 10.$$

$$M_{44} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Разложим его по второй строке:

$$M_{44} = (-1)^{2+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 4 \cdot (1-2) - (3-1) = -6.$$

Следовательно, можем вычислять Δ:

$$\Delta = -5 \cdot 10 + 4 \cdot (-6) = -74.$$

Свойства определителей

1. Определитель матрицы A равен определителю транспонированной матрицы A^T (это свойство означает равноправность строк и столбцов).
2. Если две строки (столбца) определителя поменять местами, то определитель изменит знак.
3. Если две строки (столбца) матрицы пропорциональны или равны, то определитель равен нулю.
4. Если какую-либо строку (столбец) определителя умножить на произвольное число, то и весь определитель умножится на это число (т.е. общий множитель строки (столбца) можно выносить за знак определителя), например,

$$det\, A = \begin{vmatrix} a_{11} & k \cdot a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & k \cdot a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & k \cdot a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ k \cdot a_{31} & k \cdot a_{32} & k \cdot a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

5. Если все элементы некоторой строки (столбца) равны нулю, то определитель равен нулю.
6. Определитель произведения матриц равен произведению их определителей, т. е. $det\, A \cdot B = det\, A \cdot det\, B$.
7. Если к элементам некоторой строки (столбца) определителя прибавить соответствующие элементы какой-либо другой строки (столбца), умноженные на произвольное число, то определитель не изменится. Например,

$$det\, A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + k \cdot a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + k \cdot a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + k \cdot a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + k \cdot a_{31} & a_{22} + k \cdot a_{32} & a_{23} + k \cdot a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали, т. е.

$$det\, A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{(n-1)(n-1)} \cdot a_{nn}.$$

Пример 1.7. *Вычислить определитель*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 30 & -10 & 120 & 80 \\ -5 & 3 & -34 & -23 \\ 1 & 1 & 3 & -7 \\ -9 & 2 & 8 & -15 \end{vmatrix}.$$

Вынесем из первой строки общий множитель 10:

$$\Delta = 10 \begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 & 8 \\ -5 & 3 & -34 & -23 \\ 1 & 1 & 3 & -7 \\ -9 & 2 & 8 & -15 \end{vmatrix}.$$

Умножим первую строку на 3, 1, 2 и последовательно прибавим результат ко второй, третьей и четвертой стокам:

$$\Delta = 10 \begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 & 8 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 15 & 1 \\ -3 & 0 & 32 & 1 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по второму столбцу:

$$\Delta = 10 \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 15 & 1 \\ -3 & 32 & 1 \end{vmatrix}.$$

Последовательно вычтем первую строку из остальных:

$$\Delta = 10 \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 13 & 0 \\ -7 & 30 & 0 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по последнему столбцу и вычислим его:

$$\Delta = 10 \begin{vmatrix} 0 & 13 \\ -7 & 30 \end{vmatrix} = 10 \cdot 91 = 910.$$

1.3. Обратная матрица. Ранг матрицы

Определение 1.6. *Матрица A^{-1} называется обратной к квадратной матрице A, если*

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

где E – единичная матрица.

Если $\det A \neq 0$, то матрица A называется невырожденной.

Теорема 1.2. *Если матрица A невырождена, то существует единственная матрица A^{-1} , обратная к данной.*

Пример 1.8. *Доказать, что матрица B является обратной к матрице A*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$$

. Для этого необходимо проверить условие определения.

$$A \cdot B =$$

$$= \begin{pmatrix} 2{\cdot}1+5{\cdot}(-38)+7{\cdot}27 & 2{\cdot}(-1)+5{\cdot}41+7{\cdot}(-29) & 6{\cdot}1+3{\cdot}(-34)+4{\cdot}24 \\ 6{\cdot}1+3{\cdot}(-38)+4{\cdot}27 & 6{\cdot}(-1)+3{\cdot}41+4{\cdot}(-29) & 6{\cdot}1+3{\cdot}(-34)+4{\cdot}24 \\ 5{\cdot}1+(-2){\cdot}(-38)+(-3){\cdot}27 & 5{\cdot}(-1)+(-2){\cdot}41+(-3){\cdot}(-29) & 5{\cdot}1+(-2){\cdot}(-34)+3{\cdot}24 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, определение выполняется.

$$B = A^{-1}$$

или

$$A = B^{-1}$$

Определение 1.7. *Присоединенной матрицей $\tilde{A}$ называется матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов матрицы, транспонированной к матрице A*

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

A_{ij} – *алгебраические дополнения элементов матрицы A.*

Теорема 1.3. *Если матрица A невырождена, то обратная матрица находится по формуле:*

$$A^{-1} = \frac{1}{det\,A}\tilde{A}.$$

Пример 1.9. *Найти обратную матрицу для*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$$

. Вычислим определитель B:

$$det\,B = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{vmatrix} = 984 + 918 + 1102 - 1107 - 912 - 986 = -1 \neq 0$$

- существует единственная обратная матрица.

$$B_{11} = \begin{vmatrix} 41 & -34 \\ -29 & 24 \end{vmatrix} = -2, \quad B_{12} = -\begin{vmatrix} -38 & -34 \\ 27 & 24 \end{vmatrix} = -6, \quad B_{13} = \begin{vmatrix} -38 & 41 \\ 27 & -29 \end{vmatrix} = -5,$$

$$B_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -29 & 24 \end{vmatrix} = -5, \quad B_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 27 & 24 \end{vmatrix} = -3, \quad B_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 27 & -29 \end{vmatrix} = 2,$$

$$B_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 41 & -34 \end{vmatrix} = -7, \quad B_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -38 & -34 \end{vmatrix} = -4, \quad B_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -38 & 41 \end{vmatrix} = 3.$$

По формуле из теоремы 2 получаем:

$$B^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -5 & -7 \\ -6 & -3 & -4 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Элементарными преобразованиями строк (столбцов) матрицы называют:

1. Перестановку местами строк (столбцов) матрицы;
2. Умножение строки (столбца) на любое отличное от нуля число;
3. Прибавление к одной строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на любое число.

Используя элементарные преобразования, можно получить обратную матрицу методом Гаусса - Жордана:

- К матрице A справа приписывается единичная матрица E такого же размера.

- Выбирают первый слева столбец матрицы A, в котором есть хоть одно отличное от нуля значение.
- Если самое верхнее число в этом столбце ноль, то меняют всю первую строку матрицы с другой строкой матрицы, где в этой колонке нет нуля.
- Все элементы первой строки делят на верхний элемент выбранного столбца.
- Из оставшихся строк вычитают первую строку, умноженную на первый элемент соответствующей строки, с целью получить первым элементом каждой строки (кроме первой) ноль.
- Далее проводят такую же процедуру с матрицей, получающейся из исходной матрицы после вычёркивания первой строки и первого столбца.
- После повторения этой процедуры $n-1$ раз получают верхнюю треугольную матрицу.
- Вычитают из предпоследней строки последнюю строку, умноженную на соответствующий коэффициент, с тем, чтобы в предпоследней строке осталась только 1 на главной диагонали.
- Повторяют предыдущий шаг для последующих строк. В итоге на месте матрицы A получают единичную матрицу и обратную матрицу на месте матрицы E.

Пример 1.10. *Пример 3. Найти обратную матрицу для*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$$

методом Гаусса - Жордана.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -38 & 41 & -34 & 0 & 1 & 0 \\ 27 & -29 & 24 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Умножим первую строку на 38 и -27 и сложим соответственно со второй и третьей строками:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 38 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -27 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Разделим вторую строку на 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{38}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -27 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Умножим вторую строку на 2 и сложим с третьей:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{38}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right)$$

Домножим третью строку на -3:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{38}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

Умножим третью строку на $-\frac{4}{3}$ и -1 и сложим соответственно со второй и первой строками:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

Сложим вторую строку с первой:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

Значит, обратная матрица $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

Определение 1.8. *Минором k-го порядка M_k матрицы A называется определитель, составленный из элементов матрицы A, расположенный на пересечении каких-либо k строк и k столбцов.*

Пример 1.11. *Найти все миноры второго порядка матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Так как строк всего две, то рассмотрим всевозможные комбинации столбцов: $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$. Значит для матрицы существует только три минора второго порядка:

- *минор из элементов, стоящих на пересечении 1-й и 2-й строк и 1-го и 2-го столбцов*

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$$

- *минор из элементов, стоящих на пересечении 1-й и 2-й строк и 1-го и 3-го столбцов*

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -6$$

- *минор из элементов, стоящих на пересечении 1-й и 2-й строк и 2-го и 3-го столбцов*

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3$$

Других миноров второго порядка нет, так как перебрали все возможные комбинации двух строк и двух столбцов.

Определение 1.9. *Минор матрицы A, отличный от нуля, максимально возможного порядка называется базисным минором A.*

Строки и столбцы, на пересечении которых расположен базисный минор, называются базисными строками и столбцами.

Порядок r базисного минора матрицы A называется рангом матрицы A. Обозначается: $\operatorname{rang} A$. Ранг нулевой матрицы равен 0.

Метод окаймляющих миноров. Пусть в матрице A найден ненулевой минор k-го порядка M_k. Рассмотрим все миноры $(k+1)$-го порядка, включающие в себя (окаймляющие) минор M_k; если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k. В противном случае среди окаймляющих миноров найдется ненулевой, и вся процедура повторяется.

Пример 1.12. *Найти ранг матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 4 & 3 \\ 3 & -9 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Минор M_1 – это некоторый элемент a_{ij} матрицы A_{ij}. Т.к., например, $a_{11} = 1 \neq 0$, то $\operatorname{rang} A \geq 1$. Буде рассматривать все миноры M_2 содержащие выбранный минор M_1 пока не найдем ненулевой:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6.$$

Значит, $\operatorname{rang} A \geq 2$. Теперь рассмотрим все миноры окаймляющие M_2. Их всего 2:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 3 & 3 & -9 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 45 + 24 - 48 - 9 - 20 = 0.$$

Т.к. других окаймляющих миноров нет, то $rang\, A = 2$.

Метод элементарных преобразований. Если с помощью элементарных преобразований строк (столбцов) привести матрицу к ступенчатому виду, то количество ненулевых строк (столбцов) равно рангу исходной матрицы.

Теорема 1.4. *Элементарные преобразования строк (столбцов) не изменяют ранг матрицы.*

Пример 1.13. *Найдем ранг матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 4 & 3 \\ 3 & -9 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

методом элементарных преобразований. Умножим первую строку на: 2 и вычтем из второй строки; 3 и вычтем из третьей строки.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & -12 & -10 \end{pmatrix}$$

Умножим вторую строку на 2 и вычтем из третьей:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В результате получили ступенчатую форму матрицы у которой две ненулевых строки. $rang\, A = 2$

1.4. Системы линейных уравнений

Определение 1.10. *Система уравнений вида*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

называется системой n *линейных уравнений с* m *неизвестными* $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Переменные удобно записывать в виде столбца

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nm}$ уравнений системы можно записать в виде матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

которая называется главной матрицей системы. Числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$, стоящие в правых частях уравнений, образуют столбец свободных элементов

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Главная матрица системы, дополненная справа столбцом свободных членов, называется расширенной матрицей системы и обозначается

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} & b_n \end{array} \right).$$

Если все свободные элементы b_i $(i = \overline{1, m})$ равны нулю, то система называется однородной, в противном случае неоднородной.

Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной в противном случае. Если совместная система уравнений имеет единственное решение, то она называется определенной, если бесконечное множество решений, то неопределенной.

Теорема 1.5 (Кронекера-Капелли.). *Для того чтобы система линейных уравнений была совместной, необходимо и достаточно, чтобы* $rang\, A = rang\, \overline{A}$.

Следствие.

1. Если $rang\, A = rang\, \overline{A} = m$, где m – число неизвестных системы, то система является определенной.

2. Если $rang\, A = rang\, \overline{A} < m$, то система является неопределенной.

3. Количество базисных переменных системы равно рангу системы.

Определение 1.11. *Переменные, соответствующие базисным столбцам матрицы A совместной системы уравнений, называются базисными, а остальные свободными.*

Пример 1.14. *Является ли система совместной?*

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

Вычислим ранг расширенной матрицы системы. Для этого приведем ее к ступенчатому виду:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & -3 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Поставим четвертый столбец на первое место и четвертую строку на первое место

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 3 & -3 & 4 \\ -2 & 3 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Сложим первую строку со второй и четвертой; умножим первую строку на 2 и сложим с третьей

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 9 & 7 & -5 & 7 \\ 0 & 13 & 7 & -1 & 7 \\ 0 & 8 & 5 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

Поставим третью строку на второе место и умножим ее на -1; поставим четвертый столбец на второе место

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -13 & -7 & -7 \\ 0 & -5 & 9 & 7 & 7 \\ 0 & -2 & 8 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

Умножим вторую строку на 5 и сложим с третьей; умножим вторую строку на 2 и сложим с четвертой

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -13 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & -56 & -28 & -28 \\ 0 & 0 & -18 & -9 & -11 \end{array}\right)$$

Разделим третью строку на -28

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -13 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -18 & -9 & -11 \end{array}\right)$$

Умножим третью строку на 9 и сложим с четвертой

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -13 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Видим, что в главной матрице A *три ненулевые строки, т.е.* $rang\,A = 3$. *А в расширенной матрице - четыре ненулевые строки, т.е. т.е.* $rang\,\overline{A} = 4$. *По теореме Кронекера - Капелли система несовместна.*

1.4.1. Метод Крамера

Пусть задана система n линейных уравнений с n неизвестными. Если определитель главной матрицы системы A не равен нулю ($det\,A = \Delta \neq 0$), то система имеет единственное решение, которое определяется формулами

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1, n},$$

где Δ_i – определители матриц, получающиеся из главной матрицы системы A заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

Пример 1.15. *Решить систему методом Крамера*

$$\begin{cases} 2x - 4y + z = 3, \\ x - 5y + 3z = -1, \\ x - y + z = 1. \end{cases}$$

Вычислим определитель главной матрицы системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8.$$

Составим и вычислим определители для каждой переменной системы:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -16.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -0.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 8.$$

По формулам Крамера получаем, что:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 2, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 0, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -1.$$

1.4.2. Матричный метод

Если систему из n линейных уравнений с n неизвестными записать в матричном виде:

$$A \cdot X = B,$$

то система имеет единственное решение при условии, что $det\, A \neq 0$. Домножим обе части равенства на A^{-1} (обратная матрица существует!)

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

По свойству обратных матриц $A^{-1} \cdot A = E$ и $E \cdot X = X$. Значит решение можно найти по формуле

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Пример 1.16. *Решить систему уравнений матричным способом*

$$\begin{cases} 2x + 5y + 7z = 12, \\ 6x + 3y + 4z = 2, \\ 5x - 2y - 3z = -11 \end{cases}$$

Запишем систему в матричном виде

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица для главной матрицы системы равна

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$$

Значит

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

т.е. $x = -1$, $y = 0$, $z = 2$.

1.4.3. Метод Гаусса

Метод Гаусса состоит в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы. Для того чтобы решить систему уравнений записывают расширенную матрицу этой системы. Затем со строками расширенной матрицы проводят элементарные преобразования, аналогичные методу Гаусса - Жордана (см. раздел "Обратная матрица. Ранг матрицы пример 3). С помощью таких преобразований приводят матрицу к ступенчатому виду. Эта часть метода Гаусса называется прямым ходом. Затем записывают систему линейных уравнений, соответствующую ступенчатой матрице, и, начиная с последнего уравнения системы, находят ее решение. Это обратный ход метода Гаусса.

Пример 1.17. *Решить систему уравнений методом Гаусса*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы и будем приводить её к треугольному виду

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Вычтем из третьей строки первую

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

Сложи вторую строку с третьей

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Заметим, что $rang\, A = rang\, \overline{A} = 2$. По следствию из теоремы Кронекера - Капелли, система совместна и имеет бесконечное множество решений. За базисные переменные выберем x_1, x_2, а за свободные x_3, x_4. Выпишем преобразованную систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

Выразим базисные переменные через свободные

$$\begin{cases} x_1 = 5 - 2x_2 - x_3 - x_4, \\ x_2 = 3 - x_3 - x_4. \end{cases}$$

Подставим второе уравнение в первое вместо x_2

$$\begin{cases} x_1 = -1 + x_3 + x_4, \\ x_2 = 3 - x_3 - x_4. \end{cases}$$

Положим, что $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$, *где* C_1, C_2 *- постоянные. Тогда* $x_2 = 3 - C_1 + C_2$ *и* $x_1 = -1 + C_1 + C_2$.

1.5. Индивидуальные задания к теме 1

Вариант 1

1. Вычислить произведение

$$\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 5 \\ 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 10 \\ 5 & 8 & 8 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель и найти обратную матрицу.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 7 & 4 \\ 5 & 9 & 9 & 9 \\ 10 & 6 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение $X \cdot C = D$.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 7 & 4 \\ 5 & 9 & 9 & 9 \\ 10 & 6 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 107 & 128 & 124 & 127 \\ 152 & 121 & 94 & 122 \\ 58 & 91 & 58 & 110 \\ 77 & 109 & 87 & 125 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} -7x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 8x_4 = 41 \\ 9x_1 + 4x_2 + 9x_3 - 6x_4 = -1 \\ 7x_1 + 6x_2 - 6x_3 - 5x_4 = -126 \\ 4x_1 + 8x_2 - 4x_3 - 7x_4 = -81 \end{cases}$$

Вариант 2

1. Вычислить произведение

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 6 \\ 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 5 & 10 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель и найти обратную матрицу.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 & 5 \\ 7 & 9 & 10 & 3 \\ 1 & 1 & 8 & 7 \\ 5 & 8 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение $X \cdot C = D$.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 & 5 \\ 7 & 9 & 10 & 3 \\ 1 & 1 & 8 & 7 \\ 5 & 8 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 68 & 110 & 171 & 111 \\ 76 & 121 & 169 & 89 \\ 94 & 140 & 182 & 96 \\ 95 & 146 & 214 & 131 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 9 \\ -x_1 + 4x_2 - 7x_3 - 2x_4 = -48 \\ x_1 - 7x_2 + 7x_3 + 6x_4 = 47 \\ -4x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$$

Вариант 3

1. Вычислить произведение

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \\ 5 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 3 & 9 \\ 9 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель и найти обратную матрицу.

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 9 & 5 \\ 10 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 10 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение $C \cdot X = D$.

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 9 & 5 \\ 10 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 10 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 65 & 159 & 89 & 183 \\ 54 & 91 & 63 & 129 \\ 62 & 110 & 103 & 101 \\ 48 & 145 & 82 & 138 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} -5x_1 - x_2 + 6x_3 - 8x_4 = 37 \\ -10x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 4x_4 = -23 \\ -x_1 + 7x_2 - 2x_3 - x_4 = 31 \\ 3x_1 + 10x_2 - 7x_3 - 5x_4 = 36 \end{cases}$$

Вариант 4

1. Вычислить произведение

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \\ 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 7 & 5 \\ 7 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель и найти обратную матрицу.

$$\begin{pmatrix} 7 & 9 & 1 & 6 \\ 4 & 7 & 4 & 1 \\ 2 & 10 & 6 & 6 \\ 6 & 10 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение $X \cdot C = D$.

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 1 & 6 \\ 4 & 7 & 4 & 1 \\ 2 & 10 & 6 & 6 \\ 6 & 10 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 151 & 263 & 90 & 162 \\ 112 & 192 & 72 & 108 \\ 105 & 217 & 92 & 124 \\ 106 & 230 & 104 & 120 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 6x_1 - 7x_2 - 5x_3 + 9x_4 = -51 \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 8x_4 = 13 \\ -9x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 8x_4 = 33 \\ -4x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 44 \end{cases}$$

Вариант 5

1. Вычислить произведение

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \\ 6 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 6 & 9 \\ 10 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель и найти обратную матрицу.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение $X \cdot C = D$.

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 77 & 125 & 101 & 121 \\ 78 & 71 & 120 & 104 \\ 119 & 143 & 171 & 173 \\ 83 & 108 & 116 & 125 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 10x_2 + 9x_3 - 6x_4 = -54 \\ 3x_1 - 5x_2 + 9x_3 - 8x_4 = -119 \\ -8x_1 + 10x_2 + 2x_3 - 6x_4 = -134 \\ 8x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$$

Вариант 6

1. Вычислить произведение

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 3 & 2 \\ 8 & 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель и найти обратную матрицу.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 6 & 9 \\ 9 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение $X \cdot C = D$.

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 6 & 9 \\ 9 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 8 & 6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 138 & 50 & 86 & 83 \\ 92 & 21 & 44 & 45 \\ 189 & 91 & 166 & 185 \\ 95 & 52 & 84 & 93 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} -2x_1 - 9x_2 + 7x_3 - 3x_4 = -31 \\ -1x_1 + 10x_2 - 6x_3 + 8x_4 = 79 \\ 1x_1 - x_2 - 3x_3 + 7x_4 = 62 \\ -3x_1 - 9x_2 - 9x_3 - 3x_4 = 72 \end{cases}$$

Вариант 7

1. Вычислить произведение

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 5 \\ 6 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель и найти обратную матрицу.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 8 & 5 \\ 9 & 8 & 7 & 3 \\ 10 & 8 & 9 & 1 \\ 2 & 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение $X \cdot C = D$.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 8 & 5 \\ 9 & 8 & 7 & 3 \\ 10 & 8 & 9 & 1 \\ 2 & 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 111 & 124 & 137 & 42 \\ 94 & 134 & 144 & 60 \\ 136 & 163 & 166 & 58 \\ 159 & 186 & 189 & 59 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 10x_1 - 10x_2 + 6x_3 + 10x_4 = -116 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -2 \\ 2x_1 - 9x_2 + 8x_3 - 6x_4 = -14 \\ -6x_1 - x_2 + 3x_3 - 9x_4 = 40 \end{cases}$$

Вариант 8

1. Вычислить произведение

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \\ 2 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель и найти обратную матрицу.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 8 & 1 & 6 \\ 9 & 6 & 9 & 2 \\ 2 & 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение $C \cdot X = D$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 8 & 1 & 6 \\ 9 & 6 & 9 & 2 \\ 2 & 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 69 & 63 & 63 & 54 \\ 105 & 130 & 113 & 91 \\ 171 & 174 & 139 & 125 \\ 146 & 116 & 136 & 110 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} -8x_1 + 2x_2 - 9x_3 + x_4 = 89 \\ 5x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 9x_4 = -65 \\ 4x_1 - 7x_2 + 7x_3 - 2x_4 = -102 \\ -6x_1 - x_2 + 5x_3 + 5x_4 = -40 \end{cases}$$

Вариант 9

1. Вычислить произведение

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 5 \\ 4 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель и найти обратную матрицу.

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 & 8 & 4 \\ 1 & 7 & 10 & 6 \\ 5 & 1 & 8 & 6 \\ 2 & 9 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение $X \cdot C = D$.

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 8 & 4 \\ 1 & 7 & 10 & 6 \\ 5 & 1 & 8 & 6 \\ 2 & 9 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 98 & 175 & 190 & 152 \\ 118 & 208 & 268 & 212 \\ 63 & 57 & 126 & 98 \\ 69 & 70 & 110 & 74 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} -6x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 22 \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 22 \\ -2x_1 - 5x_2 - 10x_3 + 7x_4 = 86 \\ -3x_1 + 8x_2 + x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Вариант 10

1. Вычислить произведение

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 2 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 10 & 1 \\ 2 & 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель и найти обратную матрицу.

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 7 & 7 \\ 9 & 10 & 1 & 5 \\ 10 & 4 & 10 & 8 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение $C \cdot X = D$.

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 7 & 7 \\ 9 & 10 & 1 & 5 \\ 10 & 4 & 10 & 8 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 128 & 136 & 125 & 228 \\ 134 & 103 & 117 & 178 \\ 110 & 146 & 120 & 238 \\ 99 & 132 & 52 & 190 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 - 8x_4 = 68 \\ -8x_1 + 2x_2 - 7x_3 - 6x_4 = -100 \\ 10x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 10x_4 = 68 \\ -2x_1 + 10x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -8 \end{cases}$$

Тема 2
Геометрия на плоскости

2.1. Система координат. Координаты вектора

Определение 2.1. *Базисом называется система векторов, заданных в определенном порядке, и при этом:*

а) система линейно независима;

б) любой вектор является линейной комбинацией данной системы векторов.

Заметим, что на прямой базис состоит из одного вектора $\vec{e}$; на плоскости базис состоит из двух неколлинеарных векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$; в пространстве состоит из трех некомпланарных векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$.

Координатами вектора $\vec{a}$ в этом базисе называются коэффициенты a_1, a_2, a_3 линейного выражения вектора $\vec{a}$ через векторы $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$, т.е. коэффициенты разложения вектора $\vec{a}$ по базису: $\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}$ вектор $\vec{a}$ имеет координаты (a_1, a_2, a_3).

Определение 2.2. *Система координат называется прямоугольной декартовой или просто прямоугольной, если базис этой системы ортонормированный, т.е. образующие его векторы попарно взаимно перпендикулярны и их длины равны единице. Точка приложения векторов базиса называется началом координат*

$O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ – прямоугольная декартова система координат в пространстве, $O\vec{i}\vec{j}$ – прямоугольная декартова система координат на плоскости, причем O – начало координат; $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$; $\vec{i}\perp\vec{j}$, $\vec{i}\perp\vec{k}$, $\vec{j}\perp\vec{k}$.

Координатами точки M в системе координат $O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ называются координаты x, y, z радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$, в базисе $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$.

Пусть даны точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, тогда

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)\,. \qquad (2.1)$$

Определение 2.3. *Будем говорить, что точка C делит отрезок AB в отношении λ, если $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$.*

Точка C имеет координаты:

$$C\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}; \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}; \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right). \tag{2.2}$$

Определение 2.4. *Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними.*

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается через

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}|\ \cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}). \tag{2.3}$$

Если векторы $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ заданы координатами прямоугольной системе координат, то скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно сумме произведений одноименных координат

$$\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \tag{2.4}$$

Скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами:

1. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — ненулевые векторы. Тогда $\vec{a}\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$.
2. $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, где $\vec{a}^{\,2} = \vec{a}\vec{a}$ называется скалярным квадратом вектора $\vec{a}$.
3. $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$.
4. $(\alpha\vec{a})\vec{b} = \alpha(\vec{a}\vec{b})$.
5. $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$.

Скалярный квадрат вектора $\vec{a}$ равен квадрату его длины, следовательно

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \tag{2.5}$$

Угол между двумя ненулевыми векторами заключен в пределах от нуля до π, поэтому для определения угла достаточно найти его косинус

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\ \sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}. \tag{2.6}$$

Пример 2.1. *На оси Oy найти точку, равноудаленную от точек $A(3, 0, 1)$ и $B(-2, 4, 1)$.*

Если точка C находится на оси Oy, то она имеет координаты $(0, y, 0)$.

$$|AC| = \sqrt{(0-3)^2 + (y-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{y^2+10}$$

$$|BC = \sqrt{(0+2)^2 + (y-4)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{y^2 - 8y + 21}$$

Приравниваем полученные расстояния и решаем уравнение

$$\sqrt{y^2+10}=\sqrt{y^2-8y+21}\Leftrightarrow 8y=11\Leftrightarrow y=\frac{11}{8}$$

Точка имеет координаты $\left(0,\frac{11}{8},0\right)$.

Пример 2.2. *Даны вершины треугольника* $A(1,2,-1)$, $B(2,-1,3)$, $C(-4,7,5)$. *Вычислить длину биссектрисы* BE.

По основному свойству биссектрисы $BA:BC=AE:EC$.

$$|BA|=\sqrt{(1-2)^2+(2-(-1))^2+(-1-3)^2}=\sqrt{26},$$

$$|BC|=\sqrt{(-4-2)^2+(7-(-1))^2+(5-3)^2}=\sqrt{104}$$

$$BA:BC=1:2\Rightarrow\lambda=\frac{1}{2}$$

Точка E *делит отрезок* AE *в отношении* $\frac{1}{2}$. *По формуле* (2.2) *имеем*

$$E\left(\frac{1+\frac{1}{2}\cdot(-4)}{1+\frac{1}{2}};\frac{2+\frac{1}{2}\cdot 7}{1+\frac{1}{2}};\frac{-1+\frac{1}{2}\cdot 5}{1+\frac{1}{2}}\right).$$

$$E\left(-\frac{2}{3},\frac{11}{3},1\right)$$

Вычислим длину биссектрисы

$$|BE|=\sqrt{\left(-\frac{2}{3}-2\right)^2+\left(\frac{11}{3}+1\right)^2+(1-3)^2}=\sqrt{\frac{64}{9}+\frac{169}{9}+4}=\frac{\sqrt{269}}{3}$$

Определение 2.5. *Векторным произведением вектора* $\vec{a}$ *на вектор* $\vec{b}$ *называется вектор, обозначаемый* $\vec{a}\times\vec{b}$ *и удовлетворяющий условиям:*

1) $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, *где* $\varphi=\widehat{(\vec{a},\vec{b})}$.

2) Вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ *перпендикулярен как к вектору* $\vec{a}$, *так и к вектору* $\vec{b}$.

3) Если векторы $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *не коллинеарны, то вектор* $\vec{a}\times\vec{b}$ *направлен так, что тройка векторов* $\{\vec{a},\vec{b},\ \vec{a}\times\vec{b}\}$ *одинаково ориентирована с тройкой* $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ *базисных векторов, т.е. с ортонормированным базисом.*

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют координаты $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$ в прямоугольной системе координат, то

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right) \tag{2.7}$$

или

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\end{vmatrix}. \tag{2.8}$$

Векторное произведение обладает следующими свойствами:

1. Для того, чтобы векторы были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение равнялось $\vec{0}$.
2. Модуль векторного произведения $\vec{a} \times \vec{b}$ равен площади $S_{\square}$ параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, отложенные от одной точки, являются сторонами параллелограмма).
3. $\vec{a} \times \vec{b}$=-$\vec{b} \times \vec{a}$.
4. $\vec{a} \times (\alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a} \times \vec{b})$.
5. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.

Пример 2.3. *Доказать, что если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не коллинеарны, то*

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}.$$

Пусть $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, тогда $\vec{a} = -\vec{b} - \vec{c}$. Вычислим $\vec{a} \times \vec{b}$ используя свойства векторного произведения

$$\vec{a} \times \vec{b} = (-\vec{b} - \vec{c}) \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{b} - \vec{c} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c}$$

$$\vec{c} \times \vec{a} = \vec{c} \times (-\vec{b} - \vec{c}) = -\vec{c} \times \vec{b} - \vec{c} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{c}$$

Если $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c}$, тогда

$$\vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{c} = \vec{0} \Rightarrow (\vec{a} + \vec{c}) \times \vec{b} = \vec{0}$$

Это означает, что $(\vec{a} + \vec{c}) \parallel \vec{b}$. Аналогично можно получить, что $\vec{a} \parallel (\vec{b} + \vec{c})$. Из последних двух утверждений следует, что $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

Определение 2.6. *Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется скалярное произведение векторов $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{c}$, т.е.*

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}.$$

Если в прямоугольной системе координат заданы векторы $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$, то смешанное произведение равно:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{2.9}$$

Смешанное произведение трех векторов обладает свойствами:

1. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}$.
2. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$.
3. $(\alpha\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \alpha(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$.
4. $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c}\vec{d} = \vec{a}\vec{c}\vec{d} + \vec{b}\vec{c}\vec{d}$.

5. Для того, чтобы векторы были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение равнялось нулю.
6. Смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ равно ориентированному объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, т.е.
$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \pm V_{\text{пар.}}$$

Пример 2.4. *Доказать, что четыре точки $A(1,2,-1)$, $B(0,1,5)$, $C(-1,2,1)$, $D(2,1,3)$ лежат в одной плоскости.*

Вычислим координаты трех векторов выходящих из одной точки, например, из точки A.

$$\overrightarrow{AB}(-1,-1,6),\ \overrightarrow{AC}(-2,0,2),\ \overrightarrow{AD}(1,-1,4).$$

Если эти векторы компланарны, то все четыре точки лежат в одной плоскости. Воспользуемся свойством смешанного произведения

$$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Значит, вектора компланарны и точки лежат в одной плоскости.

2.2. Уравнение прямых на плоскости

Каноническое уравнение

$$\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2}, \tag{2.10}$$

где $M_0(x_0; y_0)$ – точка на прямой; $\vec{p}(p_1; p_2)$ – направляющий вектор.

Допустима запись, когда один из знаменателей равен нулю. В этом случае прямая параллельна соответствующей оси координат.

Параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t, \\ y = y_0 + a_2 t. \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \text{ – параметр} \tag{2.11}$$

Уравнение по двум точкам

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \tag{2.12}$$

где $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ – точки на прямой.

Уравнение прямой “в отрезках”

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{2.13}$$

где a, b – длины отрезков (с учетом знака), отсекаемых прямой от осей координат.

Общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0, \tag{2.14}$$

где коэффициенты A и B не обращаются в нуль одновременно. В этом случае $\vec{p}(-B; A)$ является направляющим вектором прямой, а $\vec{n}(A; B)$ – нормальным вектором прямой.

Уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту

$$y - y_0 = k\,(x - x_0), \tag{2.15}$$

где α – угол наклона прямой к оси Ox; $k = \operatorname{tg}\alpha$ – угловой коэффициент; $M_0(x_0; y_0)$ – точка на прямой.

Прямые, перпендикулярные к оси Ox, не имеют углового коэффициента.

Пример 2.5. *Даны вершины треугольника ABC: $A(-2,4)$, $B(3,1)$, $C(10,7)$. Составить уравнение высоты CH.*

Вектор $\overrightarrow{AB}(5,-3)$ будет нормальным для прямой CH. Значит, исходя из геометрического смысла, уравнение CH будет иметь вид $5x - 3y + D = 0$. Значение D находим из условия, что $A \in CH$ (координаты точки A удовлетворяют уравнению).

$$5 \cdot (-2) - 3 \cdot 4 + D = 0 \Rightarrow D = 22$$

Уравнение высоты CH имеет вид $5x - 3y + 22 = 0$.

Взаимное расположение двух прямых

Пусть $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ — уравнения прямых ℓ_1 и ℓ_2.

1) прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются тогда и только тогда, когда коэффициенты при текущих координатах в уравнениях прямых не пропорциональны, т.е. $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$,

2) прямые ℓ_1 и ℓ_2 параллельны тогда и только тогда, когда коэффициенты при текущих координатах в уравнениях прямых пропорциональны, но свободные члены им не пропорциональны, т.е. $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$,

3) прямые ℓ_1 и ℓ_2 совпадают тогда и только тогда, когда все коэффициенты в уравнениях прямых пропорциональны, т.е. $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Угол между прямыми

Если прямые заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ соответственно, то угол между ними θ может быть найден по формуле

$$\cos\theta = \frac{A_1B_1 + A_2B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{2.16}$$

Если прямые заданы уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ соответственно, то угол между ними θ может быть найден по формуле

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \tag{2.17}$$

Вычисление расстояний

Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ может быть найдено по формуле

$$d = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{2.18}$$

Расстояние между параллельными прямыми $Ax+By+C = 0$ и $Ax+By + C' = 0$ может быть найдено по формуле

$$d = \frac{|C' - C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{2.19}$$

Пример 2.6. *Найти координаты точки пересечения прямых $3x - 2y - 7 = 0$ и $x + 3y - 6 = 0$.*

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - 2y - 7 = 0 \\ x + 3y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

Точка пересечений прямых имеет координаты $(3, 1)$.

2.3. Кривые второго порядка

2.3.1. Эллипс

Определение 2.7. *Эллипсом называется множество всех точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух точек, называемых фокусами, равна постоянному числу.*

Пусть $F_1(c; 0)$, $F_2(-c; 0)$ – фокусы; $2a$ – сумма расстояний от точки эллипса до фокусов, тогда каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2.20}$$

где $b^2 = a^2 - c^2$.

Свойства эллипса:

1. Эллипс имеет две оси симметрии – оси координат и центр симметрии — начало координат. Центр симметрии эллипса называется его центром.

2. Вершинами эллипса называются точки пересечения эллипса с его осями симметрии, т.е. точки $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$. Отрезок A_1A_2 называют большой осью, а отрезок B_1B_2 – малой осью и соответственно: a – большая полуось, b – малая полуось.

3. Все точки эллипса лежат внутри прямоугольника, образованного прямыми $x = a$, $x = -a$, $y = b$, $y = -b$. Его называют основным прямоугольником.

4. Число $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ называется эксцентриситетом эллипса. Эксцентриситет эллипса меньше 1.

5. Директрисами эллипса, гиперболы называются две прямые m_1 и m_2, определяемые соответственно уравнениями $x - \dfrac{a}{\varepsilon} = 0$, $x + \dfrac{a}{\varepsilon} = 0$. Директисы параллельны оси Oy и расстояние между ними равно $\frac{2a}{\varepsilon}$.

6. Для любой точки эллипса отношение фокального радиуса этой точки к расстоянию от нее до соответствующей фокусу директрисы постоянно и равно эксцентриситету.

7. Уравнение касательной к эллипсу имеет вид
$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1,$$
где $M_0(x_0;y_0)$ – точка касания.

8. Фокальные радиусы произвольной точки M_0 эллипса составляют равные углы с касательной к эллипсу проведенной в точке M_0.

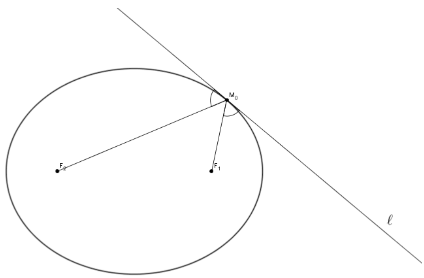


Рис. 3. Фокальное свойство эллипса

Пример 2.7. *Составить каноническое уравнение эллипса у которого малая полуось равна* 15*, а фокус находится в точке* $F(-10, 0)$.

Из уравнения эллипса следует, что $b = 15$, $c = 10$. Найдем длину большой полуоси по формуле

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 325$$

Каноническое уравнение эллипса $\dfrac{x^2}{325} + \dfrac{y^2}{225} = 1$.

2.3.2. Гипербола

Определение 2.8. *Гиперболой называется множество всех точек плоскости, для каждой из которых разность расстояний до двух точек, называемых фокусами, равна постоянному числу.*

Пусть $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$ – фокусы; $2a$ – разность расстояний, тогда каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2.21}$$

где $b^2 = c^2 - a^2$.

Свойства гиперболы

1. Гипербола имеет две оси симметрии – оси координат и центр симметрии – начало координат. Центр симметрии гиперболы называется ее центром.
2. Вершинами гиперболы называются точки пересечения гиперболы с ее осями симметрии. Гипербола имеет две вершины $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$. Отрезок A_1A_2 называют действительной осью, а отрезок B_1B_2, где точки B_1 и B_2 лежат на оси Oy и имеют координаты: $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$, – мнимой осью. Соответственно число a называется действительной полуосью, число b – мнимой полуосью.
3. Внутри полосы, ограниченной прямыми $x = a$, $x = -a$ нет точек гиперболы. Гипербола состоит из двух непересекающихся фигур, называемых правой и левой ветвями гиперболы.
4. Асимптотами гиперболы называются прямые ℓ_1 и ℓ_2, определяемые в канонической системе координат соответственно уравнениями
$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x.$$
5. Число $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ называется эксцентриситетом гиперболы. Эксцентриситет гиперболы больше 1.
6. Директрисами гиперболы называются две прямые m_1 и m_2, определяемые соответственно уравнениями $x - \dfrac{a}{\varepsilon} = 0$, $x + \dfrac{a}{\varepsilon} = 0$. Директисы параллельны оси Oy и расстояние между ними равно $\frac{2a}{\varepsilon}$.

7. Для любой точки гиперболы отношение фокального радиуса этой точки к расстоянию от нее до соответствующей фокусу директрисы постоянно и равно эксцентриситету.

8. Уравнение касательной к гиперболе имеет вид

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1,$$

где $M_0(x_0; y_0)$ – точка касания.

9. Фокальные радиусы произвольной точки M_0 гиперболы составляют равные углы с касательной к эллипсу проведенной в точке M_0.

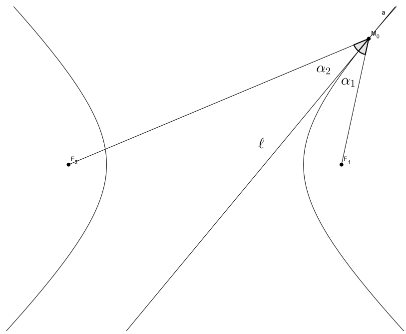


Рис. 4. Фокальное свойство гиперболы

Пример 2.8. *Составить каноническое уравнение гиперболы у которой действительная полуось равна* 13, *а эксцентриситет* $\varepsilon = \frac{14}{13}$.

Из условия следует, что $a = 13$, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{14}{13}$. *Значит* $c = 14$.

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b^2 = 27.$$

Каноническое уравнение гиперболы $\dfrac{x^2}{169} - \dfrac{y^2}{27} = 1$.

2.3.3. Парабола

Определение 2.9. *Параболой называется множество всех точек плоскости, для каждой из которых расстояние до данной точки, называемой фокусом, равно расстоянию до данной прямой, называемой директрисой.*

Пусть $F(\frac{p}{2};0)$ – фокус, $x+\frac{p}{2}=0$ – директриса, тогда каноническое уравнение параболы имеет вид

$$y^2 = 2px. \tag{2.22}$$

Свойства параболы

1. Парабола имеет одну ось симметрии — ось Ox.
2. Вершиной параболы называется точка пересечения параболы с ее осью симметрии. Парабола имеет одну вершину – начало координат $O(0;0)$. Ось Oy пересекает параболу также в начале координат.
3. Все точки параболы лежат в той полуплоскости с границей Oy, которая содержит фокус F.
4. Эксцентриситет параболы считают равным 1.
5. Уравнение касательной к параболе имеет вид

   $$yy_0 = p(x+x_0),$$

   где $M_0(x_0;y_0)$ – точка касания.
6. Касательная к параболе в каждой точке M_0 составляет равные углы с фокальным радиусом и осью параболы.

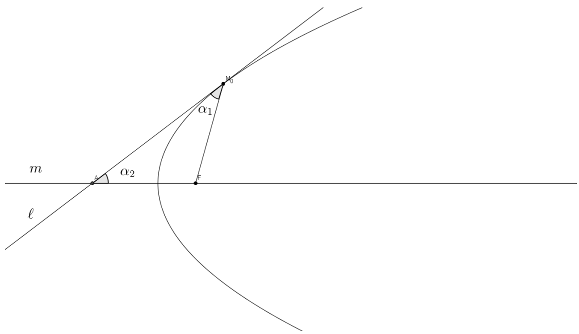


Рис. 5. Фокальное свойство параболы

Пример 2.9. *Составить каноническое уравнение параболы, если уравнение директрисы $D:\ x=-4$.*

Для канонического задания параболы уравнение директрисы имеет вид $x+\frac{p}{2}=0$. Значит

$$-\frac{p}{2} = -4 \Rightarrow p = 8.$$

Каноническое уравнение параболы $y^2 = 16x$.

2.3.4. Классификация кривых второго порядка

Определение 2.10. *Линией второго порядка называется алгебраическая линия второго порядка, уравнение которой в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид*

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{2.23}$$

где хотя бы один из коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} отличен от нуля.

На плоскости существует девять и только девять типов линий второго порядка.

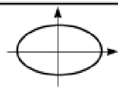
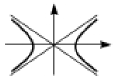
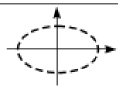
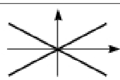
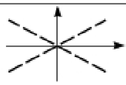
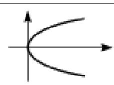
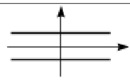
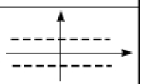
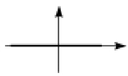
№ п/п	Линия 2-го порядка	Каноническое уравнение	Вид
1.	*Эллипс*	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	
2.	*Гипербола*	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	
3.	*Мнимый эллипс*	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	
4.	*Пара пересекающихся прямых*	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	
5.	*Пара мнимых пересекающихся прямых*	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	
6.	*Парабола*	$y^2 = 2px$	
7.	*Пара параллельных прямых*	$y^2 - b^2 = 0$	
8.	*Пара мнимых параллельных прямых*	$y^2+b^2 = 0$	
9.	*Пара совпавших прямых*	$y^2 = 0$	

Рис. 6. Возможные типы кривых второго порядка

Пример 2.10. *Составить уравнение линии, каждая точка которой отстоит от прямой $\ell : \ x = -6$ на расстоянии, в два раза большем, чем от точки $A(1,3)$.*

Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка искомой линии. Вычислим расстояние от этой точки до ℓ и A:

$$d(M,\ell) = |x+6|; \quad |AM| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}$$

По условию $d(M,\ell) = 2|AM|$. Составим и упростим уравнение

$$|x+6| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} \Rightarrow x^2 + 12x + 36 = x^2 - 2x + 1 + (y-3)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y-3)^2 = 14x + 35$$

Выполним замены $\begin{cases} y' = y - 3 \\ x' = x + \frac{35}{14} \end{cases}$ *и получим уравнение параболы* $y' = 14x'$.

2.4. Индивидуальные задания к теме 2

Вариант 1

1. Найти в плоскости Oxz точку, равноудаленную от трех точек $A(1,1,1)$, $B(-1,1,0)$ и $C(3,1,-1)$.
2. Отрезок прямой, ограниченный точками $A(-1,8,3)$ и $B(9,-7,-2)$, разделен точками C, D, E, F на пять равных частей. Найти координаты этих точек.
3. $ABCD$ — тетраэдр, в котором $AB = AC = a$ и $\angle DAB = \angle DAC = \varphi$. Докажите, что $AD \perp BC$.
4. Вычислить площадь параллелограмма $ABCD$, если $\overrightarrow{AB} = 3\vec{m} - 2\vec{n}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{m} + \vec{n}$, $|\vec{m}| = 5$, $|\vec{n}| = 12$, $\angle(\vec{m},\vec{n}) = 30°$.
5. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(2,-1,1)$, $B(5,5,4)$, $C(3,2,-1)$, $D(4,1,3)$.
6. Даны вершины треугольника ABC: $A(-3,-2)$, $B(14,4)$, $C(6,8)$. Найти: а) уравнение стороны AB; б) уравнение высоты CH; в) уравнение медианы AM; г) точку N пересечения медианы AM и высоты CH; д) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB; е) расстояние от точки N до прямой BC.
7. Найти проекцию точки $A(-8,12)$ на прямую, проходящую через точки $B(2,-3)$ и $C(-5,1)$.
8. Составить канонические уравнения: а) эллипса; б) гиперболы; в) параболы (A, B – точки, лежащие на кривой, F – фокус, a – большая (действительная) полуось, b – малая (мнимая) полуось, ε –

эксцентриситет, $y = \pm kx$ – уравнения асимптот гиперболы, D – директриса кривой, $2c$ – фокусное расстояние).

а) $b = 2$, $F(4\sqrt{2}, 0)$; б) $a = 7$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{85}}{7}$; в) $D:\ x = 5$.

9. Составить уравнение линии, каждая точка которой отстоит от прямой $x = -2$ на расстоянии, в два раза большем, чем от точки $A(4, 0)$.

Вариант 2

1. На оси Oz найти точку, равноудаленную от точек $A(-4, 1, 7)$ и $B(3, 5, -2)$.
2. Определить координаты концов отрезка, который точками $C(2, 0, 2)$ и $D(5, -2, 0)$ разделен на три равные части.
3. Докажите, что плоскость, проходящая через концы трех ребер куба, имеющих общую точку, перпендикулярна диагонали куба, выходящей из этой точки.
4. Доказать тождество $(\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a}\vec{b})^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2$.
5. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, угол между которыми равен 30°. Зная, что $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 3$, вычислить смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.
6. Даны вершины треугольника ABC: $A(1, 7)$, $B(-3, -1)$, $C(11, -3)$. Найти: а) уравнение стороны AB; б) уравнение высоты CH; в) уравнение медианы AM; г) точку N пересечения медианы AM и высоты CH; д) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB; е) расстояние от точки N до прямой BC.
7. Даны две вершины треугольника ABC: $A(-4, 4)$, $B(4, -12)$ и точка $M(4, 2)$ пересечения его высот. Найти вершину C.
8. Составить канонические уравнения: а) эллипса; б) гиперболы; в) параболы (A, B – точки, лежащие на кривой, F – фокус, a – большая (действительная) полуось, b – малая (мнимая) полуось, ε – эксцентриситет, $y = \pm kx$ – уравнения асимптот гиперболы, D – директриса кривой, $2c$ – фокусное расстояние).

   а) $A(3, 0)$, $B(2, \frac{\sqrt{5}}{3})$; б) $k = \frac{3}{4}$, $\varepsilon = \frac{5}{4}$; в) $D:\ y = -2$.
9. Составить уравнение линии, каждая точка которой отстоит от прямой $y = -2$ на расстоянии, в три раза большем, чем от точки $A(5, 0)$.

Вариант 3

1. На координатной плоскости Oyz найти точку, одинаково удаленную от трех данных точек $A(3, 1, 2)$, $B(4, -2, 2)$ и $C(0, 5, 1)$.
2. Даны вершины треугольника $A(1, -1, -3)$, $B(2, 1, -2)$, $C(-5, 2, -6)$. Вычислить длину биссектрисы AD.

3. В тетраэдре $ABCD$ противоположные ребра AD и BC, а также BD и AC перпендикулярны. Докажите, что противоположные ребра CD и AB также перпендикулярны.
4. Вычислить площадь треугольника с вершинами в точках $A(3, 4, -1)$, $B(2, 0, 3)$, $C(-3, 5, 4)$.
5. Доказать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ удовлетворяют условию $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=\vec{0}$ тогда и только тогда, когда $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$.
6. Даны вершины треугольника ABC: $A(1, 0)$, $B(-1, 4)$, $C(9, 5)$. Найти: а) уравнение стороны AB; б) уравнение высоты CH; в) уравнение медианы AM; г) точку N пересечения медианы AM и высоты CH; д) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB; е) расстояние от точки N до прямой BC.
7. Найти уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок, равный 2, и проходящей параллельно прямой $2y - x = 3$.
8. Составить канонические уравнения: а) эллипса; б) гиперболы; в) параболы (A, B – точки, лежащие на кривой, F – фокус, a – большая (действительная) полуось, b – малая (мнимая) полуось, ε – эксцентриситет, $y = \pm kx$ – уравнения асимптот гиперболы, D – директриса кривой, $2c$ – фокусное расстояние).

   а) $\varepsilon = \frac{\sqrt{21}}{5}$, $A(-5, 0)$; б) $A(\sqrt{80}, 3)$, $B(4\sqrt{6}, 3\sqrt{2})$; в) $D:\ y = 1$.
9. Составить уравнение линии, для каждой точки которой отношение расстояний до точек $A(2, 3)$ и $B(-1, 2)$ равно $\frac{3}{4}$.

Вариант 4

1. Доказать, что треугольник с вершинами $A(3, -1, 2)$, $B(0, -4, 2)$ и $C(-3, 2, 1)$ равнобедренный.
2. Прямая проходит через точки $K(-1, 6, 6)$ и $M(3, -6, -2)$. Найти точки пересечения ее с координатными плоскостями.
3. В тетраэдре $ABCD$ грань ACD — правильный треугольник со стороной a, грань ABC — равнобедренный прямоугольный треугольник ($\angle ACB = 90^\circ$), длина ребра BD равна b. Найти величину двугранного угла при ребре AC.
4. Даны векторы $\vec{a}(3, 0, -1)$, $\vec{b}(2, 4, 3)$, $\vec{c}(-1, 3, 2)$. Найти $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$.
5. Объем тетраэдра $V = 5$, три его вершины находятся в точках $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 1)$, $C(2, -1, 3)$. Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Oy.
6. Даны вершины треугольника ABC: $A(1, -2)$, $B(7, 1)$, $C(3, 7)$. Найти: а) уравнение стороны AB; б) уравнение высоты CH; в) уравнение медианы AM; г) точку N пересечения медианы AM и высоты CH; д) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB; е) расстояние от точки N до прямой BC.

7. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,-3)$ и точку пересечения прямых $2x-y=5$ и $x+y=1$.
8. Составить канонические уравнения: а) эллипса; б) гиперболы; в) параболы (A, B – точки, лежащие на кривой, F – фокус, a – большая (действительная) полуось, b – малая (мнимая) полуось, ε – эксцентриситет, $y=\pm kx$ – уравнения асимптот гиперболы, D – директриса кривой, $2c$ – фокусное расстояние).

   а) $a=11$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{57}}{11}$; б) $k=\frac{2}{3}$, $c=5\sqrt{13}$; в) ось симметрии Ox и $A(27,9)$.
9. Составить уравнение линии, для каждой точки которой сумма квадратов расстояний до точек $A(4,0)$ и $B(-2,2)$ равна 28.

Вариант 5

1. Доказать, что треугольник с вершинами $A(3,-1,6)$, $B(-1,7,\ -2)$ и $C(1,-3,2)$ прямоугольный.
2. Известны координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ $(2,2,6)$ и координаты середины $C(-4,0,5)$ отрезка AB. Найти координаты точек A и B.
3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M лежит на ребре AA_1, причем $AM : MA_1 = 3 : 1$, а точка N — середина ребра BC. Найдите косинус угла между прямыми MN и DD_1.
4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(8,4,1)$, $\vec{b}(2,2,-1)$.
5. Доказать тождество $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{b}+\vec{c})(\vec{c}+\vec{a})=2\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.
6. Даны вершины треугольника ABC: $A(-2,-3)$, $B(1,6)$, $C(6,1)$. Найти: а) уравнение стороны AB; б) уравнение высоты CH; в) уравнение медианы AM; г) точку N пересечения медианы AM и высоты CH; д) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB; е) расстояние от точки N до прямой BC.
7. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ — трапеция, если $A(3,6)$, $B(5,2)$, $C(-1,-3)$, $D(-5,5)$.
8. Составить канонические уравнения: а) эллипса; б) гиперболы; в) параболы (A, B – точки, лежащие на кривой, F – фокус, a – большая (действительная) полуось, b – малая (мнимая) полуось, ε – эксцентриситет, $y=\pm kx$ – уравнения асимптот гиперболы, D – директриса кривой, $2c$ – фокусное расстояние).

   а) $b=\sqrt{15}$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{10}}{25}$; б) $k=\frac{3}{4}$, $a=8$; в) ось симметрии Ox и $A(4,-8)$.
9. Составить уравнение линии, каждая точка которой отстоит от точки $A(1,0)$ на расстоянии, в пять раз меньшем, чем от прямой $x=8$.

Вариант 6

1. На оси Ox найти точку, отстоящую от точки $A(-3,4,8)$ на расстоянии, равном 12.

2. Отрезок AB разделен на 5 равных частей. Известна первая точка деления $C(3,-5,7)$ и последняя — $M(-2,4,-8)$. Определить координаты концов отрезка и остальных точек деления.

3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M лежит на ребре AA_1, причем $AM : MA_1 = 3 : 1$, а точка N — середина ребра BC. Найдите косинус угла между прямыми MN и BD.

4. Зная два вектора $\vec{a}(3,-2,1)$ и $\vec{b}(1,3,0)$, найти произведение $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})$.

5. Даны вершины тетраэдра $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$, $D(-5,-4,8)$. Найти длину его высоты, проведенной из вершины D.

6. Даны вершины треугольника ABC: $A(-4,2)$, $B(-6,6)$, $C(6,2)$. Найти: а) уравнение стороны AB; б) уравнение высоты CH; в) уравнение медианы AM; г) точку N пересечения медианы AM и высоты CH; д) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB; е) расстояние от точки N до прямой BC.

7. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(3,1)$ перпендикулярно к прямой BC, если $B(2,5)$, $C(1,0)$.

8. Составить канонические уравнения: а) эллипса; б) гиперболы; в) параболы (A, B – точки, лежащие на кривой, F – фокус, a – большая (действительная) полуось, b – малая (мнимая) полуось, ε – эксцентриситет, $y=\pm kx$ – уравнения асимптот гиперболы, D – директриса кривой, $2c$ – фокусное расстояние).
   а) $a=4$, $F=(3,0)$; б) $b=2\sqrt{10}$, $F(-11,0)$; в) $D:\ x=-2$.

9. Составить уравнение линии, каждая точка которой отстоит от точки $A(4,1)$ на расстоянии, в четыре раза большем, чем от точки $B(-2,-1)$.

Вариант 7

1. На оси Oy найти точку, равноудаленную от точек $A(1,-3,7)$ и $B(5,7,-5)$.

2. Найти отношение, в котором каждая из плоскостей координат делит отрезок AB: $A(2,-1,7)$, $B(4,5,-2)$.

3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M лежит на ребре AA_1, причем $AM : MA_1 = 3 : 1$, а точка N — середина ребра BC. Найдите косинус угла между прямыми MN и B_1D.

4. Найти $|\vec{a}\times\vec{b}|$, если $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=10$, $\vec{a}\vec{b}=-15$.

5. Вычислить объем параллелепипеда, зная, что одна из его вершин находится в начале координат, а концы ребер, выходящие из этой вершины, — в точках $(2,3,6)$, $(8,4,1)$, $(2,-2,1)$.
6. Даны вершины треугольника ABC: $A(4,-3)$, $B(7,3)$, $C(1,10)$. Найти: а) уравнение стороны AB; б) уравнение высоты CH; в) уравнение медианы AM; г) точку N пересечения медианы AM и высоты CH; д) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB; е) расстояние от точки N до прямой BC.
7. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2,1)$ параллельно прямой MN, если $M(-3,-2)$, $N(1,6)$.
8. Составить канонические уравнения: а) эллипса; б) гиперболы; в) параболы (A, B – точки, лежащие на кривой, F – фокус, a – большая (действительная) полуось, b – малая (мнимая) полуось, ε – эксцентриситет, $y=\pm kx$ – уравнения асимптот гиперболы, D – директриса кривой, $2c$ – фокусное расстояние).

   а) $b=4$, $F=(9,0)$; б) $a=5$, $\varepsilon=\frac{7}{5}$; в) $D:\ x=6$.
9. Составить уравнение линии, каждая точка которой отстоит от прямой $x=-5$ на расстоянии, в три раза большем, чем от точки $A(6,1)$.

Вариант 8

1. На оси Oz найти точки, удаленные от точки $(0,0,1)$ на расстояние, равное 3.
2. Даны две точки $A(8,-6,7)$, $B(-20,15,10)$. Установить, пересекает ли прямая AB какую-либо из осей координат.
3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M лежит на ребре AA_1, причем $AM : MA_1 = 3 : 1$, а точка N — середина ребра BC. Найдите косинус угла между прямыми MN и DD_1.
4. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=4$, $\vec{a}\vec{b}=12\sqrt{2}$.
5. Даны точки $A(0,1,1)$, $B(2,0,4)$, $C(1,-2,3)$, $D(1,8,1)$. Доказать, что прямые AB и CD пересекаются.
6. Даны вершины треугольника ABC: $A(4,-4)$, $B(8,2)$, $C(3,8)$. Найти: а) уравнение стороны AB; б) уравнение высоты CH; в) уравнение медианы AM; г) точку N пересечения медианы AM и высоты CH; д) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB; е) расстояние от точки N до прямой BC.
7. Найти точку, симметричную точке $M(2,-1)$ относительно прямой $x-2y+3=0$.

8. Составить канонические уравнения: а) эллипса; б) гиперболы; в) параболы (A, B – точки, лежащие на кривой, F – фокус, a – большая (действительная) полуось, b – малая (мнимая) полуось, ε – эксцентриситет, $y = \pm kx$ – уравнения асимптот гиперболы, D – директриса кривой, $2c$ – фокусное расстояние).

   а) $A(0, \sqrt{3})$, $B(\sqrt{\frac{14}{3}}, 1)$; б) $k = \frac{\sqrt{21}}{10}$, $\varepsilon = \frac{11}{10}$; в) $D: \ y = -4$.

9. Составить уравнение линии, каждая точка которой отстоит от прямой $y = 7$ на расстоянии, в пять раз большем, чем от точки $A(4, -3)$.

Вариант 9

1. Даны две точки $A(1, 1, 0)$ и $B(-2, 1, 0)$. Найти на оси Oz такую точку C, чтобы она была вершиной прямого угла ACB.

2. На прямой, проходящей через точки $K(1, 2, 4)$ и $M(-1, 4, 3)$, найти точку, лежащую в плоскости Oxz.

3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 1$, $BC = 2$, $BB_1 = 3$. Найдите косинус угла между прямыми AC и BD_1.

4. Доказать, что для любых трех точек A, B, C справедливо соотношение $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{CA}$.

5. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}(-2, 2, 1)$, $\vec{b}(3, -2, 5)$, $\vec{c}(7, -7, 21)$.

6. Даны вершины треугольника ABC: $A(-3, -3)$, $B(5, -7)$, $C(7, 7)$. Найти: а) уравнение стороны AB; б) уравнение высоты CH; в) уравнение медианы AM; г) точку N пересечения медианы AM и высоты CH; д) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB; е) расстояние от точки N до прямой BC.

7. Найти точку O пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, если $A(-1, -3)$, $B(3, 5)$, $C(5, 2)$, $D(3, -5)$.

8. Составить канонические уравнения: а) эллипса; б) гиперболы; в) параболы (A, B – точки, лежащие на кривой, F – фокус, a – большая (действительная) полуось, b – малая (мнимая) полуось, ε – эксцентриситет, $y = \pm kx$ – уравнения асимптот гиперболы, D – директриса кривой, $2c$ – фокусное расстояние).

   а) $\varepsilon = \frac{7}{8}$, $A(8, 0)$; б) $A(3, -\sqrt{\frac{3}{5}})$, $B(\sqrt{\frac{13}{5}}, 6)$; в) $D: \ y = 4$.

9. Составить уравнение линии, для каждой точки которой отношение расстояний до точек $A(-3, 5)$ и $B(4, 2)$ равно $\dfrac{1}{3}$.

Вариант 10

1. Найти в плоскости Oxz точку, равноудаленную от трех точек $A(2,2,0)$, $B(3,-1,4)$ и $C(-1,-2,3)$.
2. Известны координаты двух точек $A(1,2,3)$ и $B(4,0,5)$. Найти координаты точки пересечения прямой AB с плоскостью Oxy.
3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 1$, $BC = 2$, $BB_1 = 3$. Найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.
4. Даны векторы $\vec{a}(1,0,3)$ и $\vec{b}(4,0,z)$. При каком значении z вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ коллинеарен оси Oy?
5. Найти объем тетраэдра $ABCD$, зная координаты его вершин $A(3,7,2)$, $B(-1,2,5)$, $C(4,-1,10)$, $D(6,3,5)$.
6. Даны вершины треугольника ABC: $A(1,-6)$, $B(3,4)$, $C(-3,3)$. Найти: а) уравнение стороны AB; б) уравнение высоты CH; в) уравнение медианы AM; г) точку N пересечения медианы AM и высоты CH; д) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB; е) расстояние от точки N до прямой BC.
7. Через точку пересечения прямых $6x - 4y + 5 = 0$, $2x + 5y - 8 = 0$ провести прямую, параллельную оси абсцисс.
8. Составить канонические уравнения: а) эллипса; б) гиперболы; в) параболы (A, B – точки, лежащие на кривой, F – фокус, a – большая (действительная) полуось, b – малая (мнимая) полуось, ε – эксцентриситет, $y = \pm kx$ – уравнения асимптот гиперболы, D – директриса кривой, $2c$ – фокусное расстояние).

   а) $a = 12$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{22}}{6}$; б) $k = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $c = 5$; в) ось симметрии Ox и $A(-7,-7)$.
9. Составить уравнение линии, для каждой точки которой сумма квадратов расстояний до точек $A(-5,-1)$ и $B(3,2)$ равна 40,5.

Тема 3
Предел и непрерывность функций

3.1. Понятие функции

Определение 3.1. *Пусть A и B – произвольные множества. Отображением f множества A в множество B называется всякое правило или закон, согласно которому каждому элементу x множества A соответствует один определенный элемент y множества B.*

$$f : A \to B$$

$y = f(x)$ — значение отображения f на элементе x.

Множество A как совокупность тех объектов, на которые распространяется действие правила f, называется областью определения отображения f.

Совокупность всех значений $f(x)$ при x, пробегающем область определения, — множеством значений отображения f.

Область определения отображения f обозначается символом $D(f)$, а множество его значений — символом $E(f)$.

Термины "отображение", "функция", "оператор", "функционал" являются синонимами.

Пусть X и Y произвольные подмножества A и B соответственно.

Определение 3.2. *Совокупность всех элементов $y \in B$, каждый из которых является значением отображения $f : A \to B$ хотя бы на одном элементе множества X, называется образом множества X при отображении f и обозначается символом $f[X]$.*

$$f[X] = \{y \in B | (\exists x \in E)(y = f(x))\}$$

Определение 3.3. *Совокупность всех элементов $x \in A$, для которых значения $f(x)$ при отображении $f : A \to B$ принадлежат множеству Y, называется прообразом Y при отображении f и обозначается символом $f^{-1}[Y]$.*

$$f^{-1}[Y] = \{x \in A | f(x) \in Y\}$$

Определение 3.4. *Отображение $f : A \to B$ называется отображением множества A на множество B, если $f[A] = B$.*

Отображение $f : A \to B$ называется отображением множества A во множество B, если $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Замечание 3.1. *Отображение “на” называют сюръективным, “в” – инъективным, сюръективное и одновременно инъективное отображение – биективным или взаимно однозначным.*

Определение 3.5. *Пусть отображение $f : A \to B$ биективно. Тогда для любого $y \in B$ существует единственный элемент $x \in A$ такой, что $f(x) = y$. Положим $f^{-1}(y) = x$. Отображение $f^{-1} : B \to A$ называется обратным к отображению f.*

3.2. Элементарные функции

Степенная функция $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$

Если n четное.
$D(f) = \mathbb{R}$;
$E(f) = [0, +\infty)$;
Четная функция;
Непериодическая;
Убывает на $(-\infty; 0)$;
Возрастает на $(0; +\infty)$.

Если n нечетное.
$D(f) = \mathbb{R}$;
$E(f) = \mathbb{R}$;
Нечетная функция;
Непериодическая;
Возрастает на $\mathbb{R}$.

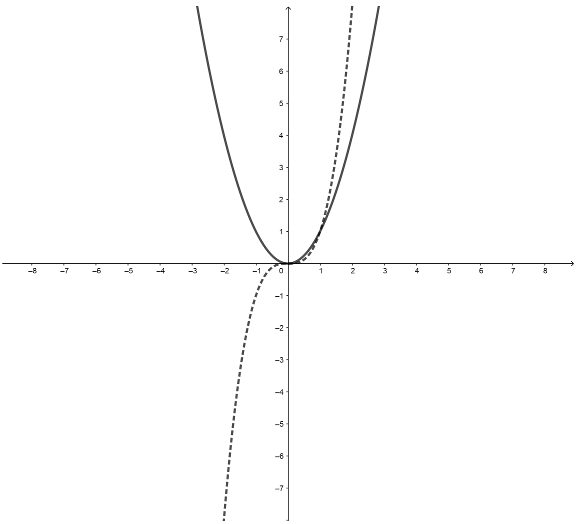


Рис. 7. График функции $f(x) = x^n$ при $n = 2$ (сплошная линия) и $n = 3$ (пунктирная линия)

Степенная функция $f(x) = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$

Если n четное.
$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
$E(f) = (0, +\infty)$;
Четная функция;
Непериодическая;
Убывает на $(0; +\infty)$;
Возрастает на $(-\infty; 0)$.

Если $n \in \mathbb{N}$ и нечетное.
$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
$E(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
Нечетная функция;
Непериодическая;
Убывает на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

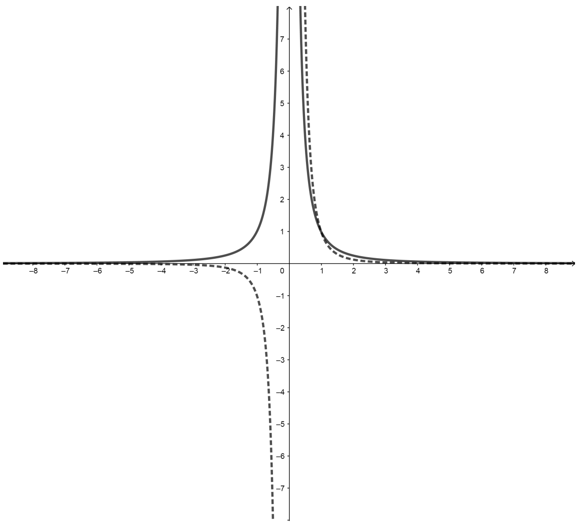


Рис. 8. График функции $f(x) = x^n$ при $n = 2$ (сплошная линия) и $n = 3$ (пунктирная линия)

Показательная функция $f(x) = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$

$D(f) = \mathbb{R}$; $E(f) = (0, +\infty)$; Ни четная, ни нечетная; Непериодическая;
Если $0 < a < 1$, то функция убывающая, если $a > 1$, то функция возрастающая.

Логарифмическая функция $f(x) = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$

$D(f) = (0, +\infty)$; $E(f) = \mathbb{R}$; Ни четная, ни нечетная; Непериодическая;
Если $0 < a < 1$, то функция убывающая, если $a > 1$, то функция возрастающая.

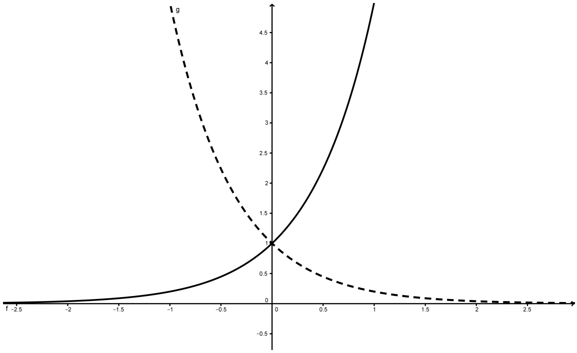


Рис. 9. График функции $f(x) = a^x$ при $a = 4$ (сплошная линия) и $a = 0,25$ (пунктирная линия)

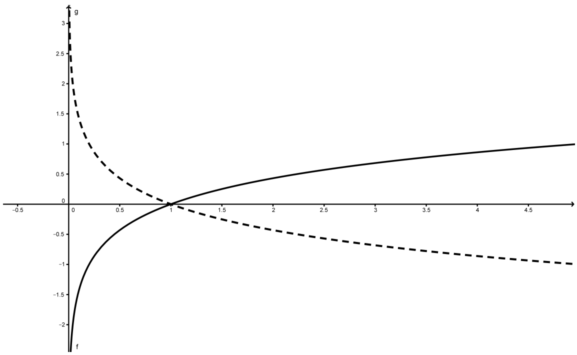


Рис. 10. График функции $f(x) = \log_a x$ при $a = 4$ (сплошная линия) и $a = 0,25$ (пунктирная линия)

Тригонометрические функции

$f(x) = \sin x$
$D(f) = \mathbb{R}$;
$E(f) = [-1; 1]$;
Нечетная;
Периодическая $T = 2\pi$;
Возрастает на $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$;
Убывает на $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

$f(x) = \cos x$
$D(f) = \mathbb{R}$;
$E(f) = [-1; 1]$;
Четная;
Периодическая $T = 2\pi$;
Возрастает на $(-\pi + 2\pi n; 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$;
Убывает на $(\pi + 2\pi n; 2\pi(n+1))$, $n \in \mathbb{Z}$.

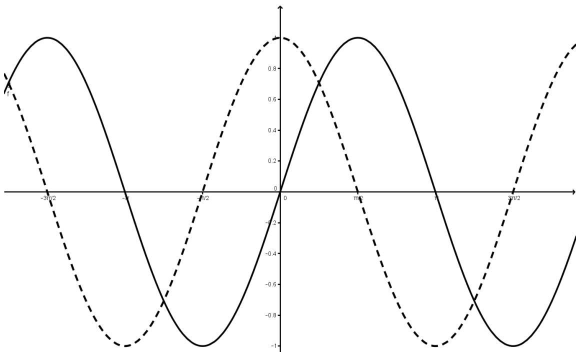


Рис. 11. График синуса (сплошная линия) и косинуса (пунктирная линия)

$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f(x) = \operatorname{ctg} x$
$D(f) = \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$;	$D(f) = (\pi n; \pi(n+1))$, $n \in \mathbb{Z}$;
$E(f) = \mathbb{R}$;	$E(f) = \mathbb{R}$;
Нечетная;	Нечетная;
Периодическая $T = \pi$;	Периодическая $T = \pi$;
Возрастающая на $D(f)$.	Убывающая на $D(f)$.

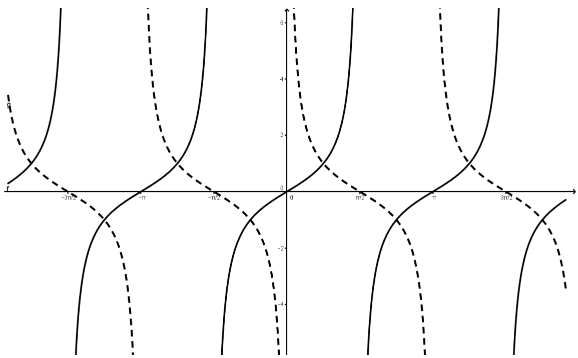


Рис. 12. График тангенса (сплошная линия) и котангенса (пунктирная линия)

Обратные тригонометрические функции

$y = \arcsin x$
$D(f) = [-1; 1]$;
$E(f) = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$;
Нечетная;
Непериодическая;
Возрастает на $D(f)$.

$y = \arccos x$
$D(f) = [-1; 1]$;
$E(f) = [0; \pi]$;
Ни четная, ни нечетная;
Непериодическая;
Убывает на $D(f)$.

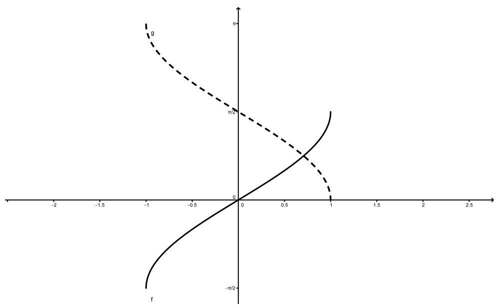


Рис. 13. График арксинуса (сплошная линия) и арккосинуса (пунктирная линия)

$y = \operatorname{arctg} x$
$D(f) = \mathbb{R}$;
$E(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;
Нечетная;
Непериодическая;
Возрастающая на $D(f)$.

$y = \operatorname{arcctg} x$
$D(f) = \mathbb{R}$;
$E(f) = (0; \pi)$;
Ни четная, ни нечетная;
Непериодическая;
Убывающая на $D(f)$.

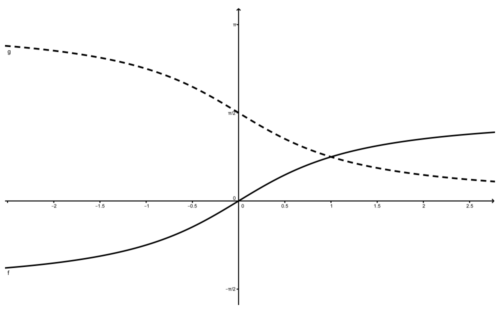


Рис. 14. График арктангенса (сплошная линия) и арккотангенса (пунктирная линия)

3.3. Предел функции

Определение 3.6. *Любой интервал, содержащий точку a, называется окрестность точки a. Обозначается $U(a)$.*

Проколотой окрестность точки a называется множество $U^*(a) = U(a) \setminus \{a\}$.

Определение 3.7. *ε-окрестность точки a назыветcя интервал $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$.*

$U_\varepsilon(-\infty) = (-\infty; -\varepsilon)$, $U_\varepsilon(+\infty) = (\varepsilon; +\infty)$, $U_\varepsilon(\infty) = (-\infty; -\varepsilon) \cup (\varepsilon; +\infty)$.

Определение 3.8. *Точка a называется предельной точкой множества A, если*

$$(\forall U^*(a))(\exists x \in A)(x \in U^*(a))$$

Определение 3.9. *Число $b \in \mathbb{R}$ называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$,*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} a \text{ – предельная точка } D(f), \\ (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon) \end{cases}$$

Можно сформулировать данное определение на языке окрестностей:

Определение 3.10. *Число $b \in \mathbb{R}$ называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$,*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} a \text{ – предельная точка } D(f), \\ (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))(x \in U^*_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(b)) \end{cases}$$

Теорема 3.1. *Если предел функции существует, то он единственный.*

Теорема 3.2. *Если функция $f(x)$ имеет конечный предел при $x \to a$, то она ограниченной в некоторой окрестности точки a.*

Теорема 3.3. *Пусть функции f, g, h определены на E и для любого $x \in E$ всегда выполняются неравенства $f(x) \le g(x) \le h(x)$, причем $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = b$, то и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$.*

Теорема 3.4. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, a – предельная точка $D(f) \cap D(g)$ то*

1. $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = b \pm c$;
2. $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$;

3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{b}{c},\quad c\neq 0.$

Пример 3.1.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-2x^2+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2-x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x^2-x-1}=-2$$

Теорема 3.5. *Если* $\lim\limits_{x\to a}(f(x))=b$, $\lim\limits_{y\to b}(g(y))=c$ *и* a *– предельная точка* $D(g\circ f)$, *то* $\lim\limits_{x\to a}g(f(x))=c$.

Определение 3.11. *Левосторонней (правосторонней) окрестность точки* a *называется интервал для которого* a *является правым (левым) концом.*

Обозначения $U^-(a)$ $(U^+(a))$.

Определение 3.12. *Число* $b\in\mathbb{R}$ *называется левосторонним пределом функции* $f(x)$ *при* $x\to a-0$,

$$\lim_{x\to a-0}f(x)=b\Leftrightarrow\begin{cases}a\ \text{– левосторонняя предельная точка}\ D(f),\\(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall n\in D(f))(x\in U^-(a,\delta)\Rightarrow f(x)\in U(b,\varepsilon))\end{cases}$$

Пример 3.2. *Для функции* $y=\log_2 x$ *точка* $x=0$ *является правосторонней предельной точкой, но не является левосторонней*

Теорема 3.6.

$$\lim_{x\to a}f(x)=b\Longleftrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=b\\\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=b\end{cases}$$

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Пример 3.3. *1.* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}=1.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{k}{1}\cdot\dfrac{\sin kx}{kx}=k.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\alpha x}\cdot\dfrac{\beta x}{\sin\beta x}\cdot\dfrac{\alpha x}{\beta x}=\dfrac{\alpha}{\beta}$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$$

Пример 3.4. *1.* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^2 = e^2.$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+3} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{\frac{x-1}{4}}\right)^{\frac{x-1}{4}}\right)^{\frac{4(x+3)}{x-1}} = e^4$

3.4. Непрерывность функции в точке

Определение 3.13. *Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0 \in D(f)$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Зафиксируем $x_0 \in D(f)$. Для любой точки $x \in D(f)$ обозначим $x - x_0 = \Delta x$ и назовем приращением аргумента в точке x_0. Обозначим $f(x) - f(x_0) = \Delta f$ и назовем приращением функции в точке x_0 соответствующим приращению аргумента Δx.

Теорема 3.7. *f непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.*

Точка x_0, в которой функция непрерывна, называется точкой непрерывности. Множество всех точек непрерывности называется областью непрерывности.

Теорема 3.8. *Если f, g – непрерывны в точке x_0, то функции $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ $(g(x_0) \neq 0)$ – непрерывны в точке x_0.*

Если f, g – образуют сложную функцию и f – непрерывна в точке x_0; g – непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$, тогда функция $g(f(x))$ – непрерывна в точке x_0.

Определение 3.14. *Функция f называется непрерывной в точке x_0 слева (справа) если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)\right)$.*

Теорема 3.9 (Больцано-Коши)**.** *Если f непрерывна на отрезке $[a; b]$ и на концах принимает значения $f(a) = A$, $f(b) = B$ $(A \neq B)$, то для любого числа C, лежащего между A и B, существует точка $c \in [a; b]$ такая, что $f(c) = C$.*

Пример 3.5. *Доказать, что уравнение $x^3 - 2x^2 + 3x + 5 = 0$ имеет хотя бы один действительный корень.*

Рассмотрим функцию непрерывную $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ и выберем интервал, например, $[-1; 0]$:

$$f(-1) = -1 < 0,\ f(0) = 5 > 0 \Rightarrow \exists c \in (-1; 0)\ f(c) = 0$$

Теорема 3.10 (Вейерштрасса)**.** *Если функция f непрерывна на $[a; b]$, то она*
1) ограничена на нем;
2) достигает на нем своих верхней и нижней граней.

Определение 3.15. *Точка x_0 в которой нарушено хотя бы одно из условий непрерывности функции называется ее точкой разрыва.*

1. Точки разрыва первого рода.
   Односторонние пределы конечны.
   - $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq \begin{cases} f(x_0) \\ f(x_0) - \text{не существует} \end{cases}.$
     Такие точки называются точками устранимого разрыва.
   - $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x).$
     Такие точки называются точками конечного разрыва. Разность $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ называется скачком функции в точке x_0.

     Пример 3.6. *Исследовать на непрерывность функцию*
     $$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 0, \\ \sin x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ x - \frac{\pi}{2} + 1, & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$
     Подозрительными точками являются $x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2}$.
     $$\lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{x \to -0} (x^2 + 1) = 1$$
     $$\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} \sin x = 0$$
     Оба предела конечны, но не равны. $x = 0$ – точка конечного разрыва.
     $$\lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} \sin x = 1$$
     $$\lim_{x \to \frac{\pi}{2} + 0} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2} + 0} \left(x - \frac{\pi}{2} + 1\right) = 1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
     В точке $x = \frac{\pi}{2}$ функция непрерывна.
2. Точки разрыва второго рода.
   Односторонние пределы не существуют или бесконечны.

   Пример 3.7. *Рассмотрим функцию $f(x) = \operatorname{tg} x$.*
   $$\lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} \operatorname{tg} x = +\infty, \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2} + 0} \operatorname{tg} x = -\infty$$
   Точки $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ – точки разрыва второго рода (бесконечного разрыва).

3.5. Индивидуальные задания к теме 3

Вариант 1

1. Вычислить пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

   (a)
   $$\lim_{x\to -7} \frac{4\,x^2+23\,x-35}{-5\,x^2-27\,x+56}$$

   (b)
   $$\lim_{x\to 10} \frac{4\,x^3-91\,x^2+620\,x-1100}{-5\,x^3+70\,x^2-175\,x-250}$$

   (c)
   $$\lim_{x\to -\infty} \frac{\left(x^2-20\,x+100\right)(4\,x-11)}{(x^2-15\,x+50)\,(-5\,x-5)}$$

   (d)
   $$\lim_{x\to \infty} \frac{6\,x^2+46\,x+28}{-6\,x^3-78\,x^2-210\,x+294}$$

   (e)
   $$\lim_{x\to 6} \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{7\,x-32}}{-43\,x-30+8\,x^2}$$

   (f)
   $$\lim_{x\to 10} \sqrt[x-10]{-69+x^2-3\,x}$$

   (g)
   $$\lim_{x\to -7} \frac{\mathrm{tg}\,(\pi\,x)}{\pi\,x+7\,\pi}$$

   (h)
   $$\lim_{x\to -7} \frac{x^3+24\,x^2+192\,x+511}{3\,x^2-9\,x-210}$$

2. Исследовать функцию на непрерывность и построить ее график. Классифицировать точки разрыва.
   $$f(x)=\begin{cases} x+4, & x<-1,\\ x^2+2, & -1\le x<1,\\ 2x, & x\ge 1.\end{cases}$$

3. Исследовать данные функции на непрерывность в указанных точках. Классифицировать точки разрыва.
   $$f(x)=2^{\frac{1}{x-3}}+1;\quad x_1=3;\quad x_2=4.$$

Вариант 2

1. Вычислить пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

   (a)
$$\lim_{x\to 9}\frac{10\,x^2-100\,x+90}{-6\,x^2+60\,x-54}$$

   (b)
$$\lim_{x\to -5}\frac{-\,6\,x^3-54\,x^2-90\,x+150}{10\,x^3+61\,x^2+56\,x+5}$$

   (c)
$$\lim_{x\to -\infty}\frac{\left(x^2+2\,x+1\right)x}{\left(x^2+4\,x+3\right)\left(-10\,x+3\right)}$$

   (d)
$$\lim_{x\to \infty}\frac{6\,x^2-52\,x+32}{3\,x^3-57\,x^2+336\,x-576}$$

   (e)
$$\lim_{x\to -4}\frac{-\,50\,x-40-10\,x^2}{\sqrt{-x+3}-\sqrt{6\,x+31}}$$

   (f)
$$\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x^2-4\,x-45}{x^3+3\,x^2-72\,x-324}\right)^{\dfrac{1}{x+5}}$$

   (g)
$$\lim_{x\to -6}\frac{\sin\left(\pi\,x\right)}{\pi\,x+6\,\pi}$$

   (h)
$$\lim_{x\to -6}\frac{\log_5\left(x+7\right)\cdot\ln 5}{x^2-2\,x-48}$$

2. Исследовать функцию на непрерывность и построить ее график. Классифицировать точки разрыва.
$$f(x)=\begin{cases}x+1, & x\le 0,\\ (x+1)^2, & 0<x\le 2,\\ -x+4, & x>2.\end{cases}$$

3. Исследовать данные функции на непрерывность в указанных точках. Классифицировать точки разрыва.
$$f(x)=5^{\frac{1}{x-3}}-1;\quad x_1=3;\quad x_2=4.$$

Вариант 3

1. Вычислить пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

(a)
$$\lim_{x\to -10} \frac{8\,x^2+77\,x-30}{-3\,x^2-19\,x+110}$$

(b)
$$\lim_{x\to -2} \frac{8\,x^3+35\,x^2+44\,x+12}{-3\,x^3-10\,x^2-4\,x+8}$$

(c)
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\left(x^2-1\right)(-6\,x+1)}{(x^2-2\,x+1)\,(6\,x-2)}$$

(d)
$$\lim_{x\to \infty} \frac{2\,x^2-6\,x-80}{9\,x^3-151\,x^2+688\,x-448}$$

(e)
$$\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{-10\,x-18}}{25\,x+6+11\,x^2}$$

(f)
$$\lim_{x\to -2} \sqrt[x+2]{21+x^2+12\,x}$$

(g)
$$\lim_{x\to -9} \frac{\operatorname{arctg}(x+9)}{x^2+x-72}$$

(h)
$$\lim_{x\to -9} \frac{2-2\,\sin\left(\frac{1}{2}\,\pi\,x\right)}{\frac{1}{4}\,\pi^2x^2+\frac{9}{2}\,\pi^2x+\frac{81}{4}\,\pi^2}$$

2. Исследовать функцию на непрерывность и построить ее график. Классифицировать точки разрыва.

$$f(x)=\begin{cases} x+2, & x\le -1,\\ x^2+1, & -1<x\le 1,\\ -x+3, & x>1.\end{cases}$$

3. Исследовать данные функции на непрерывность в указанных точках. Классифицировать точки разрыва.

$$f(x)=\frac{x+7}{x-2};\quad x_1=2;\quad x_2=3.$$

Вариант 4

1. Вычислить пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

(a)
$$\lim_{x\to 8}\frac{6\,x^2-52\,x+32}{3\,x^2-33\,x+72}$$

(b)
$$\lim_{x\to 5}\frac{3\,x^3-19\,x^2+21\,x-5}{6\,x^3-64\,x^2+190\,x-100}$$

(c)
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+2\,x-35\right)(4\,x-5)}{(x^2+14\,x+49)\,(-5\,x+8)}$$

(d)
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{9\,x^2-52\,x-12}{2\,x^3-29\,x^2+132\,x-180}$$

(e)
$$\lim_{x\to-7}\frac{\sqrt{-2-x}-\sqrt{-2\,x-9}}{-66\,x-21-9\,x^2}$$

(f)
$$\lim_{x\to 5}\sqrt[x-5]{41+x^2-13\,x}$$

(g)
$$\lim_{x\to 5}\frac{\arcsin\,(x-5)}{x^2-10\,x+25}$$

(h)
$$\lim_{x\to 5}\frac{2^{x-5}-1}{\ln 2\cdot(x^2-10\,x+25)}$$

2. Исследовать функцию на непрерывность и построить ее график. Классифицировать точки разрыва.

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ -(x-1)^2, & 0<x<2,\\ x-3, & x\ge 2.\end{cases}$$

3. Исследовать данные функции на непрерывность в указанных точках. Классифицировать точки разрыва.

$$f(x)=\frac{x-5}{x+3};\quad x_1=-3;\quad x_2=-2.$$

Вариант 5

1. Вычислить пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

(a)
$$\lim_{x\to 1} \frac{6\,x^2-8\,x+2}{-6\,x^2+7\,x-1}$$

(b)
$$\lim_{x\to -7} \frac{-\,6\,x^3-78\,x^2-210\,x+294}{6\,x^3+70\,x^2+212\,x+112}$$

(c)
$$\lim_{x\to \infty} \frac{\left(x^2+8\,x+16\right)(10\,x+3)}{(x^2-2\,x-24)\,(2\,x-6)}$$

(d)
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{6\,x^3-64\,x^2+190\,x-100}{3\,x^2-16\,x+5}$$

(e)
$$\lim_{x\to 8} \frac{10\,x+48-2\,x^2}{\sqrt{x+9}-\sqrt{-10\,x+97}}$$

(f)
$$\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x^2+6\,x-7}{x^3+6\,x^2-x-6}\right)^{\dfrac{1}{x+7}}$$

(g)
$$\lim_{x\to -6} \frac{\sin(\pi\,x)}{\pi\,x+6\,\pi}$$

(h)
$$\lim_{x\to -6} \frac{10^{x+6}-1}{\ln 10\cdot(x^2+13\,x+42)}$$

2. Исследовать функцию на непрерывность и построить ее график. Классифицировать точки разрыва.

$$f(x)=\begin{cases} -2(x+1), & x\le -1,\\ (x+1)^3, & -1<x<0,\\ x, & x\ge 0.\end{cases}$$

3. Исследовать данные функции на непрерывность в указанных точках. Классифицировать точки разрыва.

$$f(x)=9^{\frac{1}{2-x}};\quad x_1=0;\quad x_2=2.$$

Вариант 6

1. Вычислить пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

(a)
$$\lim_{x\to 8}\frac{2\,x^2-6\,x-80}{9\,x^2-79\,x+56}$$

(b)
$$\lim_{x\to 6}\frac{9\,x^3-34\,x^2-116\,x-24}{2\,x^3-29\,x^2+132\,x-180}$$

(c)
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+20\,x+100\right)(6\,x+9)}{(x^2+11\,x+10)\,(5\,x+1)}$$

(d)
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-\,6\,x^3+65\,x^2-132\,x-252}{-x^2+x+30}$$

(e)
$$\lim_{x\to-5}\frac{\sqrt{-x+1}-\sqrt{-2\,x-4}}{-7\,x^2-44\,x-45}$$

(f)
$$\lim_{x\to 6}\sqrt[x-6]{49+x^2-14\,x}$$

(g)
$$\lim_{x\to 8}\frac{\operatorname{arctg}(x-8)}{x^2-14\,x+48}$$

(h)
$$\lim_{x\to 8}\frac{\log_4(x-7)\cdot\ln 4}{x^2-14\,x+48}$$

2. Исследовать функцию на непрерывность и построить ее график. Классифицировать точки разрыва.

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ x^2, & 0<x\le 2,\\ x+1, & x>2.\end{cases}$$

3. Исследовать данные функции на непрерывность в указанных точках. Классифицировать точки разрыва.

$$f(x)=2^{\frac{1}{x-5}}+1;\quad x_1=4;\quad x_2=5.$$

Вариант 7

1. Вычислить пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

(a)
$$\lim_{x\to 6}\frac{-x^2+x+30}{-6\,x^2+29\,x+42}$$

(b)
$$\lim_{x\to 2}\frac{-6\,x^3+57\,x^2-9\,x-162}{-x^3+x^2+8\,x-12}$$

(c)
$$\lim_{x\to -\infty}\frac{\left(x^2-5\,x+4\right)(-3\,x-4)}{(x^2-2\,x+1)\,(7\,x-2)}$$

(d)
$$\lim_{x\to \infty}\frac{8\,x^3-35\,x^2+44\,x-12}{2\,x^2-x-6}$$

(e)
$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{-x+1}-\sqrt{6\,x+8}}{-x+6-7\,x^2}$$

(f)
$$\lim_{x\to 2}\sqrt[x-2]{13+x^2-8\,x}$$

(g)
$$\lim_{x\to 3}\frac{\arcsin(x-3)}{x^2-5\,x+6}$$

(h)
$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-8\,x^3+24\,x^2-32\,x+15}{4\,x^2-20\,x+24}$$

2. Исследовать функцию на непрерывность и построить ее график. Классифицировать точки разрыва.

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\le 1,\\ 2x, & 1<x\le 3,\\ x+2, & x>3.\end{cases}$$

3. Исследовать данные функции на непрерывность в указанных точках. Классифицировать точки разрыва.

$$f(x)=5^{\frac{1}{x-4}}-2;\quad x_1=3;\quad x_2=4.$$

Вариант 8

1. Вычислить пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

   (a)
$$\lim_{x\to -4}\frac{8\,x^2+34\,x+8}{2\,x^2+13\,x+20}$$

   (b)
$$\lim_{x\to 2}\frac{2\,x^3+5\,x^2-9\,x-18}{8\,x^3-35\,x^2+44\,x-12}$$

   (c)
$$\lim_{x\to -\infty}\frac{\left(x^2-4\,x+4\right)(-x-3)}{(x^2-11\,x+18)\,(-6\,x-9)}$$

   (d)
$$\lim_{x\to \infty}\frac{6\,x^2+3\,x-18}{5\,x^3+23\,x^2+32\,x+12}$$

   (e)
$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{-x+4}-\sqrt{6\,x-17}}{5\,x^2-17\,x+6}$$

   (f)
$$\lim_{x\to 2}\sqrt[x-2]{-7+x^2+2\,x}$$

   (g)
$$\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{tg}(\pi\,x)}{\pi\,x-\pi}$$

   (h)
$$\lim_{x\to 1}\frac{2+2\,\sin\left(\frac{1}{2}\,\pi\,x\right)}{\frac{1}{4}\,\pi^2x^2-\frac{1}{2}\,\pi^2x+\frac{1}{4}\,\pi^2}$$

2. Исследовать функцию на непрерывность и построить ее график. Классифицировать точки разрыва.
$$f(x)=\begin{cases}x-3, & x<0,\\ x+1, & 0\le x\le 4,\\ 3+x, & x>4.\end{cases}$$

3. Исследовать данные функции на непрерывность в указанных точках. Классифицировать точки разрыва.
$$f(x)=6^{\frac{1}{x-3}}+3;\quad x_1=3;\quad x_2=4.$$

Вариант 9

1. Вычислить пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

   (a)
$$\lim_{x\to -4}\frac{2\,x^2+2\,x-24}{10\,x^2+43\,x+12}$$

   (b)
$$\lim_{x\to -9}\frac{2\,x^3+44\,x^2+306\,x+648}{10\,x^3+145\,x^2+520\,x+225}$$

   (c)
$$\lim_{x\to \infty}\frac{\left(x^2+18\,x+81\right)(2\,x+8)}{(x^2+14\,x+45)\,(10\,x+5)}$$

   (d)
$$\lim_{x\to -\infty}\frac{-\,6\,x^3-54\,x^2-90\,x+150}{10\,x^2+51\,x+5}$$

   (e)
$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{-10\,x+21}}{-16\,x+20+3\,x^2}$$

   (f)
$$\lim_{x\to -9}\sqrt[x+9]{37+x^2+13\,x}$$

   (g)
$$\lim_{x\to -7}\frac{\operatorname{arctg}\,(x+7)}{x^2+12\,x+35}$$

   (h)
$$\lim_{x\to -7}\frac{\log_6\,(x+8)\cdot\ln 6}{x^2+12\,x+35}$$

2. Исследовать функцию на непрерывность и построить ее график. Классифицировать точки разрыва.
$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & x\le 0,\\ 0, & 0<x\le 2,\\ x-2, & x>2.\end{cases}$$

3. Исследовать данные функции на непрерывность в указанных точках. Классифицировать точки разрыва.
$$f(x)=7^{\frac{1}{5-x}}+1;\quad x_1=4;\quad x_2=5.$$

Вариант 10

1. Вычислить пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

(a)
$$\lim_{x\to 7}\frac{-3\,x^2+13\,x+56}{7\,x^2-46\,x-21}$$

(b)
$$\lim_{x\to 1}\frac{-3\,x^3+11\,x^2+8\,x-16}{7\,x^3-16\,x^2+11\,x-2}$$

(c)
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+4\,x+4\right)(-3\,x+2)}{(x^2+4\,x+4)\,(8\,x+3)}$$

(d)
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-9\,x^2-63\,x+72}{-5\,x^3-71\,x^2-176\,x+576}$$

(e)
$$\lim_{x\to 3}\frac{-8\,x^2+27\,x-9}{\sqrt{-x+7}-\sqrt{5\,x-11}}$$

(f)
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-8\,x+7}{x^3-11\,x^2+7\,x+147}\right)^{\dfrac{1}{x-1}}$$

(g)
$$\lim_{x\to 9}\frac{\operatorname{tg}(\pi\,x)}{\pi\,x-9\,\pi}$$

(h)
$$\lim_{x\to 9}\frac{7^{x-9}-1}{\ln 7\cdot(x^2-10\,x+9)}$$

2. Исследовать функцию на непрерывность и построить ее график. Классифицировать точки разрыва.

$$f(x)=\begin{cases}2x^2, & x\le 0,\\ x, & 0<x\le 1,\\ 2+x, & x>1.\end{cases}$$

3. Исследовать данные функции на непрерывность в указанных точках. Классифицировать точки разрыва.

$$f(x)=\frac{x-3}{x+4};\quad x_1=-5;\quad x_2=-4.$$

Тема 4
Дифференцирование функций

4.1. Определение и свойства производной

Определение 4.1. *Производной от функции $y = f(x)$ в точке называется предел отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента, когда последнее стремиться к нулю*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Заметим, что в общем случае для каждого значения x_0 производная $f'(x_0)$ имеет единственное значение, т.е. производная является функцией от x_0.

<u>Геометрический смысл производной:</u> Значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику этой функции в точке x_0.

Уравнение касательной: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

<u>Механический смысл производной:</u> Производная пути по времени в момент времени t_0 есть мгновенная скорость.

Определение 4.2. *Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке $x_0 \in D(f)$, если ее приращение в этой точке представимо в виде*

$$\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x,$$

где A постоянная относительно Δx, α – бесконечно малая относительно Δx.

Если функция имеет производную в точке, то она дифференцируема в этой точке.

Определение 4.3. *Главная часть приращения дифференцируемой функции линейное относительно Δx называется дифференциалом функции*

$$df(x_0) = A\Delta x = f'(x_0)\Delta x.$$

Положим по определению, что дифференциал независимой переменно равен ее приращению $dx = \Delta x$. Тогда

$$df(x_0) = f'(x_0)dx.$$

Геометрический смысл дифференциала: Дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0, соответствующий приращению Δx, равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику этой функции в точке x_0.

Механический смысл дифференциала: Дифференциал – это путь пройденный за промежуток времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$.

Заметим, что дифференциал отличается от приращения функции на бесконечно малую величину. Можно получить формулу для приближенного вычисления значения функции

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

Пример 4.1. *Вычислить* $2,1^5$.

Обозначим $f(x) = x^5$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0,1$. *Тогда* $f(x_0) = 32$, $f'(x_0) = 5{x_0}^4 = 80$ *и по формуле*

$$2,1^5 \approx 32 + 80 \cdot 0,1 = 40 \quad (\textit{точное значение составляет } 40,84101).$$

Таблица производных элементарных функций

Функция	Производная	Функция	Производная
C, $C - const$	0	x^n	nx^{n-1}
a^x	$a^x \ln a$	e^x	e^x
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\operatorname{th} x$	$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{cth} x$	$-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

Теорема 4.1. *Если функции U и V дифференцируемы в точке x_0, то:*
1) функция $f = U \pm V$ дифференцируема в точке x_0 и $f' = U' \pm V'$;
2) функция $f = U \cdot V$ дифференцируема в точке x_0 и $f' = U' \cdot V + U \cdot V'$
3) функция $f = \frac{U}{V}$ ($V(x_0) \neq 0$) дифференцируема в точке x_0 и $f' = \frac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2}$.

Правила нахождения дифференциала:
1. $d(U \pm V) = dU \pm dV$.
2. $d(U \cdot V) = V \cdot dU + U \cdot dV$.
3. $d\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{V \cdot dU - U \cdot dV}{V^2}$.

Теорема 4.2. *Если функция $y = f(x)$ обратима на промежутке I и дифференцируема в точке $x_0 \in I$, то обратная функция $x = \varphi(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$ и $\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.*

Пример 4.2. *Вычислить производную функции $y = \arcsin x$.*

Обратная функция $x = \sin y$. По теореме

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Теорема 4.3. *Если функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0 и функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то композиция функций $y = f(\varphi(x))$ дифференцируема в точке x_0 и производная равна*

$$y'_x = f'_u \cdot \varphi'_x.$$

Пример 4.3. $y = \ln^2(2x+3)$*:* $y = u^2$, $u = \ln(v)$, $v = 2x+3$. $v'_x = 2$, $u'_v = \frac{1}{v}$, $y'_u = 2u$.

$$y'_x = 2u \cdot \frac{1}{v} \cdot 2 = \frac{4\ln(2x+3)}{2x+3}$$

Дифференциал композиции функций обладает свойством инвариантности

$$dy = y'_x \cdot dx = f'_u \cdot \varphi'_x \cdot dx = f'_u \cdot du$$

4.2. Приемы дифференцирования

Логарифмическое дифференцирование

Рассмотрим сложную показательную функцию $y(x) = f(x)^{g(x)}$. Для нахождения производной этой функции воспользуемя следующим алгоритмом:

1. Логарифмируем функцию $\ln(y(x)) = g(x) \cdot \ln(f(x))$. 2. Вычислим производную от обеих частей

$$\frac{1}{y(x)} \cdot y'_x = g'_x(x) \cdot \ln(f(x)) + \frac{f'_x(x)}{f(x)} \cdot g(x)$$

3. Выделим из правой части производную

$$y'_x = f(x)^{g(x)} \cdot \left(g'_x(x) \cdot \ln(f(x)) + \frac{f'_x(x)}{f(x)} \cdot g(x) \right).$$

Дифференцирование неявной функции

1. Дифференцируем левую часть уравнения $F(x, y) = 0$ по x, считая, что y есть функция от x, т.е. $y = y(x)$.

2. Выражаем из полученного равенства производную y'_x.

3. Если требуется вычислить значение производной в точке $(x_0; y_0)$, то подставляем координаты этой точки в полученное выражение.

Пример 4.4. *Вычислить производную функции $y^2+y-x^2=0$ в точке $(\sqrt{2};-2)$. Составить уравнение касательной к графику этой функции.*

$$2yy'_x+y'_x-2x=0 \Leftrightarrow y'_x=\frac{2x}{2y+1}, \qquad y'_x(\sqrt{2};1)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$y'_x=\left(\frac{-1+\sqrt{1+4x^2}}{2}\right)'=\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}, \qquad y'_x(1)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$y_{кас}=y'_x(x-x_0)+y(x_0) \Leftrightarrow y_{кас}=\frac{2\sqrt{2}}{3}(x-\sqrt{2})+1$$

Дифференцирование параметрически заданной функции

Пусть даны две функции

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases}, \qquad (4.1)$$

где t принимает значения из отрезка $[a;b]$. Каждому значению t соответствует точка плоскости Oxy с координатами $(\varphi(t);\psi(t))$. Когда t изменяется от a до b, эта точка описывает некоторую кривую. Уравнения (4.1) называются параметрическими уравнениями, t – параметр (в механике можно считать его временем).

Для нахождения производной параметрически заданной функции предположим, что функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ дифференцируемы и $\varphi'(t)\neq 0$ на интервале I. Значит функция $\varphi'(t)$ сохраняет на I знак, т.е. $\varphi(t)$ – монотонна и обратима. Значит, можно представить параметрическую функцию в виде $y=\psi(\varphi^{-1}(x))$. Воспользуемся правилами нахождения производной композиции и обратной функции

$$y'_x=\left(\psi(\varphi^{-1}(x))\right)'=\psi'_t(\varphi^{-1}(x))\cdot(\varphi^{-1}(x))'=\frac{\psi'_t(t)}{\varphi'_t(t)}=\frac{y'_t}{x'_t}.$$

Пример 4.5. *Вычислить производную функции* $\begin{cases} x=\frac{\operatorname{sh}t}{2}, \\ y=\frac{-1+\operatorname{ch}t}{2} \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ *при* $t_0=arsh(2\sqrt{2})$. *Составить уравнение касательной к графику этой функции.*

$$x'_t=\frac{\operatorname{ch}t}{2}, \quad y'_t=\frac{\operatorname{sh}t}{2} \Leftrightarrow y'_x=\frac{\operatorname{sh}t}{\operatorname{ch}t}=\operatorname{th}t,$$

$$y'_x(\sqrt{2};1)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$y'_x=\left(\frac{-1+\sqrt{1+4x^2}}{2}\right)'=\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}, \qquad y'_x(1)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$y_{кас}=y'_x(x-x(t_0))+y(t_0) \Leftrightarrow y_{кас}=\frac{2\sqrt{2}}{3}(x-\sqrt{2})+1$$

4.3. Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ имеет область определения D и дифференцируема на множестве $D_1 \subset D$, т.е. для любого $x \in D_1$ определена производная $y' = f'(x)$, т.е. новая функция от x. Допустим, что на множестве $D_2 \subset D_1$ эта функция дифференцируема, т.е. имеет производную. Эта производная называется второй производной или производной второго порядка:

$$y'' = (f'(x))' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Аналогично можно определить производную n-го порядка как производную от производной $(n-1)$-го порядка

$$y^{(n)} = \left(f^{(n-1)}(x)\right)' = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Рассмотрим функцию $y = u(x) \cdot v(x)$ и найдем ее производные

$$\begin{aligned} y' &= u'v + uv', \\ y'' &= u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv'', \\ y''' &= u'''v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''', \\ &\vdots \end{aligned}$$

Формула Лейбница:

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(n-i)} \cdot v^{(i)}$$

Пример 4.6. *Найти производную n-го порядка функции $y = e^{ax} \cdot x^2$.*

$$\begin{gathered} u = e^{ax}, v = x^2; \\ u' = ae^{ax}, v' = 2x; \\ u'' = a^2e^{ax}, v'' = 2; \\ u''' = a^3e^{ax}, v''' = 0; \\ \ldots\ldots; \\ u^{(n)} = a^ne^{ax}, v^{(n)} = 0 \end{gathered}$$

$$y^{(n)} = a^nx^2e^{ax} + 2na^{n-1}xe^{ax} + n(n-1)a^{n-2}e^{ax}$$

Для функций заданных неявно $F(x, y) = 0$ нужно воспользоваться алгоритмом нахождения первой производной по x, но применительно уже к функции $F_1(x, y, {y'}_x) = 0$.

Для функций заданных параметрически необходимо рассмотреть функцию $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = {y'}_x(t) \end{cases}$ и аналогичным образом найти ее производную.

Пример 4.7. *1.* $y = \sqrt{1 - x^2}$.

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y'' = -\frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = -\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$$

2. $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

$${y'}_x = -\frac{x}{y}, \quad {y''}_x = -\frac{y - x \cdot {y'}_x}{y^2} = -\frac{y + \frac{x^2}{y}}{y^2} = -\frac{1}{y^3}$$

3. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t \end{cases}$.

$${y'}_x = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\operatorname{ctg} t, \quad {y''}_x = \frac{{{y'}_x}'_t}{{x'}_t} = -\frac{1}{\sin^3 t}$$

Механический смысл второй производной: вторая производная пути по времени есть ускорение.

Используя рассмотренные выше способы нахождения производных высших порядков можно вывести формулы для нахождения дифференциалов высших порядков функции $y = f(x)$:

$$dy = f'(x)dx$$
$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f''(x)dx)dx = f''(x)dx^2$$
$$\vdots$$
$$d^ny = d(d^{n-1}) = (f^{(n)}(x)dx^{n-1})dx = f^{(n)}(x)dx^n$$

Если переменная x есть функция от t, т.е. $x = \varphi(t)$, то дифференциал 2-го порядка не обладает свойством инвариантности

$$d^2y = d(dy) = d({f'}_x(x))dx + {f'}_x(x)d(dx) = {f''}_x(x)dx^2 + {f'}_x(x)d^2x$$

Пример 4.8. *Вычислить дифференциал второго порядка функции* $y = \sin x$.

$$dy = \cos x dx, \qquad d^2y = -\sin x dx^2$$

В случае, если $x = u^2$.

$$dy = \cos x dx, \quad dx = 2udu, \quad dy = 2u \cos u^2 du$$
$$d^2y = \left(2\cos u^2 - 4u \sin u^2\right) du^2$$

4.4. Основные теоремы о дифференцируемых функциях

Теорема 4.4 (Ферма). *Пусть функция $y = f(x)$ определена в интервале $(a;b)$ и в некоторой точке $c \in (a;b)$ принимает наибольшее или наименьшее значение. Тогда если в этой точке существует производная, то она равна нулю $f'(c) = 0$.*

Геометрический смысл теоремы 4.4: касательная в точке, в которой функция принимает наибольшее или наименьшее значение, параллельна оси Ox.

Теорема 4.5 (Ролля). *Если функция $y = f(x)$:*
1) непрерывна на $[a;b]$
2) дифференцируема на $(a;b)$
3) на концах отрезка принимает равные значения $f(a) = f(b)$.
Тогда существует точка $c \in (a;b)$ такая, что $f'(c) = 0$.

Геометрический смысл теоремы 4.5: если ординаты обоих концов гладкой кривой равны, то на кривой найдется точка, в которой касательная к кривой параллельна оси абсцисс.

Теорема 4.6 (Лагранжа). *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема на $(a;b)$, то найдется точка $c \in (a;b)$, что*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Геометрический смысл теоремы 4.6: на отрезке $[a;b]$ найдётся точка, в которой касательная параллельна хорде, проходящей через точки графика, соответствующие концам отрезка.

Пример 4.9. *Доказать, что* $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.
Рассмотрим на [-1;1] функцию $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ *которая удовлетворяет условиям теоремы 4.6.* $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$. $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $f(1) = 0$.

Теорема 4.7 (Коши). *Пусть функции $f(x)$, $g(x)$:*
1. непрерывны на $[a;b]$
2. дифференцируемы на $(a;b)$
3. $\forall x \in (a;b) g'(x) \neq 0$.
Тогда существует точка $c \in (a;b)$ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Пример 4.10. *Показать, что при $x \neq 0$ справедливо неравенство $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x$.*
Введем функции $f(x) = 1 - \cos x$, $g(x) = \frac{x^2}{2}$ и применим формулу Коши на отрезке $[0, x]$. В результате получаем

$$\frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = \frac{\sin c}{c},$$

где $c \in (0; x)$. Т.к. $\sin c < c$, то $\dfrac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} < 1.$

4.5. Правило Лопиталя

Теорема 4.8. *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ на некотором отрезке $[a; b]$ удовлетворяют условиям теоремы Коши и обращаются в нуль в точке $x = a$, т.е. $f(a) = \varphi(a) = 0$; тогда, если существует предел отношения $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ при $x \to a$, то существует и предел отношения $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ при $x \to a$, причем*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Пример 4.11.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{5 \cos 5x}{3} = \frac{5}{3}.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2.$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin \frac{k}{x}}{\frac{1}{x}} = k.$$

Теорема 4.9. *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы при всех $x \in U^*(a)$, причем $\varphi'(x) \neq 0$, также $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \infty$ и пусть существует предел*

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A. \tag{4.2}$$

Тогда существует предел $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ и

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A. \tag{4.3}$$

Пример 4.12.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+b}{cx^2-d}=\lim_{x\to\infty}\frac{2ax}{2cx}=\frac{a}{c}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1}=\infty.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=1.\quad \textit{По правилу не вычисляется}$$

Неопределенность $\langle 0\cdot\infty\rangle$.
Пусть $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$.

$$\lim_{x\to a}f(x)\cdot\varphi(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

Неопределенности $\langle 0^0\rangle$, $\langle\infty^0\rangle$, $\langle 1^\infty\rangle$.
Пусть $y=f(x)^{\varphi(x)}$, тогда

$$\lim_{x\to a}y=e^{\lim\limits_{x\to a}\ln y}=e^{\lim\limits_{x\to a}e^{\varphi(x)\ln f(x)}}.$$

Неопределенность $\langle\infty-\infty\rangle$.

$$\lim_{x\to a}(f(x)-\varphi(x))=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot\varphi(x)}}.$$

4.6. Исследование поведения функции

Теорема 4.10. *Если непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $y=f(x)$ имеет хотя бы в интервале $(a;b)$ производную равную нулю, то функция $y=f(x)$постоянна на отрезке $[a;b]$.*

Теорема 4.11. *Для того чтобы функция $y=f(x)$, непрерывная на $[a;b]$ и дифференцируемая на $(a;b)$, была возрастающей (убывающей) на $[a;b]$необходимо и достаточно:*
1. $\forall x\in(a;b)$ $f'(x)\geq 0$ $\underline{(f'(x)\leq 0)}$;
2. Равенство $f'(x)=0$ не выполняется ни на каком промежутке содержащимся в $(a;b)$.

Определение 4.4. *Точка x_0 называется точкой максимума (минимума) функции $y=f(x)$, если для любого достаточно малого приращения аргумента Δx*

$$f(x)>f(x+\Delta x)\underline{(f(x)<f(x+\Delta x))}.$$

Точки максимума и минимума называются точками экстремума функции. Это понятие носит локальный характер и не нужно путать его с наибольшим и наименьшим значением функции.

Теорема 4.12 (Необходимое условие существования экстремума). *Если в точке $x_0 \in D(f)$ функция $y = f(x)$ имеет экстремум, то в этой точке производная либо не существует, либо равна нулю.*

Точки в которых производная функции равна нулю или не существует будем называть критическими.

Теорема 4.13 (I достаточное условие существования экстремума). *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку x_0, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, быть может, самой точки x_0). Если при переходе слева направо через эту точку производная меняет знак:*
1) с плюса на минус, то x_0 – точка максимума;
2) с минуса на плюс, то x_0 – точка минимума.

Теорема 4.14 (II достаточное условие существования экстремума). *Пусть в некоторой окрестности критической точки x_0 функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема и вторая производная также непрерывна. Тогда функция имеет экстремум в точке x_0 если:*
1) $f''(x_0) < 0$, x_0 – точка максимума;
1) $f''(x_0) > 0$, x_0 – точка минимума.

Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

Пусть функция непрерывна на отрезке. Тогда по признаку Вейерштрасса она достигает на нем своих наибольшего и наименьшего значений. Будем предполагать, что на данном отрезке функция имеет конечное число критических точек. Очевидно, что наибольшее или наименьшее значение функция будет достигать или в точках экстремума (точке максимума или минимума соответственно), или на концах отрезка.

Пример 4.13. *Какие размеры надо придать цилиндру, чтобы при данном объеме его полная поверхность была наименьшей?*

Пусть заданный объем цилиндра V. По формуле $V = \pi R^2 H$, где R – радиус основания; H – высота. Следовательно, $H = \frac{V}{\pi R^2}$.

Составим формулу для вычисления полной поверхности цилиндра

$$S_{полн} = 2\pi R^2 + 2\pi RH.$$

Составим функцию от переменной R, заменив $H = \frac{V}{\pi R^2}$

$$S(R) = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}, \text{ где } R \in (0; +\infty).$$

Найдем точки экстремума данной функции и определим их тип

$$S'_R = 4\pi R - \frac{2V}{R^2};\ S'_R = 0 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

$$S''_R = 4\pi + \frac{4V}{R^3};\ S''_R\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) > 0$$

Найденная точка $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ *– точка минимума. При этом значении радиуса основания и заданном объеме цилиндр имеет наименьшую полную поверхность.*

Определение 4.5. *Будем говорить, что кривая на интервале* $(a; b)$ *выпукла вверх (вниз), если все точки кривой лежат ниже (выше) любой касательной, проведенной к кривой в любой точки этого интервала.*

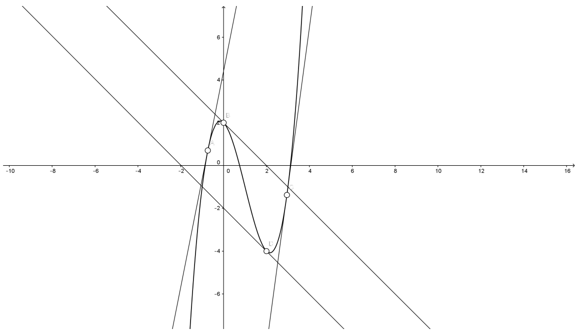


Рис. 15. Направление выпуклости

Теорема 4.15. *Если во всех точках интервала* $(a; b)$ *функция* $y = f(x)$ *дважды дифференцируема и* $f''(x) < 0$ $(\underline{f''(x) > 0})$*, то кривая на интервале* $(a; b)$ *выпукла вверх (вниз).*

Определение 4.6. *Точка* x_0 *называется точкой перегиба непрерывной кривой, если при переходе через точку* $(x_0; y_0)$ *кривая меняет направление выпуклости.*

Теорема 4.16. *Если функция* $y = f(x)$ *дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки* a *(кроме, быть может, самой точки* a*),* $f''(a) = 0$ *и при переходе через точку* $(a; f(a))$ *вторая производная меняет знак, то точка* $(a; f(a))$ *есть точка перегиба.*

Часто приходится исследовать форму кривой при неограниченном возрастании (по абсолютной величине) абсциссы или ординаты переменной точки кривой. При этом важным случаем является тот, когда исследуемая кривая неограниченно приближается к некоторой прямой.

Определение 4.7. *Прямая ℓ называется асимптотой кривой, если расстояние от переменной точки M этой кривой до прямой при удалении точки M в бесконечность стремиться к нулю.*

1. **Вертикальные асимптоты.** Из определения асимптоты следует, что если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$, или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$, или $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то прямая $x=a$ есть асимптота кривой $y=f(x)$; и обратно, если прямая $x=a$ есть асимптота, то выполняется одно из написанных выше равенств.

2. **Наклонные асимптоты.** Пусть кривая $y=f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y=kx+b$. Значит параметры асимптоты можем найти из равенств

$$k=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right), \tag{4.4}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right). \tag{4.5}$$

Обратно, если существую конечные пределы (4.4) и (4.5), то прямая $y=kx+b$ является асимптотой кривой $y=f(x)$.

Исследование функции проводится по следующему алгоритму:

1. **Область определения.** Находится естественная область определения функции.

2. **Симметрия и периодичность.** Определяется четность или нечетность, периодичность функции. Цель – уменьшить область построения графика функции, а остальные части графика получать с помощью симметрии или переноса.

3. **Поведение на бесконечности и в окрестности точек разрыва. Асимптоты.** В данном пункте определяется общий вид графика функции.

4. **Точки пересечения с осями.** Определяются нули функции и промежутки знакопостоянства.

5. **Возрастание и убывание.** Проводится исследование на монотонность функции, определяются критические точки.

6. **Выпуклость и вогнутость.** Проводится исследование на наличие перегибов графика и направление выпуклости.

7. **Построение графика функции.**

Пример 4.14. *Исследовать функцию* $y = \dfrac{x^2}{x+1}$ *и построить её график.*

1. Область определения.

$$x + 1 \neq 0 \Rightarrow D(y) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$x = -1$ *– точка разрыва.*

2. Симметрия и периодичность.

Область определения не симметрична относительно 0, значит симметрии нет.

Функция не является периодичной.

3. Поведение на бесконечности и в окрестности точек разрыва. Асимптоты.

$$\lim_{x\to-\infty} y = -\infty; \qquad \lim_{x\to+\infty} y = +\infty$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-1-0} y = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-1+0} y = +\infty \end{array}\right. \Rightarrow x = -1 \text{ – вертикальная асимптота}$$

Наклонная асимптота

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (y - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} -\frac{x}{x+1} = -1$$

$y = x - 1$ *– наклонная асимптота.*

4. Точки пересечения с осями.

С Ox*:* $y = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2}{x+1} = 0 \Rightarrow x = 0.$

С Oy*:* $x = 0 \Rightarrow y = 0.$

5. Возрастание и убывание.

$$y' = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ или } x = 0$$

$$y' \text{ – не существует при } x = -1$$

6. Выпуклость и вогнутость.

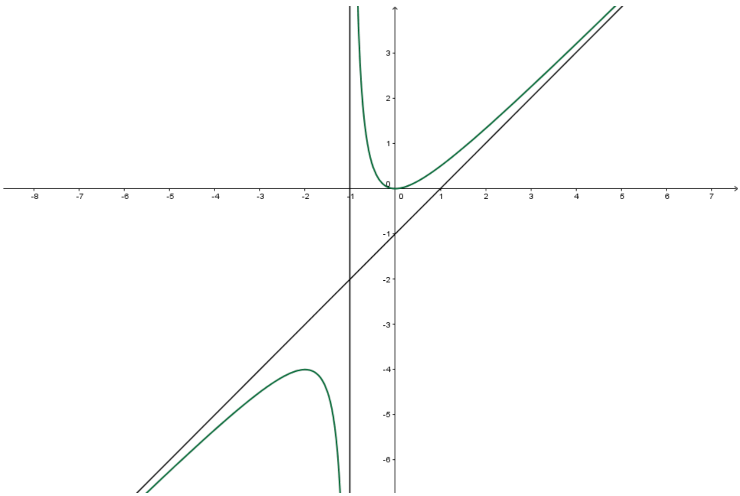
$$y'' = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2+2x)}{(x+1)^4} = \frac{2}{(x+1)^3}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x \in \emptyset$$

$$y'' \text{ – не существует при } x = -1$$

Сведем полученную информацию в таблицу

x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;+\infty)$
y	$(-\infty;-4)$	-4	$(-4;-\infty)$	$\emptyset$	$(+\infty;0)$	0	$(0;+\infty)$
y'	$+$ $\nearrow$	max	$-$ $\searrow$		$-$ $\searrow$	min	$+$ $\nearrow$
y''	$-$ $\cap$		- $\cap$	*перегиб*	$+$ $\cup$		$+$ $\cup$



Пример 4.15. *Исследовать функцию* $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ *и построить её график.*

1. Область определения.

$$D(x) = D(y) = \mathbb{R}$$

Точек разрыва нет.

2. Симметрия и периодичность.

$$x(-t) = x(t), \quad y(-t) = -y(t)$$

График симметричен относительно оси Ox. Можно исследовать функцию только для $t \geq 0$.

Функция не периодичная.

3. Поведение на бесконечности и в окрестности точек разрыва. Асимптоты.

$\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = +\infty;\qquad \lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = +\infty \Rightarrow$ *вертикальных асимптот нет*

Так как $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = +\infty$ *– наклонных асимптот нет.*

4. Точки пересечения с осями.

С Ox*:* $y(t) = 0 \Rightarrow t = 0.$

С Oy*:* $x(t) = 0 \Rightarrow t = 0.$

5. Возрастание и убывание.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3}{2}t^2$$

$$y'_t = 0 \Rightarrow t = 0$$

6. Выпуклость и вогнутость.

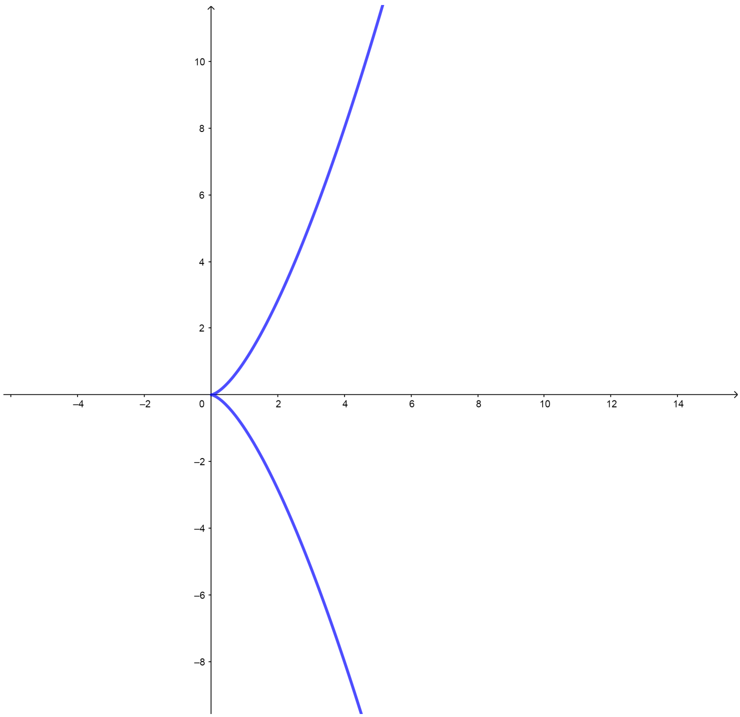
$$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{3}{2}$$

$$y''_x > 0$$

Сведем полученную информацию в таблицу

t	0	$(0;+\infty)$
x	0	$(0;+\infty)$
y	0	$(0;+\infty)$
y'		$+$ $\nearrow$
y''	*перегиб*	$+$ $\cup$

Строим график функции при $t \in [0;+\infty)$ *и симметрично отражаем относительно оси* Ox*.*



4.7. Индивидуальные задания к теме 4

Вариант 1

1. Продифференцировать данные функции.

(a) $f(x) = \sqrt[3]{3x^4 + 2x - 5} + \frac{4}{(x-2)^5}$.

(b) $g(x) = \operatorname{arcctg}^2 5x \cdot \ln(x-4)$.

(c) $w(x) = (\operatorname{cth} 3x)^{\arcsin x}$.

(d) $h(x) = \frac{\sqrt{x+7}(x-3)^4}{(x+2)^5}$.

2. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$.

(a) $y^2 = 8x$.

(b) $\begin{cases} x = (2t+3)\cos t \\ y = 3t^3 \end{cases}$.

3. С помощью дифференциала приближенно вычислить величину $\sqrt[5]{34}$ и оценить допущенную относительную погрешность (с точностью до двух знаков после запятой).

4. Полотняный шатер объемом V имеет форму прямого конуса. Каково должно быть отношение высоты конуса к радиусу его основания, чтобы на шатер пошло наименьшее количество полотна?

5. Провести полное исследование функций и построить их графики.

   (a) $y = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$.

   (b) $\begin{cases} x = (2t+3)\cos t \\ y = 3t^3 \end{cases}$.

Вариант 2

1. Продифференцировать данные функции.

   (a) $f(x) = \sqrt[3]{(x-3)^4} - \frac{3}{2x^3-3x+1}$.

   (b) $g(x) = \operatorname{arctg}^3 2x \cdot \ln(x+5)$.

   (c) $w(x) = (\cos(x+2))^{\ln x}$.

   (d) $h(x) = \frac{(x-3)^5(x+2)^3}{\sqrt{(x-1)^3}}$.

2. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$.

   (a) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{7} = 1$.

   (b) $\begin{cases} x = 2\cos^2 t \\ y = 3\sin^2 t \end{cases}$.

3. С помощью дифференциала приближенно вычислить величину $\sqrt[3]{26,19}$ и оценить допущенную относительную погрешность (с точностью до двух знаков после запятой).

4. В равнобедренный треугольник с основанием a и углом при основании α вписать параллелограмм наибольшей площадью так, чтобы одна из его сторон лежала на основании, а другая на боковой стороне треугольника. Найти длины сторон параллелограмма.

5. Провести полное исследование функций и построить их графики.

   (a) $y = \frac{x+1}{(x-1)^2}$.

   (b) $\begin{cases} x = 2\cos^2 t \\ y = 3\sin^2 t \end{cases}$.

Вариант 3

1. Продифференцировать данные функции.

   (a) $f(x) = \sqrt{(x-4)^5} + \frac{5}{(2x^2+4x-1)^2}$.

   (b) $g(x) = \arccos^4 x \cdot \ln(x^2 + x - 1)$.

   (c) $w(x) = (\sin 3x)^{\arccos x}$.

   (d) $h(x) = \frac{\sqrt{(x+1)^5}(x-2)^3}{(x-4)^2}$.

2. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$.

   (a) $y = x + \operatorname{arctg} y$.

   (b) $\begin{cases} x = 6\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$.

3. С помощью дифференциала приближенно вычислить величину $\sqrt[4]{16,64}$ и оценить допущенную относительную погрешность (с точностью до двух знаков после запятой).

4. Найти соотношение между радиусом R и высотой и цилиндра, имеющего при данном объеме V наименьшую полную поверхность.

5. Провести полное исследование функций и построить их графики.

   (a) $y = e^{\frac{1}{5+x}}$.

   (b) $\begin{cases} x = 6\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$.

Вариант 4

1. Продифференцировать данные функции.

   (a) $f(x) = \sqrt[5]{7x^2 - 3x + 5} - \frac{5}{(x-1)^3}$.

   (b) $g(x) = \sqrt{\arccos 2x} \cdot 3^{-x}$.

   (c) $w(x) = (\operatorname{th} 5x)^{\arcsin(x+1)}$.

   (d) $h(x) = \frac{\sqrt[5]{(x-2)^2}(x+3)}{(x+1)^7}$.

2. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$.

   (a) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(b) $\begin{cases} x = \frac{1}{t+2} \\ y = \left(\frac{t}{t+2}\right)^2 \end{cases}$.

3. С помощью дифференциала приближенно вычислить величину $\sqrt{8,76}$ и оценить допущенную относительную погрешность (с точностью до двух знаков после запятой).
4. Требуется сделать коническую воронку с образующей, равной 20 см. Какой должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наименьшим?
5. Провести полное исследование функций и построить их графики.

(a) $y = \frac{x}{9-x}$.

(b) $\begin{cases} x = \frac{1}{t+2} \\ y = \left(\frac{t}{t+2}\right)^2 \end{cases}$.

Вариант 5

1. Продифференцировать данные функции.

(a) $f(x) = \sqrt[4]{3x^2 - x + 5} - \frac{3}{(x-5)^4}$.

(b) $g(x) = \operatorname{arcctg} 7x^2 \cdot \operatorname{tg}^4 3x$.

(c) $w(x) = (\operatorname{sh}(x+2))^{\arcsin 2x}$.

(d) $h(x) = \frac{(x+2)^7(x-3)^3}{\sqrt{(x+2)^5}}$.

2. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$.

(a) $y^2 = 25x - 4$.

(b) $\begin{cases} x = e^{-2t} \\ y = e^{4t} \end{cases}$.

3. С помощью дифференциала приближенно вычислить величину $\sqrt[5]{31}$ и оценить допущенную относительную погрешность (с точностью до двух знаков после запятой).
4. Периметр равнобедренного треугольника равен $2p$. Каково должно быть его основание, чтобы объем тела, образованного вращением этого треугольника вокруг его основания, был наибольшим?
5. Провести полное исследование функций и построить их графики.

(a) $y = \frac{4x-x^2-4}{x}$.

(b) $\begin{cases} x = e^{-2t} \\ y = e^{4t} \end{cases}$.

Вариант 6

1. Продифференцировать данные функции.

   (a) $f(x) = \sqrt{3x^4 - 2x^3 + x} - \frac{4}{(x+2)^3}$.

   (b) $g(x) = \arcsin 3x^3 \cdot 5^{-x^2}$.

   (c) $w(x) = (\cos 5x)^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$.

   (d) $h(x) = \frac{(x-1)^4(x+2)^5}{\sqrt[3]{(x-4)^2}}$.

2. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$.

   (a) $\operatorname{arcctg} y = 4x + 5y$.

   (b) $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[5]{t} \end{cases}$.

3. С помощью дифференциала приближенно вычислить величину $\sqrt[3]{70}$ и оценить допущенную относительную погрешность (с точностью до двух знаков после запятой).

4. Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиусом R.

5. Провести полное исследование функций и построить их графики.

   (a) $y = \frac{x^2}{4x^2-1}$.

   (b) $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[5]{t} \end{cases}$.

Вариант 7

1. Продифференцировать данные функции.

   (a) $f(x) = \sqrt[3]{(x-7)^5} + \frac{5}{4x^2+3x-5}$.

   (b) $g(x) = \operatorname{arctg}^5 x \cdot \log_2(x-3)$.

   (c) $w(x) = (\sqrt{3x+2})^{\operatorname{arcctg} 3x}$.

   (d) $h(x) = \frac{\sqrt{x+4}(x-3)^2}{(x+2)^7}$.

2. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$.

(a) $y^2 - x = \cos y$.

(b) $\begin{cases} x = \frac{2t}{1+t^3} \\ y = \frac{t^2}{1+t^2} \end{cases}$.

3. С помощью дифференциала приближенно вычислить величину $(2,01)^3 + (2,01)^2$ и оценить допущенную относительную погрешность (с точностью до двух знаков после запятой).

4. Проволокой, длина которой ℓ м, необходимо огородить клумбу, имеющую форму кругового сектора. Каким должен быть радиус круга, чтобы площадь клумбы была наибольшей?

5. Провести полное исследование функций и построить их графики.

(a) $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

(b) $\begin{cases} x = \frac{2t}{1+t^3} \\ y = \frac{t^2}{1+t^2} \end{cases}$.

Вариант 8

1. Продифференцировать данные функции.

(a) $f(x) = \sqrt[5]{(x+4)^5} - \frac{2}{2x^2-3x+7}$.

(b) $g(x) = \arccos 3x \cdot \log_3(x+5)$.

(c) $w(x) = (\ln(x+3))^{\sin\sqrt{x}}$.

(d) $h(x) = \frac{(x-7)^{10}\sqrt{3x-1}}{(x+3)^5}$.

2. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$.

(a) $3x + \sin y = 5y$.

(b) $\begin{cases} x = \sqrt{t^2-1} \\ y = \frac{t+1}{\sqrt{t^2-1}} \end{cases}$.

3. С помощью дифференциала приближенно вычислить величину $\sqrt[3]{65}$ и оценить допущенную относительную погрешность (с точностью до двух знаков после запятой).

4. Определить наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в полукруг радиусом a.

5. Провести полное исследование функций и построить их графики.

(a) $y = x + \frac{\ln x}{x}$.

(b) $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 - 1} \\ y = \frac{t+1}{\sqrt{t^2-1}} \end{cases}$.

Вариант 9

1. Продифференцировать данные функции.

   (a) $f(x) = \frac{3}{(x-4)^7} - \sqrt{5x^2 - 4x + 3}$.

   (b) $g(x) = \arcsin^2 5x \cdot e^{-x}$.

   (c) $w(x) = (\log_2(x+4))^{\operatorname{ctg} 7x}$.

   (d) $h(x) = \frac{(x+1)^8(x-3)^2}{\sqrt{(x+2)^5}}$.

2. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$.

   (a) $\operatorname{tg} y = 3x + 5y$.

   (b) $\begin{cases} x = 4t + 2t^2 \\ y = 5t^3 - 3t^2 \end{cases}$.

3. С помощью дифференциала приближенно вычислить величину $\frac{2{,}9}{\sqrt{(2{,}9)^2+16}}$ и оценить допущенную относительную погрешность (с точностью до двух знаков после запятой).

4. Бревно длиной 20 м имеет форму усеченного конуса, диаметры оснований которого равны 2 м и 1 м. Требуется вырубить из бревна балку с квадратным поперечным сечением, ось которой совпадала бы с осью бревна, а объем был бы наибольшим. Каковы должны быть размеры балки?

5. Провести полное исследование функций и построить их графики.

   (a) $y = x - \ln(1 + x^2)$.

   (b) $\begin{cases} x = 4t + 2t^2 \\ y = 5t^3 - 3t^2 \end{cases}$.

Вариант 10

1. Продифференцировать данные функции.

   (a) $f(x) = \sqrt[3]{4x^2 - 3x - 4} - \frac{2}{(x-3)^5}$.

   (b) $g(x) = \arcsin^4 x \cdot \log_4(x - 1)$.

   (c) $w(x) = (\operatorname{sh} 3x)^{\operatorname{arctg}(x+2)}$.

   (d) $h(x) = \frac{(x-7)^4(x+2)}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$.

2. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$.

   (a) $xy = \operatorname{ctg} y$.

   (b) $\begin{cases} x = \frac{\ln t}{t} \\ y = t\ln t \end{cases}$.

3. С помощью дифференциала приближенно вычислить величину $\sqrt{\frac{4-3{,}02}{1+3{,}02}}$ и оценить допущенную относительную погрешность (с точностью до двух знаков после запятой).

4. С корабля, который стоит на якоре в 9 км от берега, нужно послать гонца в лагерь, расположенный в 15 км от ближайшей к кораблю точки берега. Скорость посыльного при движении пешком – 5 км/ч, а на лодке – 4 км/ч. В каком месте он должен пристать к берегу, чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время?

5. Провести полное исследование функций и построить их графики.

   (a) $y = \frac{x^3}{x^2-x+1}$.

   (b) $\begin{cases} x = \frac{\ln t}{t} \\ y = t\ln t \end{cases}$.

Список литературы

1. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры. – М.: Наука, 1968.
2. Бахвалов С.В., Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. Ч.I. – М.: Наука, 1964.
3. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – 20-е изд. – М.: Наука, 1985.
4. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – 13-е изд., стер. – М.: Гл. ред. физ-мат. лит-ры, 1980.
5. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – 9-е изд. – М.: Наука, 1968.
6. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре: Учебное пособие. – 13-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2010.
7. Сборник задач по геометрии / Под ред. В.Т. Базылева. – М.: Просвещение, 1980.
8. Сборник задач по математическому анализу. Том 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость: Учеб. пособие / Под ред. Л.Д. Кудрявцева. – 2-е изд., перераб. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
9. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа: Учебник. Ч.1. – 10-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2015.
10. Цубербиллер О.Н. Сборник задач и упражнений по аналитической геометрии. – 26-е изд. – М.: Физматгиз, 1963.